

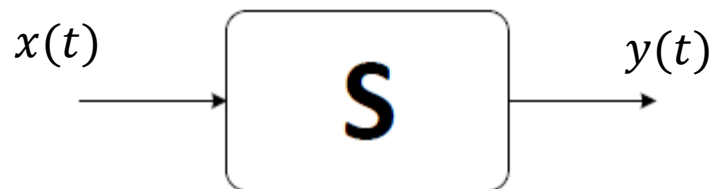
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 3^Η

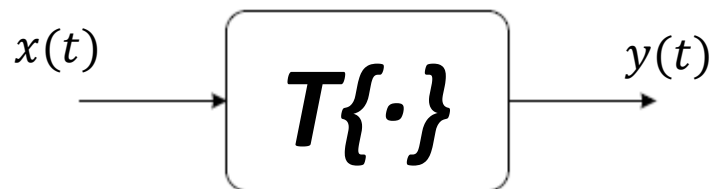
- Συστήματα



- **Σύστημα:** δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα/φυσική διεργασία κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$
- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου



- Εναλλακτικά ένα σύστημα περιγράφεται ως



με

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

και $T\{\cdot\}$ ο τελεστής του συστήματος που εφαρμόζεται στην είσοδο και παράγει την έξοδο

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα περιγράψουμε ένα σύστημα ως μια ή ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν την λειτουργία του
 - Δηλ. ως ένα **μαθηματικό μοντέλο** που μπορεί να περιγράψει ένα φυσικό, ηλεκτρικό, μηχανικό, ή όποιο άλλο σύστημα

• Συστήματα

• Μερικές σημαντικές κατηγορίες συστημάτων είναι οι ακόλουθες:

1. Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα
2. Χρονικά αμετάβλητα και χρονικά μεταβλητά συστήματα
3. Δυναμικά ή στατικά συστήματα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά συστήματα
5. Ευσταθή ή ασταθή συστήματα

• Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα **Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ)** συστήματα

- Οι υπόλοιπες ιδιότητες θα ποικίλλουν... 😊

• Συστήματα

- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα
- Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν ικανοποιεί δυο ιδιότητες
 - Την ιδιότητα της **ομογένειας** (homogeneity)
 - Την ιδιότητα της **προσθετικότητας** (additivity)
- Η ιδιότητα της **ομογένειας** λέει ότι αν

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$ax(t) \rightarrow ay(t)$$

- Η ιδιότητα της **προσθετικότητας** λέει ότι αν

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

δυο ζεύγη εισόδου-εξόδου, τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

• Συστήματα

- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

- Γραμμικότητα: αν $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ και $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, τότε το σύστημα είναι **γραμμικό** αν είναι προσθετικό και ομογενές, δηλ. αν

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

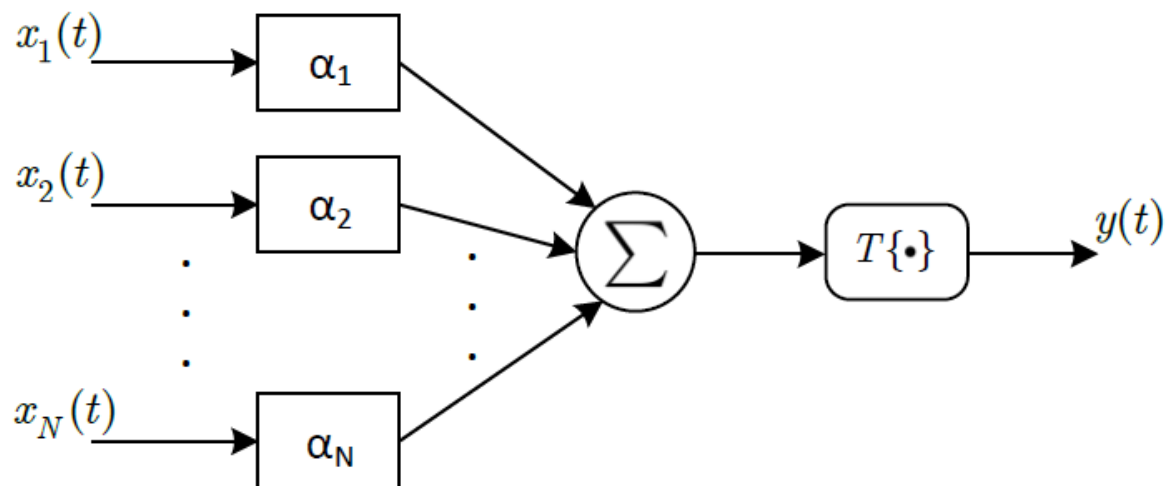
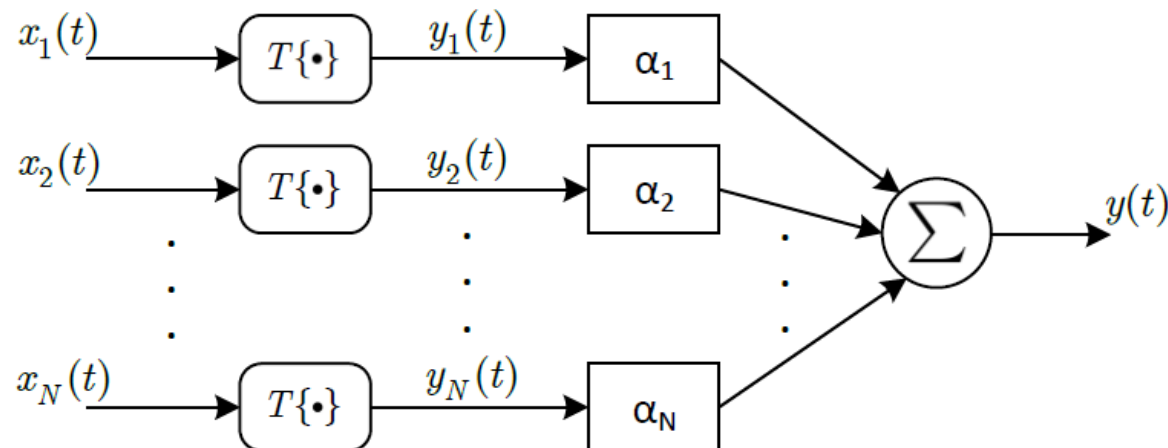
- Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι ένα *ιδανικό* σύστημα μικροφώνου-ηχείου

- Μιλώντας στο μικρόφωνο, ακούμε ακριβώς τη φωνή μας
- Αυξάνοντας της ένταση της φωνής μας (επί α), ακούμε τη φωνή μας αντίστοιχα πιο δυνατή κατά τον ίδιο παράγοντα (επί α)
- Αν μιλήσουν δυο άτομα στο μικρόφωνο, οι φωνές τους (τα σήματα εισόδου) θα προστεθούν και στην έξοδο θα ακουστούν ξανά τα δυο σήματα μαζί, σαν να ακούγαμε τον καθένα ξεχωριστά και να αθροίζαμε τις φωνές τους

- Στην πράξη, το ηχείο έχει ένα άνω όριο έντασης που μπορεί να αναπαράξει (clipping effect)

- Συστήματα

- Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα



- **Συστήματα**

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}x(2 - t) + x(t)$$

είναι γραμμικά

• Συστήματα

• Παράδειγμα:

• Ομογένεια: $\omega \quad x(t) \longrightarrow y(t) = \sqrt{x(t)}$

$$ax(t) \longrightarrow y_1(t) = \sqrt{ax(t)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x(t)}$$

$$= \sqrt{a} y(t)$$

$$\neq ay(t) \quad !$$

Άρα ΔΕΝ είναι ομογενές, άρα δεν είναι γραμμικό.

As ελέγξουμε όμως και την προσθετικότητα ...

• Προσθετικότητα: $\omega \quad x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \sqrt{x_1(t)}$
 και $x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \sqrt{x_2(t)}$

τότε $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_{12}(t) = \sqrt{x_1(t) + x_2(t)} \neq \sqrt{x_1(t)} + \sqrt{x_2(t)} =$

Άρα είναι μη-προσθετικό. $= y_1(t) + y_2(t)$

• Συστήματα

①, ② \Rightarrow Είναι γραμμικό!

• Παράδειγμα:

$$y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t)$$

• Ομογένεια: $\alpha x(t) \rightarrow y(t) = \frac{1}{2}x(2-t) + x(t)$

$\alpha ax(t) \rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}ax(2-t) + ax(t)$

$= a\left(\frac{1}{2}x(2-t) + x(t)\right) = ay(t)$

Είναι ομογενές! ①

• Προσθετικότητα: $\alpha x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(2-t) + x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}x_2(2-t) + x_2(t)$

τότε $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_{12}(t) = \frac{1}{2}(x_1(2-t) + x_2(2-t)) + (x_1(t) + x_2(t))$

$= \underbrace{\frac{1}{2}x_1(2-t) + x_1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}x_2(2-t) + x_2(t)}_{y_2(t)} = y_1(t) + y_2(t)$ ✓

Είναι προσθετικό! ②

• Συστήματα

- Πάρα πολλά πρακτικά συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- RC κύκλωμα

$$\frac{d}{dt} \Delta V_c + \frac{1}{RC} \Delta V_c = \frac{1}{R} \Delta V_s$$

- Απλός αρμονικός ταλαντωτής

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι τέτοια συστήματα είναι **γραμμικά**

- ...αν βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία
 - Ο πυκνωτής αφόρτιστος, η μάζα σε ακινησία

- Θα μας απασχολήσουν πολύ στη συνέχεια

• Συστήματα

- Χρονικά μεταβλητά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα
- Χρονική αμεταβλητότητα: αν $x(t) \rightarrow y(t)$, τότε το σύστημα είναι **χρονικά αμετάβλητο** αν

$$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$$

- Ένα απλό παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι ένα **ιδανικό** σύστημα μικροφώνου-ηχείου με **σταθερή** καθυστέρηση
 - Μιλώντας στο μικρόφωνο, ακούμε ακριβώς τη φωνή μας μετά από k δευτ/πτα
 - Αν καθυστερήσουμε να μιλήσουμε κατά λ δευτ/πτα, θα καθυστερήσουμε να ακούσουμε τη φωνή μας κατά $\lambda + k$ δευτ/πτα
 - Όμως η φωνή που θα ακούσουμε θα είναι ακριβώς το ίδιο σήμα με πριν – δε θα έχει αλλάξει κάτι άλλο
- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα που καθυστερεί την έξοδό του όσο καθυστερεί η είσοδός του είναι **χρονικά αμετάβλητο**
- Ένα χρονικά **μεταβλητό** σύστημα δίνει διαφορετικές εξόδους για διαφορετικές καθυστερήσεις της εισόδου!
 - Τόσο σε επίπεδο καθυστέρησης όσο και σε επίπεδο μορφής της εξόδου!

- **Συστήματα**
- Παράδειγμα:
- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y(t) = tx(t - 2)$$

$$y(t) = \sin(x(t + 1))$$

είναι χρονικά αμετάβλητα

- Συστήματα

- Παράδειγμα:

$$y(t) = tx(t - 2)$$

Αν $x(t) \rightarrow y(t) = tx(t - 2)$

τότε αν $x(t - t_0) \rightarrow y_1(t) = t x(t - t_0 - 2)$ ①

Επίσης, $y(t - t_0) = (t - t_0) x(t - t_0 - 2)$ ②

① \neq ② άρα το σύστημα είναι χρονικά ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ!

- Συστήματα

- Παράδειγμα:

$$y(t) = \sin(x(t+1))$$

Αν $x(t) \longrightarrow y(t) = \sin(x(t+1))$

τότε $x(t-t_c) \longrightarrow y_n(t) = \sin(x(t-t_c+1)) \quad (1)$

Επίσης, $y(t-t_c) = \sin(x(t-t_c+1)) \quad (2)$

$(1) = (2) \quad \checkmark$ άρα είναι χρονικά ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟ!

- **Συστήματα**

- Δυναμικά και Στατικά συστήματα

- Τα **δυναμικά** συστήματα απαιτούν προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = 2x(t - 1) + x(t)$$

$$y(t) = 2y(t - 2) + x(-t)$$

$$y(t) = tx(t - 1) + u(t)$$

- Τα **στατικά** συστήματα δεν απαιτούν τέτοιες τιμές, δηλ. υπολογίζουν την έξοδό μόνο από τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που βρίσκονται

- Για παράδειγμα,

$$y(t) = 2x(t)$$

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = \log_{10} |x(t)|$$

• Συστήματα

• Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα

• **Αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της τρέχουσας τιμής της εξόδου απαιτεί προηγούμενες (χρονικά) τιμές της εισόδου

- Συμπεριλαμβάνεται και η τρέχουσα χρονική στιγμή εισόδου

• Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t - 2)$$

$$y(t) = x(t) + x(t - 10)$$

$$y(t) = \frac{1}{x(t - 10^5)}$$

$$y(t) = x(t)$$

• **Μη αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τρέχουσα τιμή της εξόδου

• Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t + 2)$$

$$y(t) = \sqrt{x(t + 1)}$$

$$y(t) = y(t - 1) + 2x(t) - x(t + 4)$$

• Συστήματα

• Ευσταθή και ασταθή συστήματα

• **Ευσταθή** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει ότι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη:

$$0 \leq |x(t)| < B_x \Rightarrow 0 \leq |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \mathfrak{R}_+$$

• Για παράδειγμα,

$$y(t) = x(t - 2)$$

$$y(t) = x(t) + x(t - 10)$$

• **Ασταθή** ονομάζονται τα συστήματα που δεν ικανοποιούν την παραπάνω σχέση

• Για παράδειγμα,

$$y(t) = \frac{1}{x(t + 2)}$$

$$y(t) = \log |x(t)|$$

$$y(t) = y(t - 1) + 2x(t) - x(t + 4)$$

- Συστήματα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$\alpha) \quad y(t) = t + x(t - 2)$$

$$\beta) \quad y(t) = \sin(x(t + 1))$$

είναι ευσταθή

α) Αν $0 \leq |x(t)| < B_x$, τότε θέλω να δω το

$$|y(t)| = |t + x(t-2)| \leq |t| + \underbrace{|x(t-2)|}_{< B_x} \rightarrow +\infty, \text{ ασταθές!}$$

β) Αν $0 \leq |x(t)| < B_x$, τότε θέλω να δω τι κάνει το $|y(t)|$:

$$|y(t)| = |\sin(x(t+1))| \leq 1 = B_y, \text{ άρα ευσταθές!}$$

Συνεχίζεται...

