

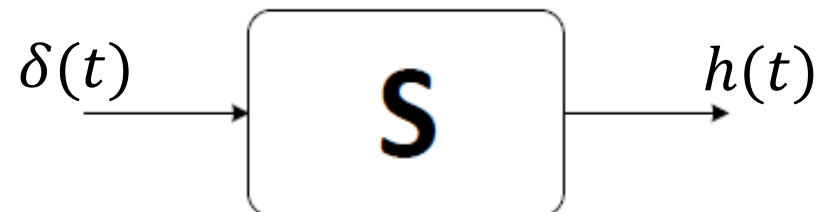
# HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 5<sup>Η</sup>

- Διαφορικές εξισώσεις ως συστήματα
- Κρουστική απόκριση
- Απόκριση μηδενικής κατάστασης



- Γνωρίσαμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως την **έξοδο του συστήματος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες**
  - Θεωρώντας την είσοδο μηδενική
- Ας προχωρήσουμε στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την (μη-μηδενική) **είσοδο** του συστήματος
  - Θεωρώντας τις **αρχικές συνθήκες μηδενικές!**
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές εισοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η (γενικευμένη) συνάρτηση Δέλτα
  - ...απουσία αρχικών συνθηκών για  $t = 0^-$
- Συμβολισμός:  **$h(t)$**



- Εμείς ήδη γνωρίζουμε τον τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου
  - Ας τον εκμεταλλευτούμε! 😊
- Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που «ζει» μόνο για  $t = 0$ , και μετά εξαφανίζεται (μηδενίζεται)!
  - Άρα ως είσοδος επιδρά στο σύστημα **ακαριαία, και μετά εξαφανίζεται**
- Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση Δέλτα γεννά **νέες «αρχικές» συνθήκες στο σύστημα, και μετά έχουμε πάλι μηδενική είσοδο!**
- Οι «αρχικές» αυτές συνθήκες συμβαίνουν για  $t = 0^+$  και θα είναι της μορφής

$$h(0^+), h'(0^+), \dots, h^{(N-1)}(0^+)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι τιμές των νέων αυτών «αρχικών» συνθηκών είναι

Γιατί αυτές οι «αρχικές» συνθήκες εμφανίζονται στο  $t = 0^+$ ?  
Γιατί μόλις τότε έχει ήδη «δράσει» η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος και έχει αφήσει το «αποτύπωμά» της στο σύστημα πριν μηδενιστεί!

$$\begin{aligned} h(0^+) &= 0 \\ h'(0^+) &= 0 \\ &\vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) &= \frac{1}{a_N} \end{aligned}$$

Ο συντελεστής της  $N$ -οστής παραγώγου της εξόδου στη διαφορική εξίσωση!

- Μπορούμε να λύσουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με αυτές τις συνθήκες!! 😊

- **ΆΡΑ:** αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$



και θέλουμε να βρούμε την **κρουστική απόκριση** του συστήματος αυτού, θα έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = \delta(t)$$

και την οποία λύνουμε ως ομογενή εξίσωση όπως ξέρουμε ήδη

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0$$

αλλά με «αρχικές» συνθήκες

$$h(0^+) = 0, \quad h'(0^+) = 0, \quad \dots, \quad h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα

## • Παράδειγμα

○ Έστω το σύστημα

$$a_N \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t)$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση  $h(t)$

Θέτουμε  $x(t) = \delta(t)$  και τότε  $y(t) = h(t)$ . Άρα

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) + 3 \frac{d}{dt} h(t) + 2h(t) = \delta(t)$$

Για  $t > 0$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) + 3 \frac{d}{dt} h(t) + 2h(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες

$$h(0^+) = 0, \quad h'(0^+) = \frac{1}{a_N} = 1 \quad (1)$$

Άρα

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t > 0$$

# • Παράδειγμα

με  $\lambda_1, \lambda_2$  να είναι οι χαρακτ. ρίζες της ομογενούς εξίσωσης.

Είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

το χαρακτ. πολυώνυμο με ρίζες  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ .

Άρα

$$h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \quad t > 0 \quad (2)$$

Από τις (1), η (2) δίνει

$$\left. \begin{aligned} h(0^+) &= c_1 + c_2 = 0 \\ h'(0^+) &= -c_1 - 2c_2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{matrix}}$$

- Παράδειγμα

Αρα τελικά

$$\begin{aligned}h(t) &= e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0 \\ &= (e^{-t} - e^{-2t}) u(t).\end{aligned}$$

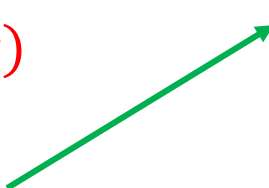
$\mathcal{F}^{-1}$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

- Όταν ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις βρίσκεται σε αρχική ηρεμία (== **μηδενικές αρχικές συνθήκες στο  $t = 0^-$** ), τότε αυτό το σύστημα είναι **γραμμικό**
  - Επίσης, μπορεί κανείς να δείξει ότι είναι και **χρονικά αμετάβλητο**

- Έτσι, ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι **γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ)** αν και μόνο αν οι αρχικές του συνθήκες είναι **μηδενικές**

- Ως τώρα, έχουμε έναν τρόπο να βρίσκουμε την κρουστική απόκριση για συστήματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

$$\sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Τι γίνεται όμως αν το δεξί μέλος έχει και **παραγώγους της εισόδου**? Πώς βρίσκουμε τότε την κρουστική απόκριση?
- Το σύστημα μας είναι **γραμμικό**! Αν η είσοδός μας είναι ένα **άθροισμα από παραγώγους της εισόδου**, η έξοδος θα είναι το άθροισμα των επιμέρους εξόδων, αν βάζαμε ως είσοδο κάθε όρο του **αθροίσματος** ξεχωριστά/«μεμονωμένα»! 😊



- Τα παραπάνω μας βοηθούν να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ένα σύστημα της μορφής

$$S: \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση  $h_o(t)$  του συστήματος

$$S_o: \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

- Η κρουστική απόκριση  $h(t)$  του συστήματος  $S$  δίνεται ως

Γραμμικότητα!!

$$h(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} h_o(t)$$

**Σημείωση:** Θα εξετάσουμε διαφορικές εξισώσεις όπου θα ισχύει  $N > M$

# • Παράδειγμα

○ Έστω το σύστημα

$$1 \rightarrow a_N \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \frac{d}{dt} y(t) + 9y(t) = 9x(t) + 2 \frac{d}{dt} x(t) \quad : S$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση  $h(t)$

Θεωρού το ανθίστατο σύστημα

$$S_0 : \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \frac{d}{dt} y(t) + 9y(t) = x(t)$$

Για  $x(t) = \delta(t)$ ,  $y(t) = h_0(t)$ , και τότε

$$\frac{d^2}{dt^2} h_0(t) + 6 \frac{d}{dt} h_0(t) + 9h_0(t) = \delta(t).$$

Για  $t > 0$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} h_0(t) + 6 \frac{d}{dt} h_0(t) + 9h_0(t) = 0$$

$$f \in h_0(0^+) = 0, h_0'(0^+) = 1/a_N = 1 \quad \textcircled{L}$$

## • Παράδειγμα

Το χαρακτ. πολυώνυμο θα είναι  $\lambda^2 + 6\lambda + 9$ , π.ε. ρίζες  
 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ , γιατί  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$ , άρα εδώ έχουμε  
διπλή ρίζα, το  $\lambda = -3$ .

Άρα η κλαστική λύση θα είναι

$$(2) \quad h_0(t) = (c_0 + c_1 t) e^{\lambda t} = (c_0 + c_1 t) e^{-3t}, \quad t > 0$$

Η (2), λόγω των (1) δίνει

$$h_0(0^+) = c_0 \cdot e^0 = \boxed{c_0 = 0}$$

$$\begin{aligned} h_0'(0^+) &= (c_1 t e^{-3t})' \Big|_{t=0^+} = c_1 t' \cdot e^{-3t} + c_1 t \cdot (e^{-3t})' \Big|_{t=0^+} \\ &= c_1 e^{-3t} - 3c_1 t e^{-3t} \Big|_{t=0^+} = 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_1 = 1} \quad \text{Άρα εν τέλει} \quad h_0(t) = t e^{-3t}, \quad t > 0$$

- Παράδειγμα

Άρα για το αρχικό σύστημα  $\Sigma$ ,

$$h(t) = 9h_0(t) + 2h'_0(t)$$

$$\begin{cases} f(t) \delta(t) = \\ \quad \quad \quad = f(0) \delta(t) \end{cases}$$

†ε  $h_0(t) = t e^{-3t} u(t)$

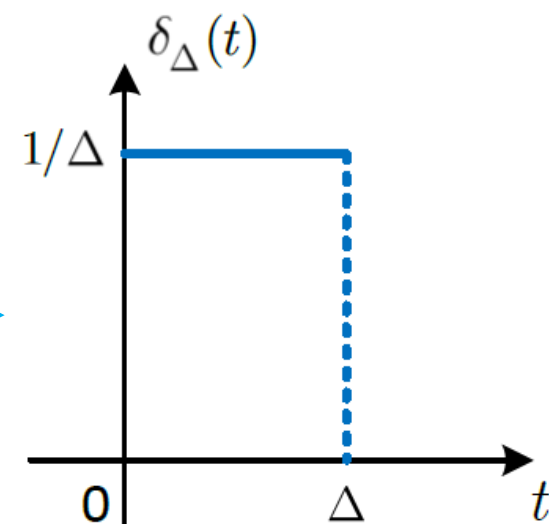
Άρα

$$\begin{aligned} h(t) &= 9t e^{-3t} u(t) + 2(t e^{-3t} u(t))' \\ &= 9 \cdot t e^{-3t} u(t) + 2(t' \cdot e^{-3t} u(t) + t(e^{-3t} u(t))') \\ &= 9t e^{-3t} u(t) + 2(e^{-3t} u(t) + t(-3e^{-3t} u(t) + e^{-3t} u'(t))) \\ &= 9t e^{-3t} u(t) + 2(e^{-3t} u(t) - 3t e^{-3t} u(t) + \underbrace{t e^{-3t} \delta(t)}) \\ &= 9t e^{-3t} u(t) + 2e^{-3t} u(t) - 6t e^{-3t} u(t) + 0 \cdot \delta(t) \\ &= 3t e^{-3t} u(t) + 2e^{-3t} u(t) \end{aligned}$$

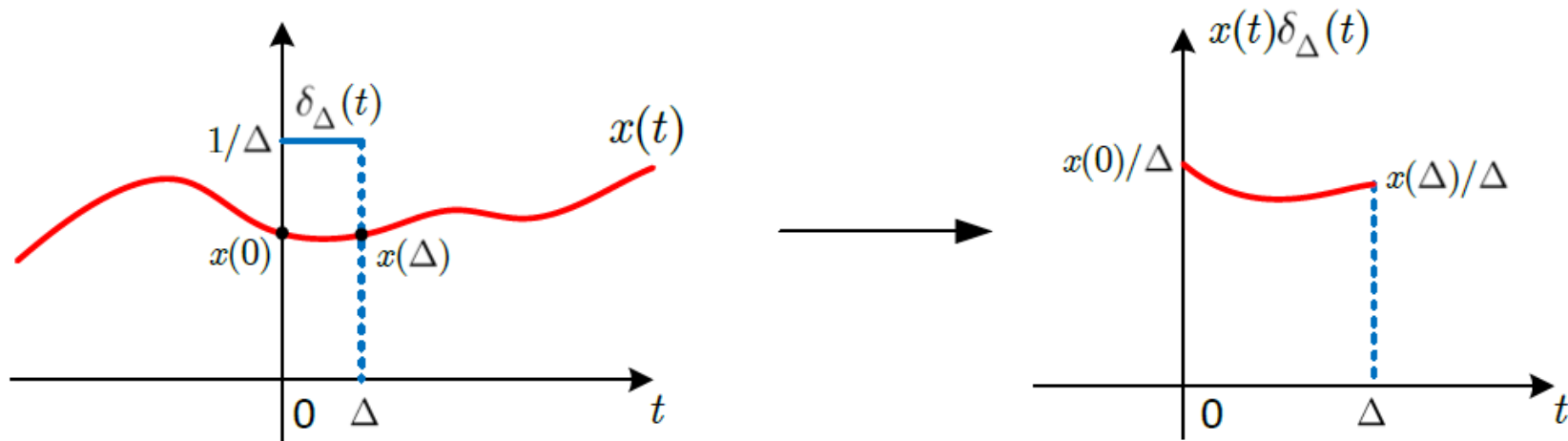
- Ας δούμε τώρα πως η κρουστική απόκριση μας χρησιμεύει στην εύρεση της εξόδου μηδενικής κατάστασης
  - Θυμίζεται ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης εξαρτάται **αποκλειστικά από την είσοδο**
- Αφού γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για είσοδο μια συνάρτηση Δέλτα, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να γράψουμε κάθε είσοδο ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα! 😊
- Έτσι, θα χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα της **γραμμικότητας** και της **χρονικής μετατόπισης** για να βρούμε την έξοδο για κάθε είσοδο!
- Ας δούμε αν αυτό είναι εφικτό...
- Ας ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και σχηματικά



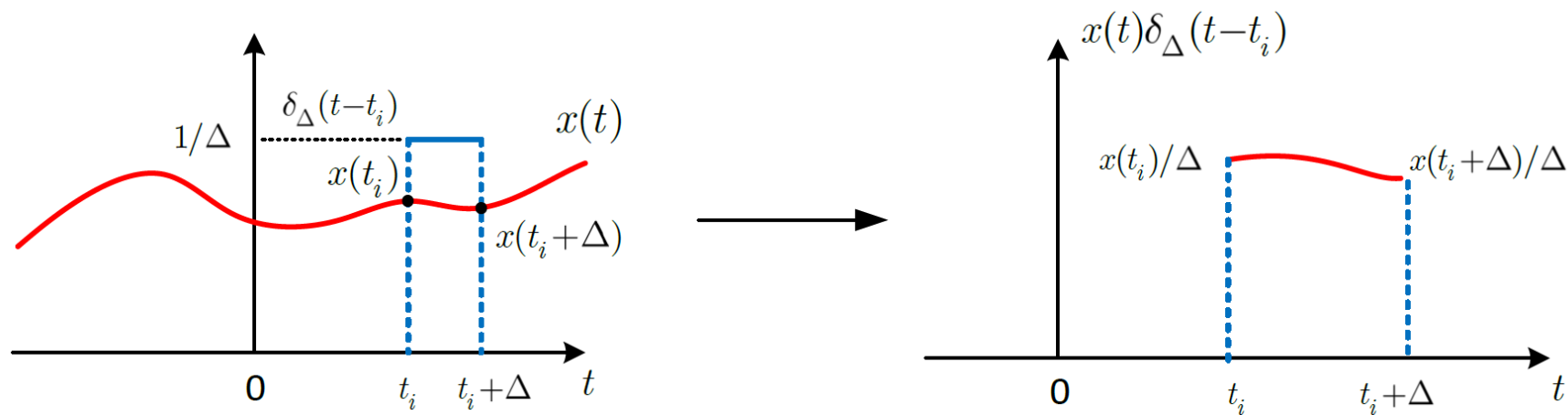
- Ας αναπαραστήσουμε το γινόμενο  $x(t)\delta_\Delta(t)$  για ένα τυχαίο σήμα  $x(t)$



- Θεωρώντας τώρα το  $\Delta$  ως πολύ μικρό, τέτοιο ώστε το τμήμα του σήματος που αποκόπτεται να θεωρείται σχεδόν σταθερό, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t) \approx \Delta x(0)\delta_\Delta(t)$$

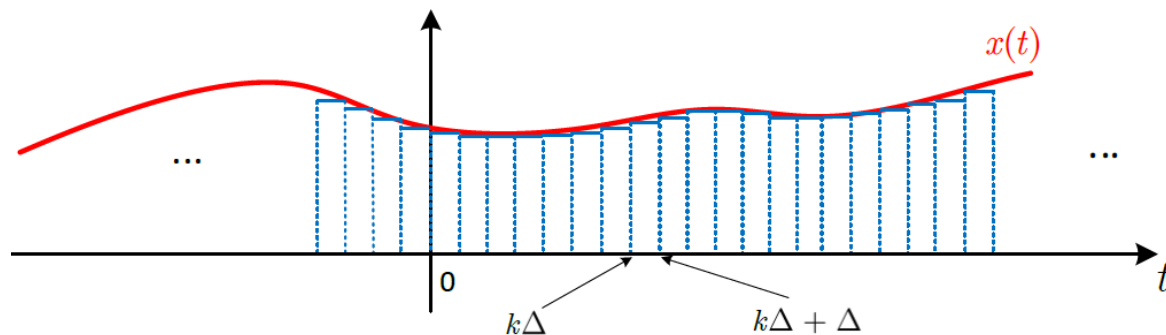
- Ας συνεχίσουμε με το γινόμενο  $x(t)\delta_\Delta(t - t_i)$



- Όμοια

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) \approx \Delta x(t_i)\delta_\Delta(t - t_i)$$

- Μπορούμε να συνεχίσουμε για όλο το σήμα  $x(t)$



- Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω τμήματα έχουμε

$$\hat{x}_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta)$$

με  $\hat{x}_\Delta(t)$  μια προσέγγιση του αρχικού σήματος  $x(t)$  η οποία εξαρτάται από την τιμή του  $\Delta$

- Όταν  $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) = x(t)$$

- Το παραπάνω όριο αποτελεί το **άθροισμα Riemann** και μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- Πέτυχαμε να γράψουμε **ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα (ολοκλήρωμα) μετατοπισμένων κατά  $\tau$  συναρτήσεων Δέλτα**, με καθεμιά να έχει «εμβαδό»  $x(\tau)$ !



- Το ολοκλήρωμα

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

είναι πολύ σημαντικό και η πράξη που εκτελεί ονομάζεται **συνέλιξη** μεταξύ του  $x(t)$  και του  $\delta(t)$

- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με τον τελεστή  $*$  :  $x(t) * \delta(t)$
- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

- Πώς βοηθά λοιπόν η σχέση που βρήκαμε για την εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
- Θυμηθείτε ότι το σύστημά μας είναι **ΓΧΑ**!

- Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

Είσοδος  $\rightarrow$  Έξοδος

- a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

- b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

- c) ομογένεια:

$$x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau)h(t - \tau)$$

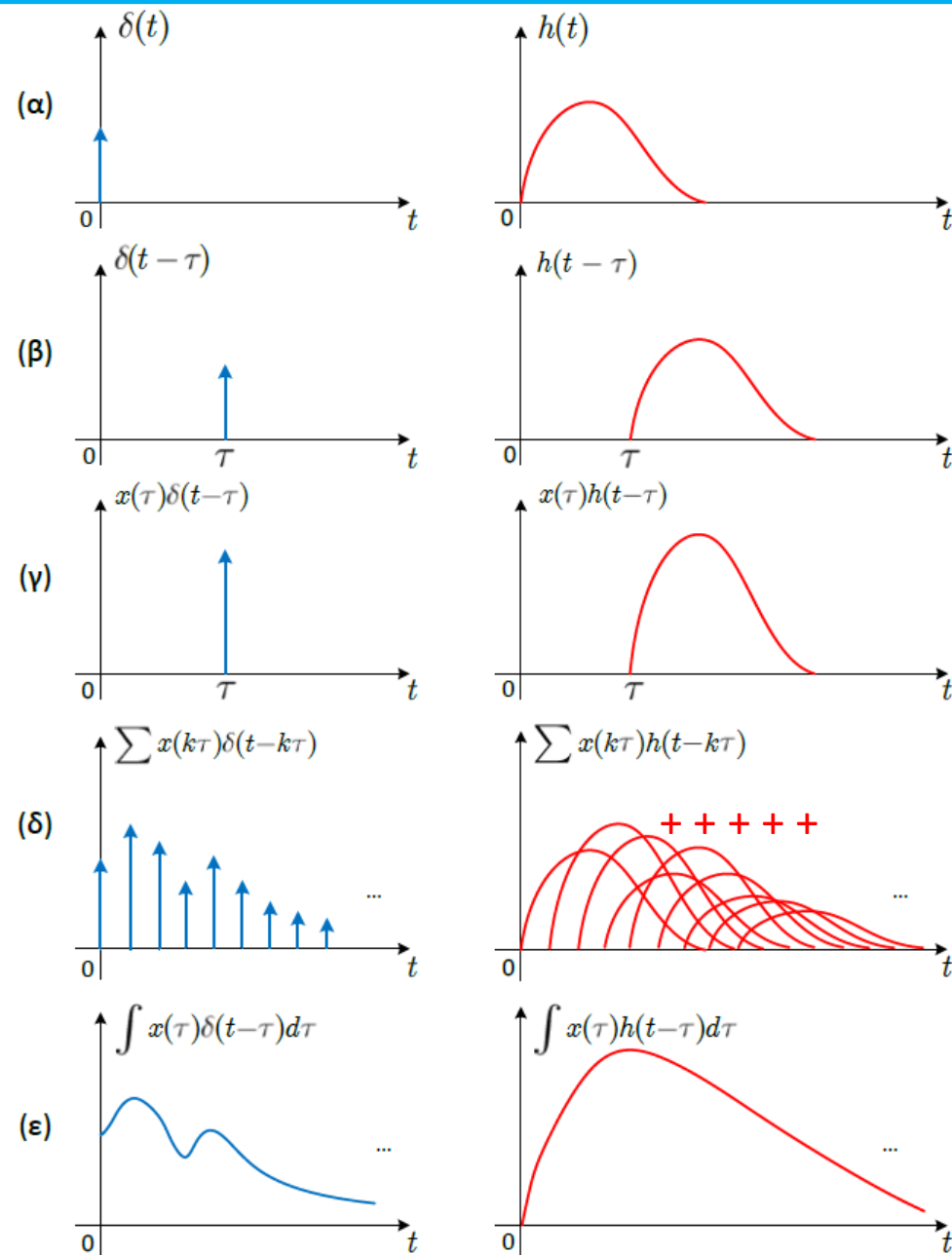
- d) αθροιστικότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

} γραμμικότητα

- e) απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

