

# HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 4<sup>Η</sup>

- Διαφορικές εξισώσεις ως συστήματα
- Απόκριση μηδενικής εισόδου



## • Συστήματα

- Πολλά φυσικά/ηλεκτρικά/μηχανικά συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις που σχετίζουν μια είσοδο  $x(t)$  με μια έξοδο  $y(t)$
- Η εκτενής μελέτη διαφορικών εξισώσεων είναι ξεχωριστό αντικείμενο
  - ...σίγουρα αποτελεί ένα μάθημα από μόνο του! 😊
- Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε κάποιες απλές διαφορικές εξισώσεις και θα συζητήσουμε ένα συγκεκριμένο τρόπο λύσης που έχει διαισθητικό νόημα από τη σκοπιά του μηχανικού
- Αργότερα, θα συζητήσουμε την έννοια της ευστάθειας και της αιτιατότητας υπό το πρίσμα συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις
- Θα δούμε επίσης πότε ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και πότε είναι χρονικά αμετάβλητο
  - ...δυο ιδιότητες που είναι τρομερά χρήσιμες στην πράξη
- Εν τέλει, θέλουμε να μπορούμε να λύνουμε διαφορικές εξισώσεις! 😊
- Ας ξεκινήσουμε! 😊

- **Συστήματα**
- **Μερικές γνωστές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις**
- **2<sup>ος</sup> Νόμος Newton**

$$F = m \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

- **Απλός αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση**

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\zeta\omega_0 \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0 x(t) = 0$$

- **Κυκλώματα RC**

$$RC \frac{d}{dt} V_{out}(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t)$$

## • Συστήματα

- Έστω ένα σύστημα εισόδου  $x(t)$  κι εξόδου  $y(t)$  που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Για να μπορέσουμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση (a.k.a να βρούμε την έξοδο  $y(t)$  για κάποια είσοδο  $x(t)$ ) χρειαζόμαστε κάποιες **βοηθητικές συνθήκες (auxiliary conditions)**
- Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε:

$$f(x) = f'(x)$$

- Γνωρίζετε ότι έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $f(x) = ce^x$ ,  $c \in \mathbb{R}$
- Χωρίς γνώση του  $c \in \mathbb{R}$  η λύση μας δεν είναι μοναδική
- Συνήθως μας δίνεται κάποια βοηθητική συνθήκη, όπως π.χ.  $f(0) = 2$
- Τότε ξέρουμε ότι  $f(x) = 2e^x$ , και η λύση μας είναι μοναδική πλέον

## • Συστήματα

- Ας μείνουμε λίγο σε αυτή τη διαφορική εξίσωση αλλά να τη γράψουμε όπως δείξαμε πριν:

$$y'(t) - y(t) = 0$$

- Η γενική λύση θα είναι

$$y(t) = ce^t$$

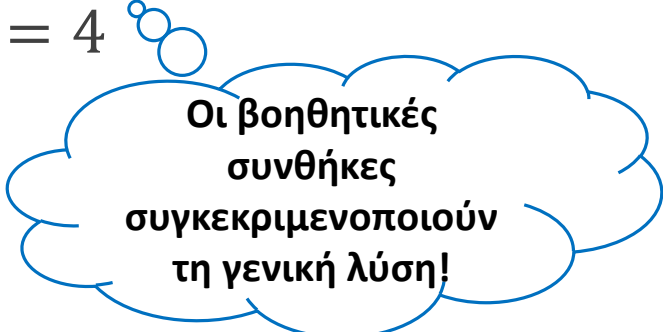
και η οποία ουσιαστικά περιγράφει άπειρες λύσεις, καθώς  $c \in \mathbb{R}$ .

- Πώς θα τη κάνουμε μοναδική? Θα χρησιμοποιήσουμε τις βοηθητικές συνθήκες!
  - ...που είναι της μορφής – όπως είπαμε πριν:  $y(0^-)$
- Για παράδειγμα, έστω  $y(0^-) = 4$ , τότε

$$y(0^-) = ce^0 = c \cdot 1 = c = 4$$

- Άρα η λύση μας γίνεται συγκεκριμένη, ως

$$y(t) = 4e^t$$



Οι βοηθητικές  
συνθήκες  
συγκεκριμενοποιούν  
τη γενική λύση!

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος, λύση) συστήματος**
- Στη γενική περίπτωση έχουμε  $N$  το πλήθος βοηθητικές συνθήκες της μορφής

$$y(0^-), y'(0^-), y''(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$$

Αρχικές  
συνθήκες!

οι οποίες ισχύουν για  $t = 0^-$ , δηλ. περιγράφουν το σύστημα **πριν** εφαρμόσουμε κάποια είσοδο, αν θεωρήσουμε ότι για  $t = 0$  εφαρμόζουμε στο σύστημά μας μια είσοδο  $x(t)$

- **Μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει για  $t > 0$**
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η έξοδος  $y(t)$  αποτελείται από το άθροισμα δυο **ανεξάρτητων** μεταξύ τους παραγόντων

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

με

☐  $y_{zi}(t)$ : την **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**

☐  $y_{zs}(t)$ : την **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος, λύση) συστήματος**
- Η απόκριση μηδενικής εισόδου περιγράφει το «κομμάτι» της εξόδου που σχετίζεται με την **κατάσταση του συστήματος πριν την εφαρμογή της εισόδου**
  - Π.χ. ο πυκνωτής είναι φορτισμένος ήδη, το ελατήριο είναι τεντωμένο και το σώμα κινείται ήδη
  - Αυτή η πληροφορία για την αρχική κατάσταση του συστήματος πρέπει κάπως να «κωδικοποιηθεί» στη διαφορική μας εξίσωση
  - Πως? Θέτοντας κατάλληλες **μη μηδενικές αρχικές συνθήκες!**
  - Σε αυτήν την απόκριση, θεωρούμε ότι **η είσοδος είναι μηδενική!**

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος, λύση) συστήματος**
- Η απόκριση μηδενικής κατάστασης περιγράφει το «κομμάτι» της εξόδου που σχετίζεται μόνο **με την εφαρμογή της εισόδου**
  - Θεωρώντας ότι η κατάσταση του συστήματος είναι «μηδενική»  $\rightarrow$  το σύστημα ηρεμεί
  - Ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, το ελατήριο σε θέση ισορροπίας, το σώμα ακίνητο
  - Σε αυτήν την απόκριση, θεωρούμε ότι οι **αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές!**
  - Αντίθετα, η **είσοδος** του συστήματος είναι **μη μηδενική!**
- Όπως προείπαμε, οι βοηθητικές συνθήκες που ορίζονται για  $t = 0^-$  λέγονται **αρχικές συνθήκες του συστήματος**

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος, λύση) συστήματος**
- Για παράδειγμα, θεωρήστε έναν απλό εξαναγκασμένο ταλαντωτή χωρίς απόσβεση
- Ξέρετε (από το HY112-Φυσική Ι, όσοι/ες συμμετείχατε) ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνησή του είναι η

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \omega_0^2 y(t) = x(t) = A \cos(\omega_f t), \quad \omega_f \neq \omega_0$$

- Με **μηδενικές αρχικές συνθήκες**, η λύση είναι της μορφής

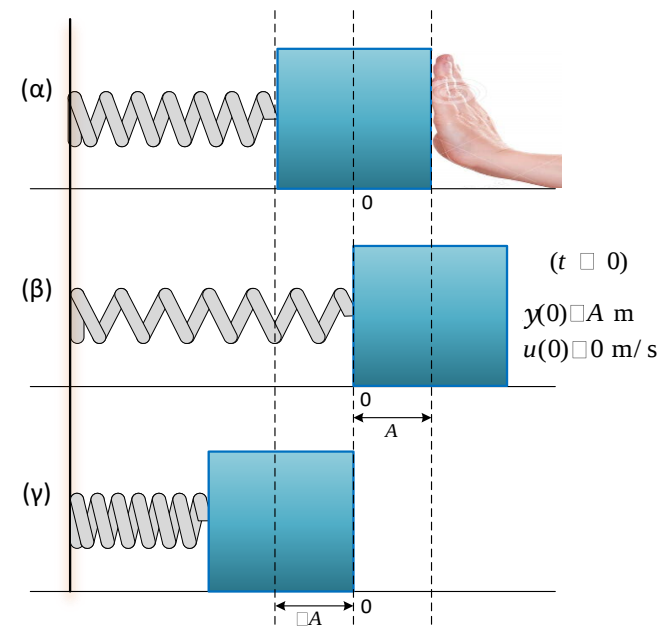
$$y(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t)$$

- Αν αρχίσουμε να μελετάμε το πρόβλημα στη θέση (β) (όπου  $t = 0$ ) τότε οι **αρχικές συνθήκες** είναι οι

$$y(0) = A, \quad u(0) = y'(0) = 0$$

- Υπό αυτές τις συνθήκες:

$$y(t) = y(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t)$$



- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου  $y_{zi}(t)$**
- Θεωρούμε ότι η είσοδος είναι μηδέν,  $x(t) = 0 \forall t$

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y_{zi}(t) = 0$$

- Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$y_{zi}(t) = ce^{\lambda t}, \quad \lambda, c \in \mathbb{C}$$

- Τότε

$$\sum_{k=0}^N a_k \left( \frac{d^k}{dt^k} ce^{\lambda t} \right) = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^N a_k \left( \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} \right) = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^N a_k (\lambda^k e^{\lambda t}) = 0$$

$$ce^{\lambda t} \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0$$

- Για να ισχύει η ισότητα πρέπει

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0$$

- **Συστήματα**

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου  $y_{zi}(t)$**

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots + a_N \lambda^N = 0$$

- Παραγοντοποιώντας το πολυώνυμο

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

- Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος
- Οι ρίζες του πολυωνύμου  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$  ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος
- Άρα υπάρχουν  $N$  διαφορετικά  $c, \lambda$  που ικανοποιούν την αρχική σχέση
- Μπορεί ναδειχθεί ότι το **άθροισμα** των αντίστοιχων εκθετικών ικανοποιεί την ίδια σχέση
- Άρα

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}, \mathbf{t > 0} \Rightarrow y_{zi}(t) = \left( \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t)$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου  $y_{zi}(t)$**
- Η παρακάτω σχέση

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}, t > 0 \Rightarrow y_{zi}(t) = \left( \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t)$$

ισχύει μόνο αν οι ρίζες  $\lambda_i$  είναι **απλές**

- Σε περίπτωση που υπάρχει **πολλαπλή** ρίζα (με πολλαπλότητα  $r$ ) στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω  $\lambda = \lambda_1$ , τότε το πολυώνυμο γράφεται ως

$$(\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) (\lambda - \lambda_{r+2}) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

και η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}(t) = \sum_{l=1}^r c_l t^{l-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{k=r+1}^N c_k e^{\lambda_k t}, \quad t > 0$$

- Σε κάθε περίπτωση, τα  $c_i$  υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες

## • Συστήματα

### • Παράδειγμα:

○ Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 0, y'(0^-) = -2$$

Για  $x(t) = 0$ , έχουμε την ομογενή εξίσωση

$$1 \frac{d^2}{dt^2} y_{zi}(t) + 5 \frac{d}{dt} y_{zi}(t) + 6 y_{zi}(t) = 0$$

Με βάση όσα είχαμε, το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο θα είναι

$$1\lambda^2 + 5\lambda + 6$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες θα είναι οι  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$ .

Άρα

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, t > 0$$

## • Συστήματα

### • Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{-2 \cdot 0} + c_2 e^{-3 \cdot 0} = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (1)$$

$$y'(0^-) = -2 \quad (2)$$

Είναι

$$y'_{zi}(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}, \quad t > 0$$

Από (2), είναι

$$y'_{zi}(0^-) = -2c_1 e^{-2 \cdot 0} - 3c_2 e^{-3 \cdot 0} = -2$$
$$= -2c_1 - 3c_2 = -2 \quad (3)$$

Από (1), (3), είναι

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ 2c_2 - 3c_2 = -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -c_2 = -2 \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{array}}$$

Άρα  $\boxed{c_1 = -2}$ . Άρα  $y_{zi}(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-3t}, \quad t > 0.$

- Συστήματα

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = A, y'(0^-) = 0$$

Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2} y_{zi}(t) + \omega_c^2 y_{zi}(t) = 0$$

Ε-ε χαρακτη. πολυώνυμο να είναι το  $\lambda^2 + \omega_c^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = +j\omega_c$ ,  $\lambda_2 = -j\omega_c$ . Άρα θα έχουμε

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{j\omega_c t} + c_2 e^{-j\omega_c t}, \quad t > 0$$

## • Συστήματα

### • Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες,  $y(0^-) = A \Leftrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = A} \quad (1)$

Είναι

$$y'_{zi}(t) = j\omega_0 c_1 e^{j\omega_0 t} - j\omega_0 c_2 e^{-j\omega_0 t}, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} y'_{zi}(0^-) &= j\omega_0 \cdot c_1 \cdot e^0 - j\omega_0 c_2 \cdot e^0 \\ &= j\omega_0 c_1 - j\omega_0 c_2 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{j\omega_0} c_1 = \cancel{j\omega_0} c_2 \Leftrightarrow \boxed{c_1 = c_2} \quad (2)$$

Από (1), (2) είναι

$$c_1 = \frac{A}{2}, \quad c_2 = \frac{A}{2}$$

Άρα

$$y_{zi}(t) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t} = A \cos(\omega_0 t), \quad t > 0.$$

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

