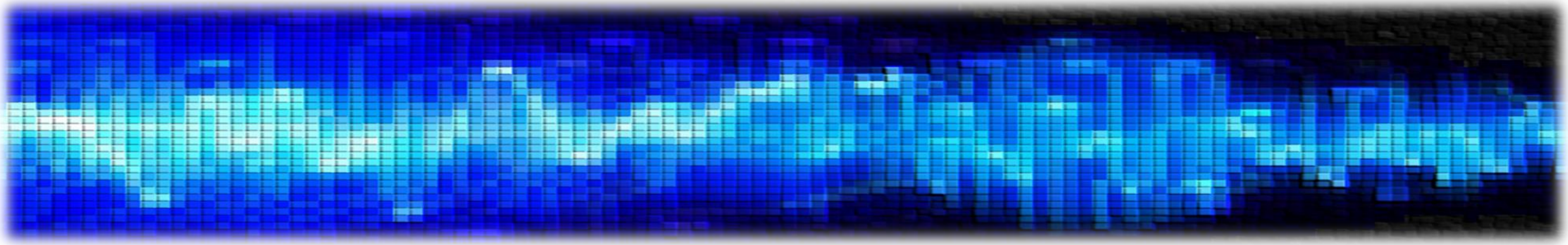
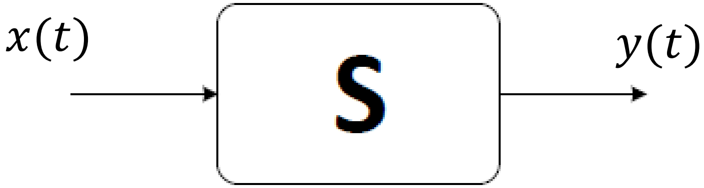
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η



- Σήματα και Συστήματα

- **Σήμα**: φορέας πληροφορίας
  - Π.χ. εικόνα, ήχος, βίντεο, σύνολο δεδομένων, κλπ.
- Στα δικά μας πλαίσια, θα θεωρούμε ένα σήμα ως μια χρονοσειρά, δηλ. μια συνάρτηση του χρόνου t
  - Η πληροφορία βρίσκεται στις μεταβολές του σήματος ως προς το χρόνο
- **Σύστημα**: δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$



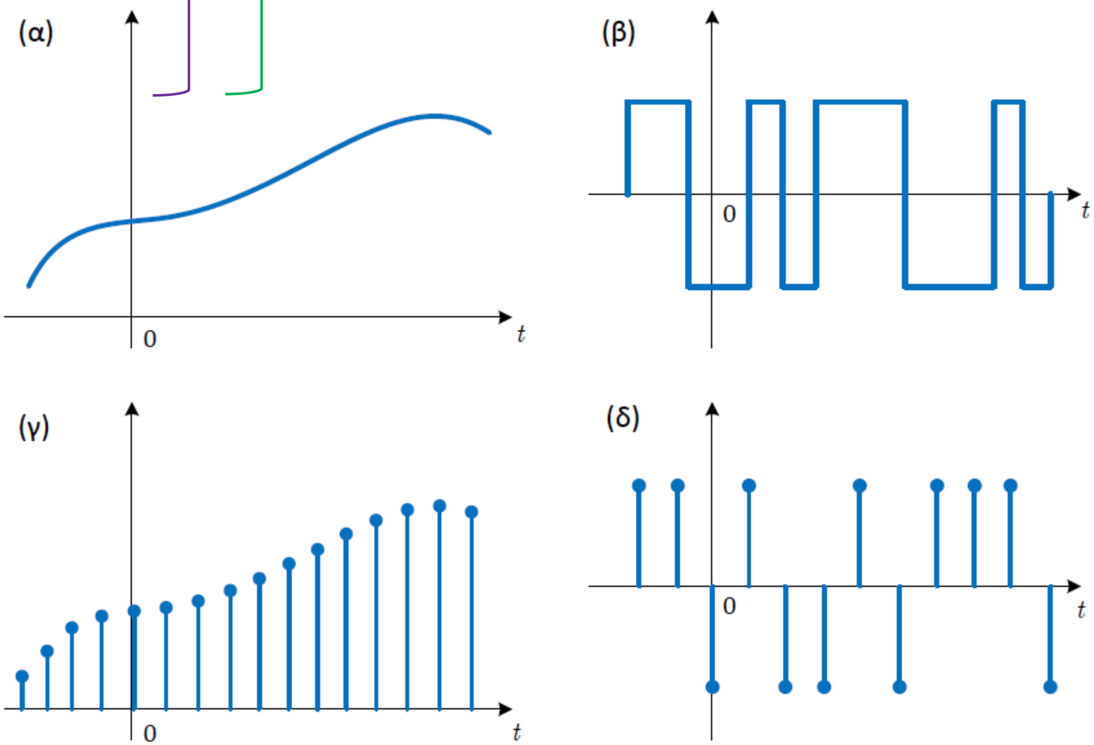
- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου
  - Υπάρχουν και συστήματα πολλαπλών εισόδων ή/και πολλαπλών εξόδων
- Ας μιλήσουμε πρώτα για τα σήματα…
  - … για τα οποία είπαμε ότι θα περιγράφουμε **ως συναρτήσεις του χρόνου – $x(t)$**

- **Σήματα**
- **<u>Κατηγορίες σημάτων:</u>**

1. Συνεχούς ή διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά ή ψηφιακά σήματα
3. Σήματα περιοδικά ή απεριοδικά
4. Σήματα ενέργειας ή ισχύος
5. Ντετερμινιστικά ή στοχαστικά

HY215

HY370



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα σήμα με έναν αριθμό
  - Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να αντιπροσωπεύει το «μέγεθος» του σήματος
- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt\,, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt\,, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Αν $0 < E_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ενέργειας
- Αν $0 < P_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!
  - Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x(t) = t^n, \qquad x(t) = e^{at}$$

  δεν είναι τίποτε από τα δυο

- **Σήματα**

- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

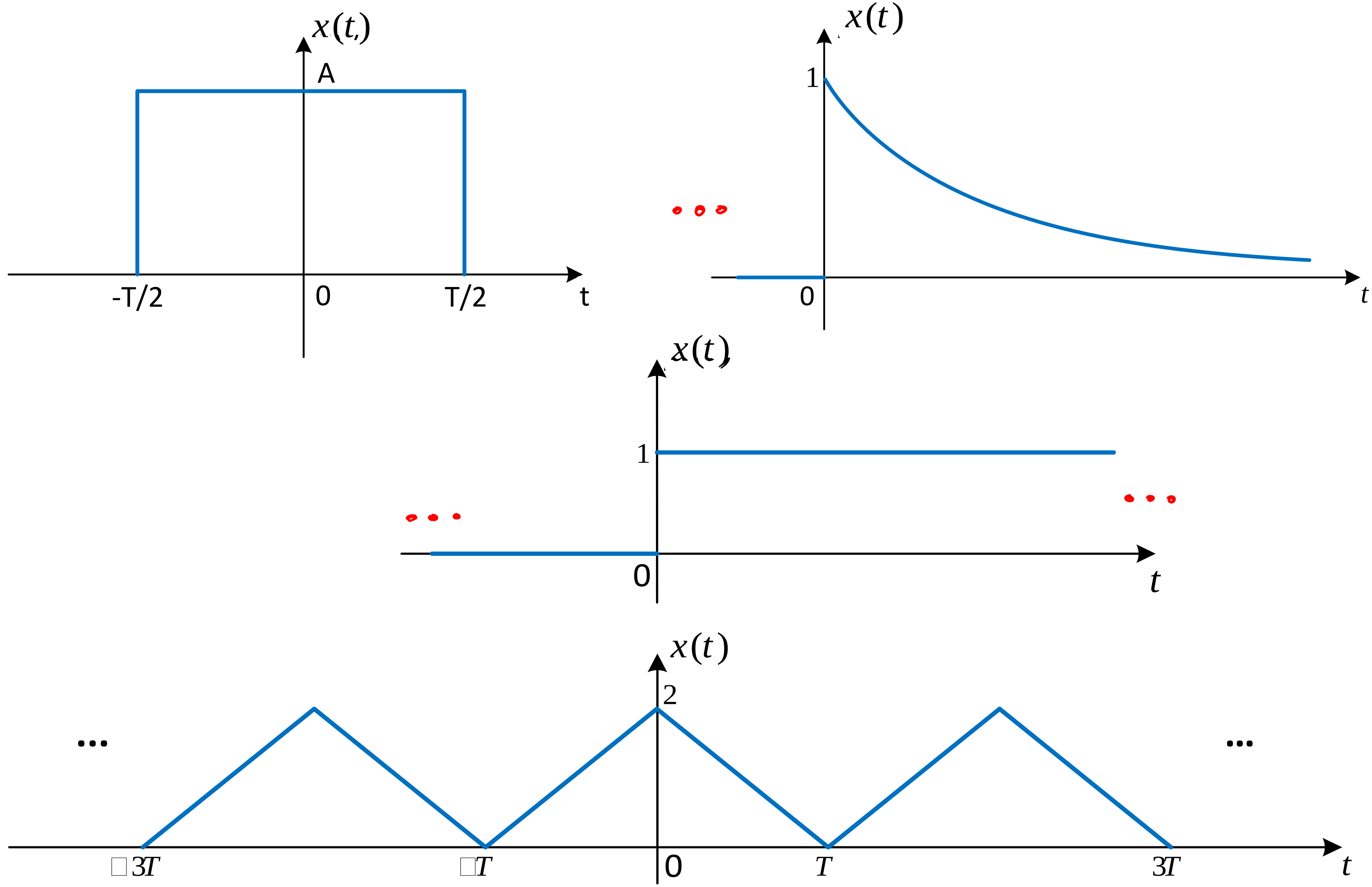
- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (εν γένει) εκ των προτέρων αν ένα σήμα είναι ενέργειας ή ισχύος (η τίποτε)
  - Υπάρχουν όμως κάποιοι «κανόνες» για να μην υπολογίζουμε κάθε φορά τυχαία μια εκ των δυο ποσοτήτων (και κάποιες φορές αναγκαστικά και τις δυο)

- **«Κανόνες»**:
  - Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == **φραγμένο πλάτος για κάθε *t***

❑ Σήμα Ενέργειας
- ✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο
- ✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$
  - ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

❑ Σήμα Ισχύος
- ✓ Άπειρης διάρκειας
- ✓ Περιοδικό

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

- Κάθε σήμα που μπορεί να φτιάξει κανείς στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση είναι σήμα **ενέργειας**

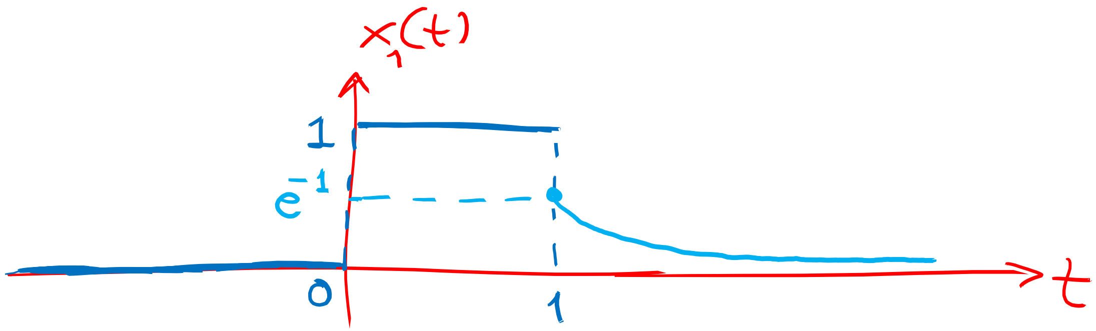
- Όμως τα σήματα ισχύος παρέχουν ένα αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για γενικότερη μελέτη σημάτων και συστημάτων

- Ας δούμε μερικά παραδείγματα

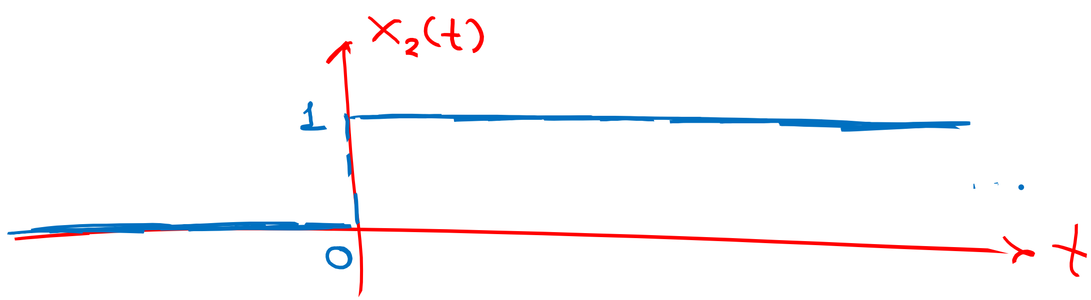
- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

- $x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$ $\qquad$ $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



Ενέργειας



Ισχύος

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα
    - $x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

Είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0^2\,dt}^{\,0} + \int_0^1 1^2\,dt + \int_1^{+\infty} \underbrace{(e^{-t})^2}_{=\,e^{-2t}}\,dt$$

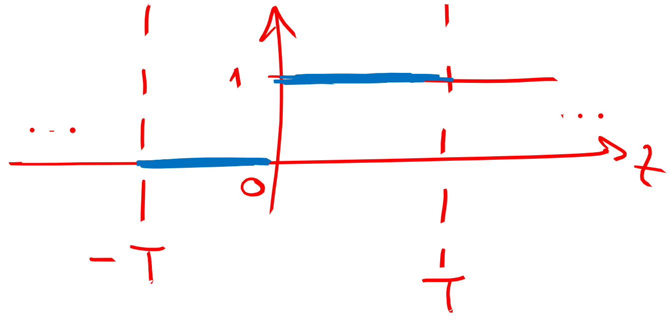
$$= \int_0^1 (t)'\,dt + \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)'\,dt = t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_1^{+\infty}$$

$$= (1-0) - \cancel{\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-2t}}^{\,0} + \frac{1}{2}e^{-2\cdot 1} = 1 - 0 + \frac{1}{2}e^{-2} = 1 + \frac{1}{2}e^{-2}.$$

Άρα

$$E = 1 + \frac{1}{2e^2}$$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα
    - $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



Είναι

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_2^2(t)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\cancel{\int_{-T}^{0} 0^2\,dt}^{\,0} + \int_{0}^{T} 1^2\,dt \right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, t \Big|_{0}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} (T - 0) = \lim_{T\to\infty} \frac{\cancel{T}}{2\cancel{T}} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$P = \frac{1}{2}$$

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας και Ισχύος**
- Μπορεί κανείς εύκολα (αλλά με κάμποσες πράξεις) να δείξει ότι

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), A \in \Re \rightarrow P_x = \frac{A^2}{2}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)\,, A_i \in \Re \rightarrow P_x = A_0^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i^2}{2}$$

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, A \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = |A|^2$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i e^{j2\pi f_i t}\,, A_i \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^{N} |A_i|^2$$

- Εξασκηθείτε αποδεικνύοντας αναλυτικά τα παραπάνω! ☺

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t

  - Χρονική ολίσθηση (time shifting)
  - Χρονική αντιστροφή (time reversal)
  - Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

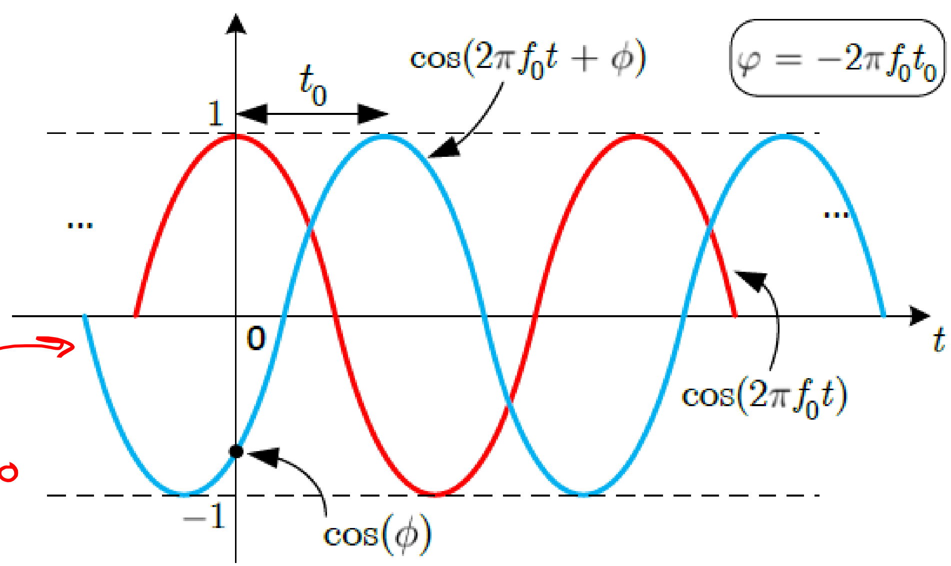
▪ Χρονική μετατόπιση/ολίσθηση (time shifting)

- Η χρονική ολίσθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη μετατόπιση του σήματος δεξιά ή αριστερά στον άξονα του χρόνου

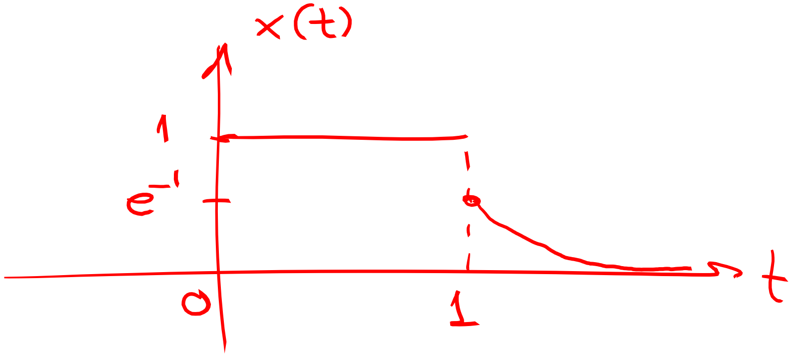
- **Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή $\boldsymbol{t}$ με τη μεταβλητή $\boldsymbol{t - t_0}$**, με t_0 θετικό ή αρνητικό
  - Αν t_0 θετικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα δεξιά → καθυστέρηση
  - Αν t_0 αρνητικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα αριστερά → προήγηση
  - Η χρονική ολίσθηση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- Θυμηθείτε τα ημιτονοειδή σήματα

έχει καθυστε-ρήσει t_0 sec σε σχέση με το κόκκινο



- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το καθυστερημένο κατά $t_0 = 2$ σήμα για το παρακάτω σήμα
    - $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

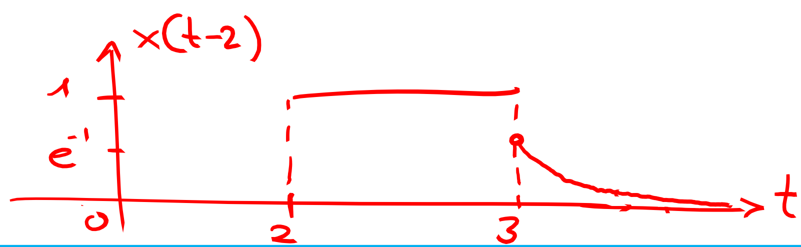


και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

Αντικαθιστώ $t \leftarrow t-2$

Είναι

$$x(t-2) = \begin{cases} 0, & t-2 < 0 \\ 1, & 0 < t-2 < 1 \\ e^{-(t-2)}, & t-2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ e^{-(t-2)}, & t > 3 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

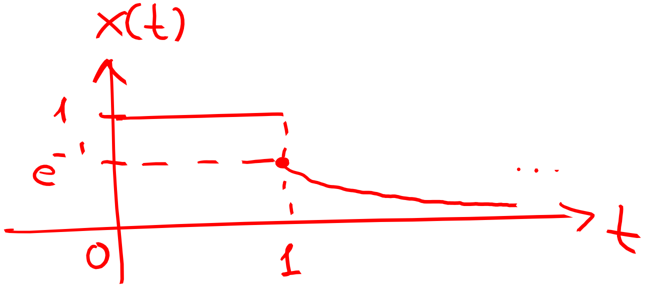
▪ Χρονική αντιστροφή (time reversal)

- Η χρονική αντιστροφή δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- **Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $-t$**

  - Αν το σήμα «ζει» στο θετικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στον αρνητικό ημιάξονα
  - Αν το σήμα «ζει» στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στο θετικό ημιάξονα
  - Αν το σήμα «ζει» και στους δυο άξονες, τότε το τμήμα του θετικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στον αρνητικό ημιάξονα και το τμήμα του αρνητικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στο θετικό ημιάξονα
  - Η χρονική αντιστροφή ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

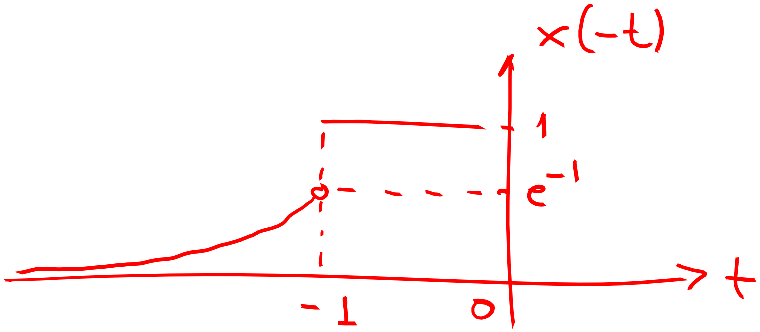
- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το σήμα $x(-t)$ για το παρακάτω σήμα
    - $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$

και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.



Αντικαθιστώ $t := -t$

$$x(-t) = \begin{cases} 0, & -t < 0 \\ 1, & 0 < -t < 1 \\ e^{-(-t)}, & -t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ e^{+t}, & t < -1 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

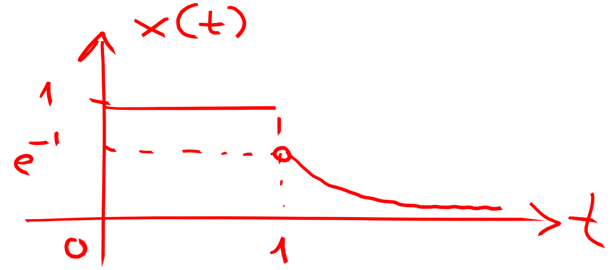
▪ Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

- Η χρονική κλιμάκωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη συμπίεση ή την επέκταση του σήματος στον άξονα του χρόνου
- **Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή at,** $\alpha \in \Re_{+}$
  - Αν το σήμα «ζει» στο διάστημα $[c, d]$, τότε η κλιμάκωση κατά $a \neq 1$ θα το «μεταφέρει» στο διάστημα $[c/a, d/a]$
  - Αν ο παράγοντας κλιμάκωσης είναι αρνητικός, γίνεται χρονική αντιστροφή παράλληλα με τη χρονική κλιμάκωση
  - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

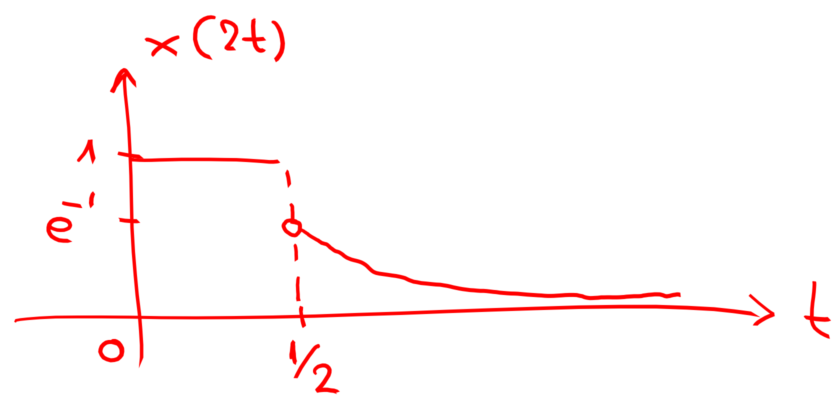
○ Βρείτε τα σήματα $x(2t)$ και $x\left(\frac{t}{3}\right)$ για το παρακάτω σήμα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



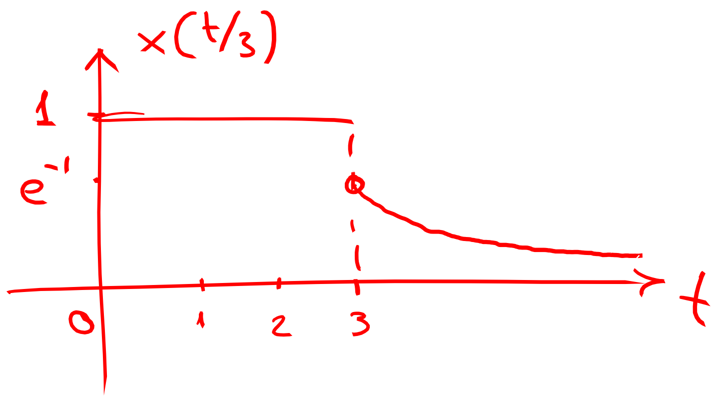
και σχεδιάστε τα όλα.

- $x(2t) = \begin{cases} 0, & 2t < 0 \\ 1, & 0 < 2t < 1 \\ e^{-2t}, & 2t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ e^{-2t}, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$



- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

- $$x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{t}{3} < 0 \\ 1, & 0 < \frac{t}{3} < 1 \\ e^{-t/3}, & \frac{t}{3} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 3 \\ e^{-t/3}, & t > 3 \end{cases}$$



~> Αν $a > 1$, το σήμα "συμπιέζεται" στο χρόνο

~> Αν $0 < a < 1$, —||— "επιμηκύνεται" στο χρόνο

- **Σήματα**
- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**

- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες

- Αυτά είναι:

❑ **Η βηματική συνάρτηση**

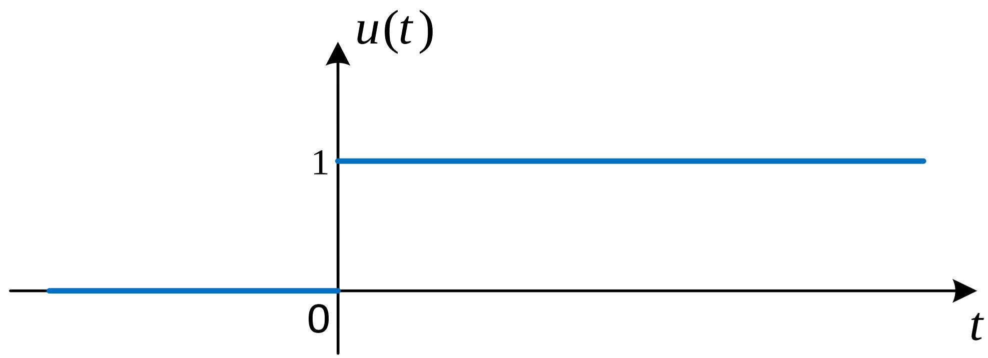
❑ **Ο τετραγωνικός παλμός**

❑ **Ο τριγωνικός παλμός**

❑ **Η κρουστική συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα**

- **Σήματα**
- **Η βηματική συνάρτηση**
- Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

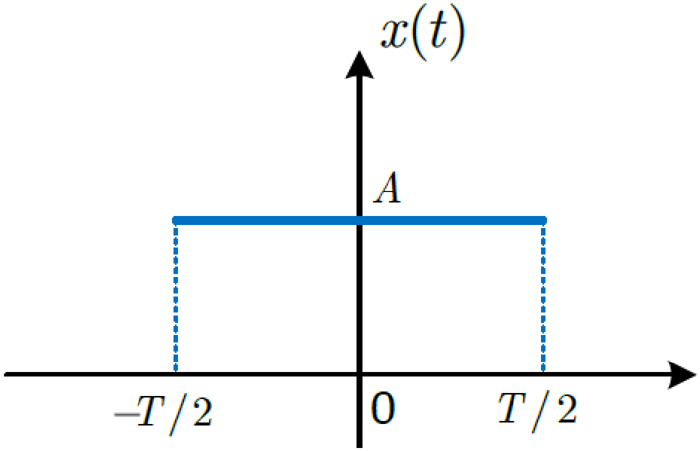
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



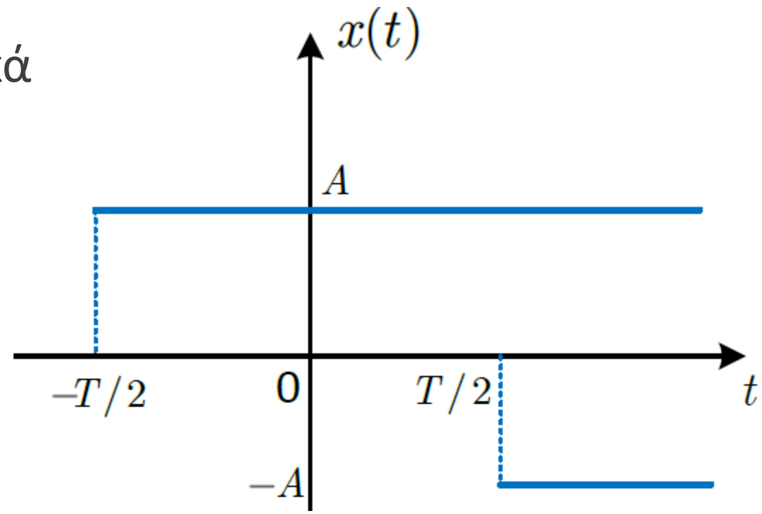
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές της είναι ως σήμα-διακόπτης (off-on)
  - δηλ. ως ένα ιδανικό μοντέλο ενός σήματος που πάει από 0 → 1 ακαριαία
- …ή για **να «κόψουμε» τμήματα άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς την με αυτά**
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τη βηματική συνάρτηση
  - …εκτός από τη διαίρεση σήματος με τη βηματική (διαίρεση με μηδέν)

- **Σήματα**
- **Ο τετραγωνικός παλμός**
- Ο τετραγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A, & -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \end{cases} = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

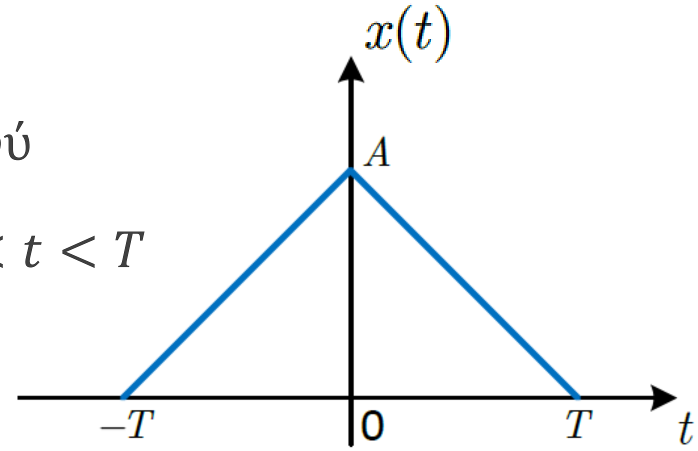


- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για **να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά**
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τετραγωνικό παλμό
  - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)
- Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών συναρτήσεων
  - ...όπως στο σχήμα



- **Σήματα**
- **Ο τριγωνικός παλμός**
- Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως

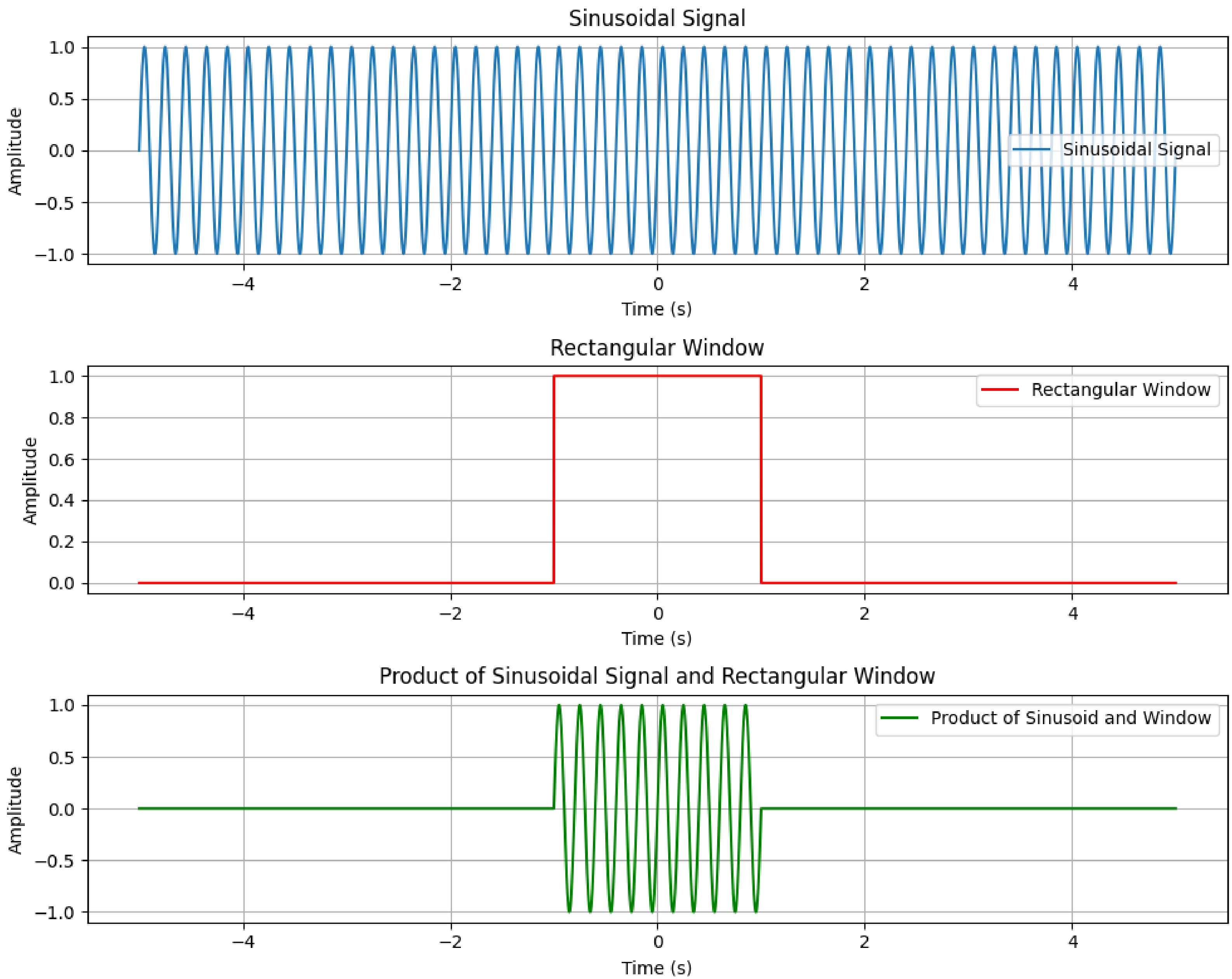
$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A\left(1 - \dfrac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases}$$
$$= A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$



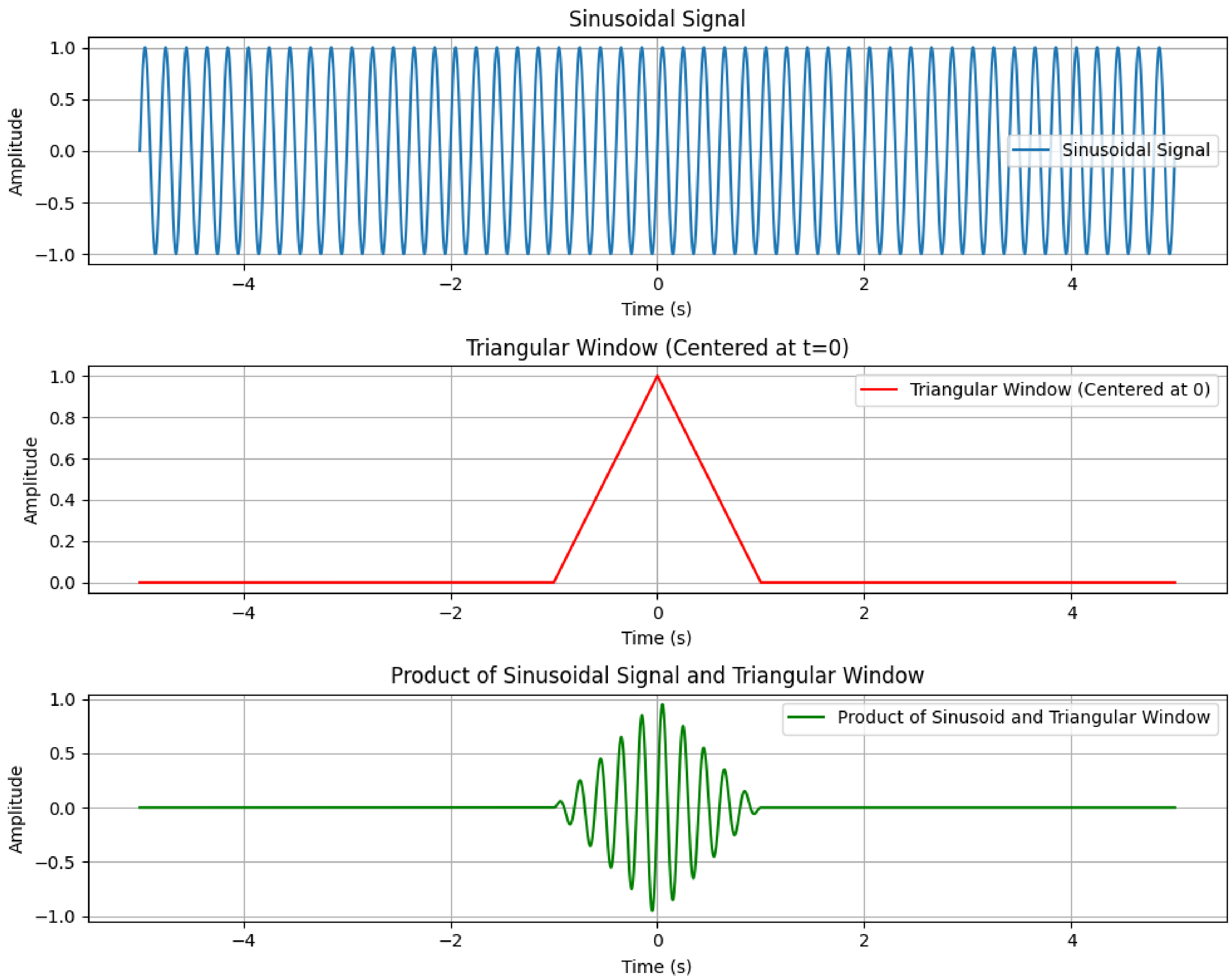
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για **να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά**
  - ...αλλά δίνοντας περισσότερο βάρος στις τιμές του σήματος στο κέντρο του παλμού
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τριγωνικό παλμό
  - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

- Προσέξτε ότι στον συνοπτικό τύπο του παλμού ο παρονομαστής T είναι η **μισή** διάρκεια του, ενώ στον τετραγωνικό παλμό ο παρονομαστής T ήταν **όλη** η διάρκεια!

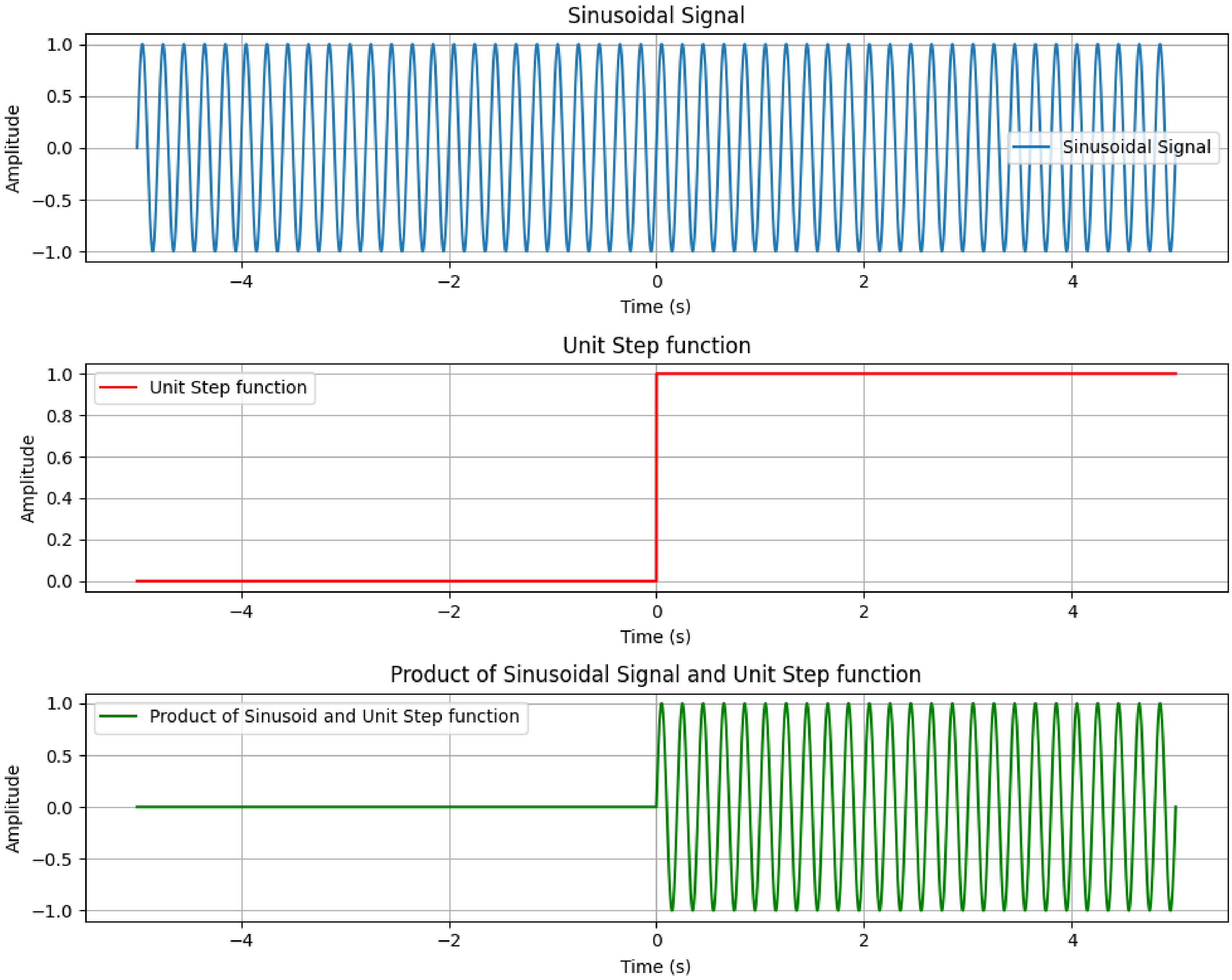
• Σήματα


Sinusoidal Signal
Amplitude
Time (s)
Sinusoidal Signal
Rectangular Window
Amplitude
Time (s)
Rectangular Window
Product of Sinusoidal Signal and Rectangular Window
Amplitude
Time (s)
Product of Sinusoid and Window

- **Σήματα**


Sinusoidal Signal
Amplitude
Time (s)
Sinusoidal Signal
Triangular Window (Centered at t=0)
Amplitude
Time (s)
Triangular Window (Centered at 0)
Product of Sinusoidal Signal and Triangular Window
Amplitude
Time (s)
Product of Sinusoid and Triangular Window

- **Σήματα**


Sinusoidal Signal
Amplitude
Time (s)
Sinusoidal Signal
Unit Step function
Amplitude
Time (s)
Unit Step function
Product of Sinusoidal Signal and Unit Step function
Amplitude
Time (s)
Product of Sinusoid and Unit Step function

- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:

○ Σχεδιάστε τα σήματα:

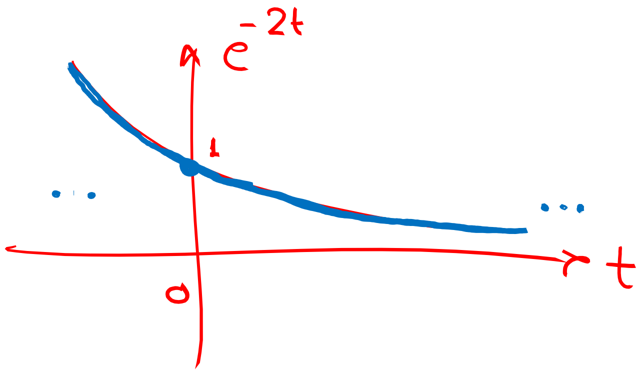
(α΄) $e^{-2t}u(t-2)$

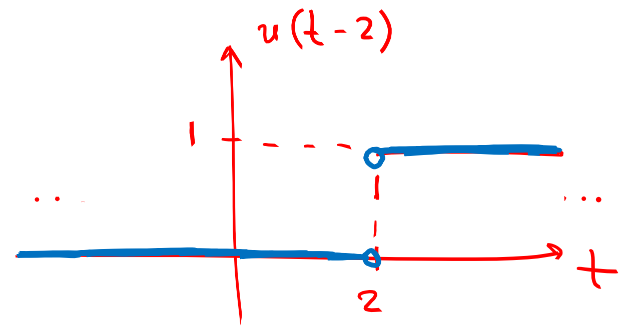
(β΄) $u(t^2-4)$

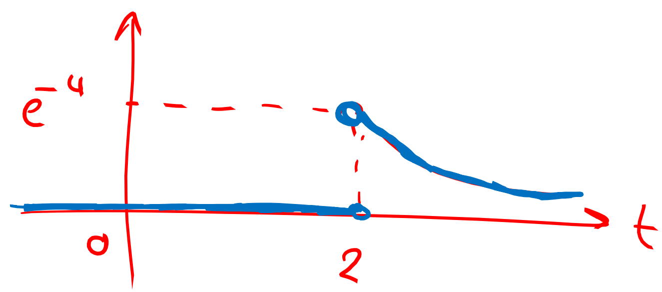
(γ΄) $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

(δ΄) $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

α)

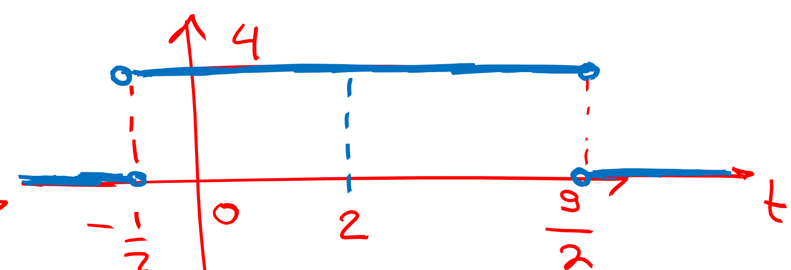






$e^{-2t}u(t-2)$

γ) $\underset{A}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\overset{t_0=2}{2}}{\underset{T}{5}}\right)$



- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:
  - Σχεδιάστε τα σήματα:

(α) $e^{-2t}u(t-2)$

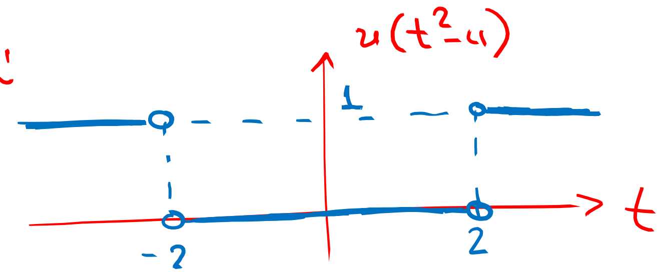
(β) $u(t^2-4)$

(γ) $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

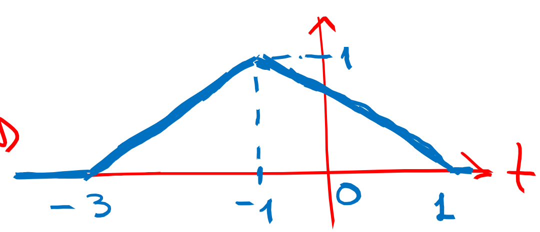
(δ) $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

β) $u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \sim u(t^2-4) = \begin{cases} 1, & t^2-4>0 \\ 0, & t^2-4<0 \end{cases} =$

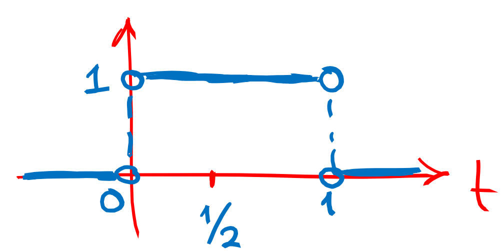
$= \begin{cases} 1, & (t+2)(t-2)>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t<-2 \text{ ή } t>2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



δ) $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) \sim$



$\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) \sim$



- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:
  - Σχεδιάστε τα σήματα:

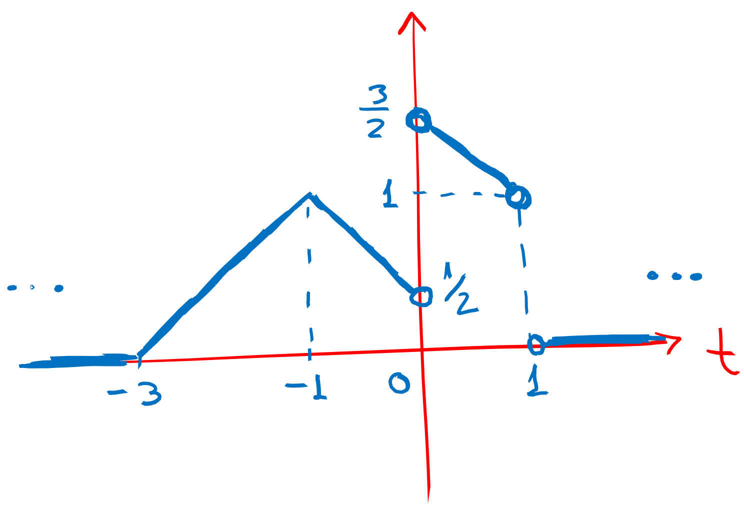
(α') $e^{-2t}u(t-2)$

(β') $u(t^2-4)$

(γ') $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

(δ') $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

Άρα



Αυτή η "αυστηρή" σχεδίαση των σημάτων, με σημειωμένες τις ασυνέχειές τους κλπ <u>ΔΕΝ</u> θα χρησιμοποιηθεί στο εξής.
Θα σχεδιάζουμε πιο απλοποιημένα τα σήματά μας

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ, ***αλλά με σταθερό μοναδιαίο εμβαδό***, τι θα κάναμε?
  - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$

  - ...και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon \to 0} p(t)$

- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία:

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

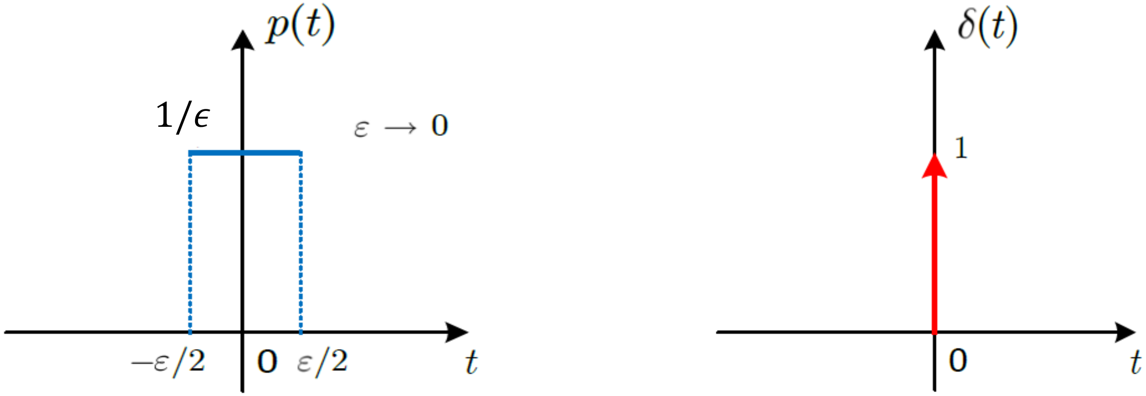
όταν $\epsilon \rightarrow 0$

- Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **κρουστική συνάρτηση Δέλτα** – ή απλά **συνάρτηση Δέλτα** στο εξής – και γράφεται ως $\delta(t)$
  - Η συνάρτηση Δέλτα **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση – είναι **κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση**!
- Η συνάρτηση Δέλτα λοιπόν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω
- Παρατηρήστε τη σχεδίαση της συνάρτησης Δέλτα

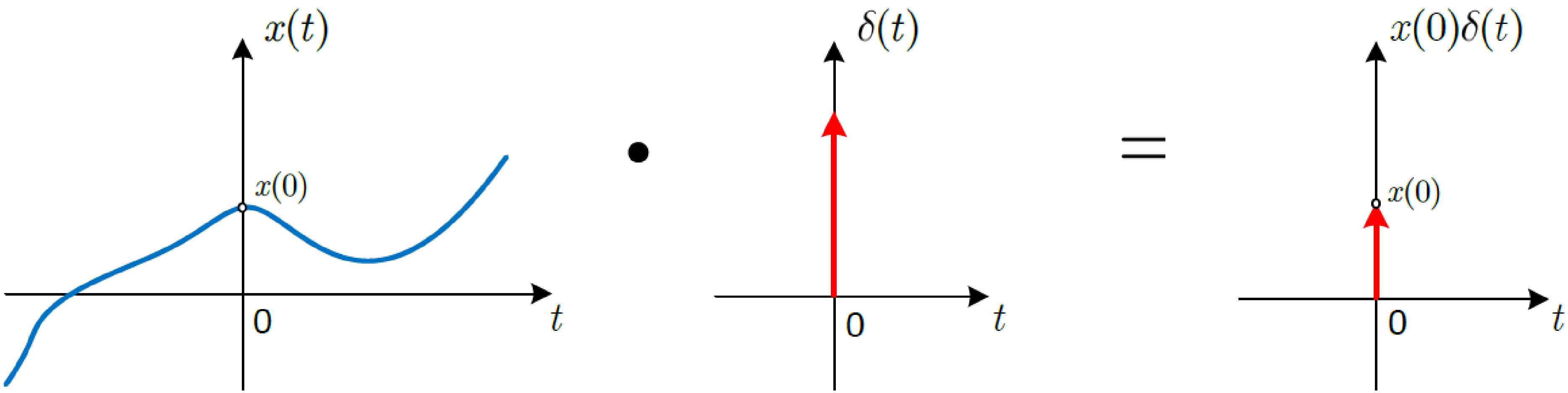


- Προσέξτε ότι το 1 στη «μύτη» της συνάρτησης Δέλτα **δεν** είναι το πλάτος της!
  - Αυτό είναι άπειρο!
- Είναι η τιμή του «εμβαδού» της («επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση»)
- Οι πράξεις που επιτρέπονται με τη συνάρτηση Δέλτα είναι πρόθεση, αφαίρεση, και πολλαπλασιασμός με συνεχή συνάρτηση. Οι μετασχηματισμοί που είδαμε επιτρέπονται όλοι (με μια ιδιότητα να μας διευκολύνει στη χρονική κλιμάκωση)

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Αν πολλαπλασιάσουμε ένα συνεχές σήμα με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία «ζει» τη χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε ουσιαστικά αλλάζουμε το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ουσιαστικά η παραπάνω πράξη **δειγματοληπτεί** το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0
- Σχηματικά:

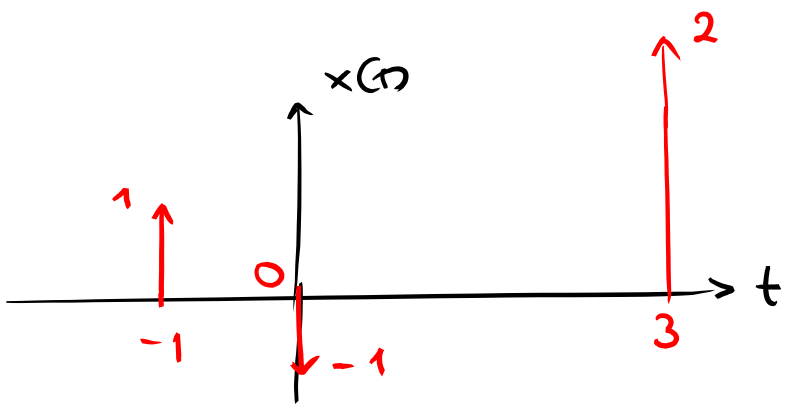


- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Η προηγούμενη ιδιότητα μας βοηθά να ορίσουμε σήματα που έχουν τιμές μόνο για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -1 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$= 1\delta(t+1) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3)$$

- Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση της δειγματοληψίας, περιμένουμε να λάβουμε την «περιοχή κάτω από την επιφάνεια» $x(t)\delta(t-t_0)$...
  - ... η οποία είναι $x(t_0)$
- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Μερικές ακόμα ιδιότητες που μπορείτε να αποδείξετε είναι οι:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \qquad a \neq 0$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Υπολογίστε τα

$$\underbrace{(3t^2+1)}_{x(t)}\delta(t) = (3t^2+1)\Big|_{t=0}\cdot\delta(t) = (3\cdot 0^2+1)\cdot\delta(t) = \delta(t)$$

$$\underbrace{(t^2+\cos\pi t\,)}_{x(t)}\delta(t-1) = (t^2+\cos(\pi t))\Big|_{t=1}\cdot\delta(t-1) = 0\cdot\delta(t-1) = 0$$

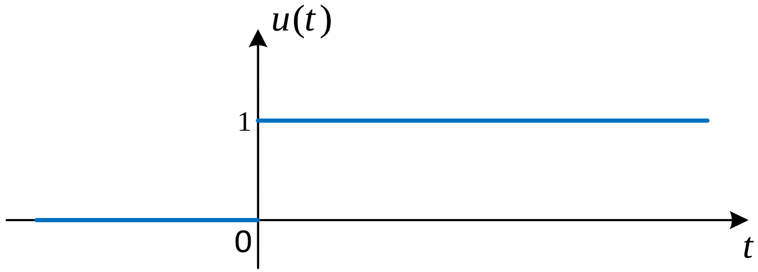
$$\underbrace{e^{-t}}_{x(t)}\delta(2t) = e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t}\right)\Big|_{t=0}\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$

$$\underbrace{t}_{x(t)}\delta(t) = t\Big|_{t=0}\delta(t) = 0\cdot\delta(t) = 0$$

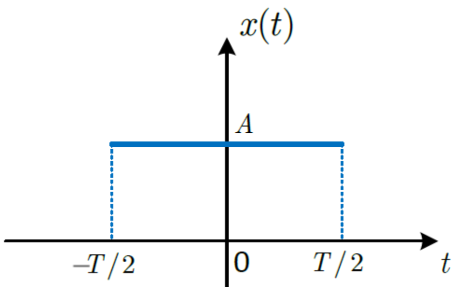
$$\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}\,\delta(t-\pi) = \cos(t)\Big|_{t=\pi}\cdot\delta(t-\pi) = (-1)\cdot\delta(t-\pi) = -\delta(t-\pi)$$

- **Σήματα – Review**

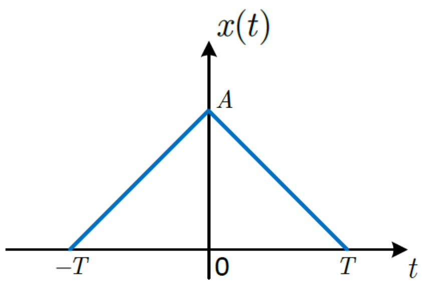
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} = A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases} = A\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

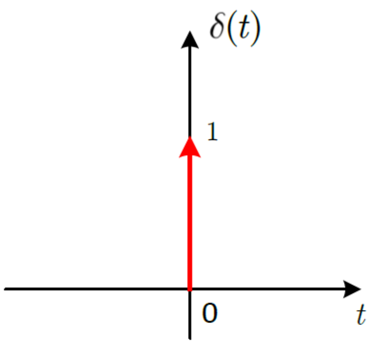


$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$



- **Σήματα**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(3t^2+1)}_{x(t)}\delta(t-1)dt = x(t)\Big|_{t=1} = (3t^2+1)\Big|_{t=1} = 4$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{(3t^2+1)}_{x(t)}\delta(t)dt = (3t^2+1)\Big|_{t=0} = 1$$

$$\int_{1}^{6} \underbrace{(\log_{10} t^{20})}_{x(t)}\delta(t+3)dt = 0 \quad !$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+\cos \pi t\,)\delta(t-1)dt = (t^2+\cos(\pi t))\Big|_{t=1} = 1-1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\delta(2t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t)\,dt = e^{0}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Η (ήδη!) γνωστή μας βηματική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική
  - Έχει άραγε παράγωγο? Αν ναι, ποια είναι αυτή?
- Από τον ορισμό της

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η παράγωγός της είναι παντού μηδέν εκτός από τη στιγμή $t = 0$, όπου δεν ορίζεται παράγωγος

- Αλλιώς, η παράγωγος είναι άπειρη

- Άρα μια «γενικευμένη» έννοια της παραγώγου της βηματικής συνάρτησης θα ικανοποιούσε την ιδιότητα

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

- Επίσης από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} u'(t)dt = u(\epsilon) - u(-\epsilon) = 1 - 0 = 1$$

για $\epsilon > 0$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Συνολικά

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) dt = 1$$

- Μα αυτές οι ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα!
- Άρα η (γενικευμένη) **παράγωγος** της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα:

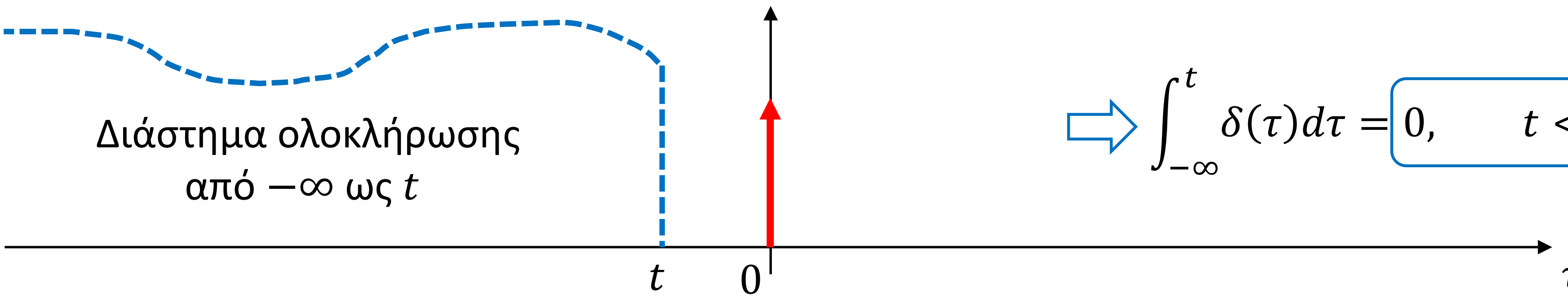
$$u'(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

- Άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η:

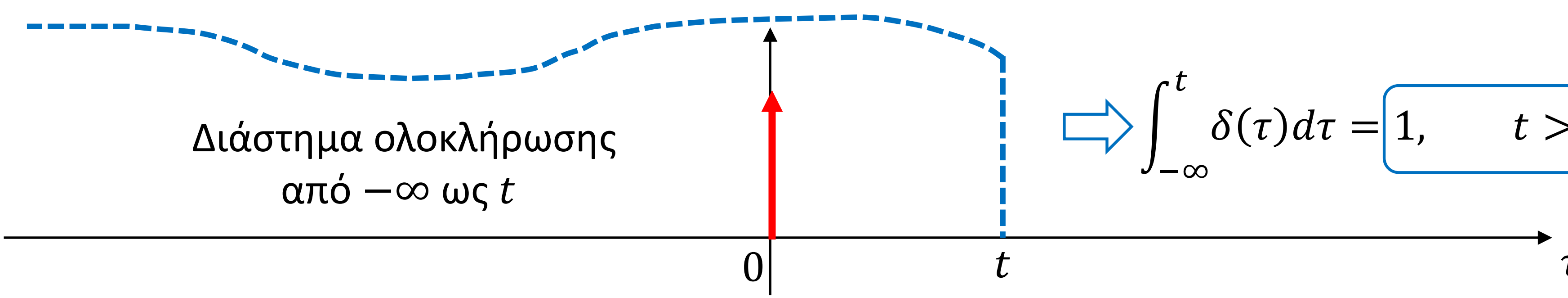
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \boxed{u(t)}$$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \boxed{0, \quad t < 0}$$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \boxed{1, \quad t > 0}$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σύνοψη:

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα	
Ορισμός	$\delta(t) = 0,\ t \neq 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{\lvert a \rvert},\quad a \in \Re - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$
Παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = -\frac{d}{dt}x(t)\Big\rvert_{t=0}$
$n-$οστή παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t)\,dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(t)\Big\rvert_{t=0}$

Τέλος Διάλεξης