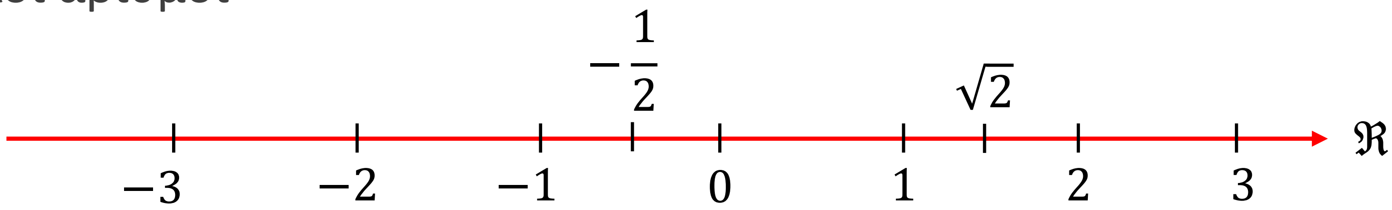
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η

- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

- Πραγματικοί αριθμοί



- Λύσεις εξισώσεων:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \in \Re$$

- Κάποιες εξισώσεις δεν έχουν λύση στο $\Re$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \ldots ?$$

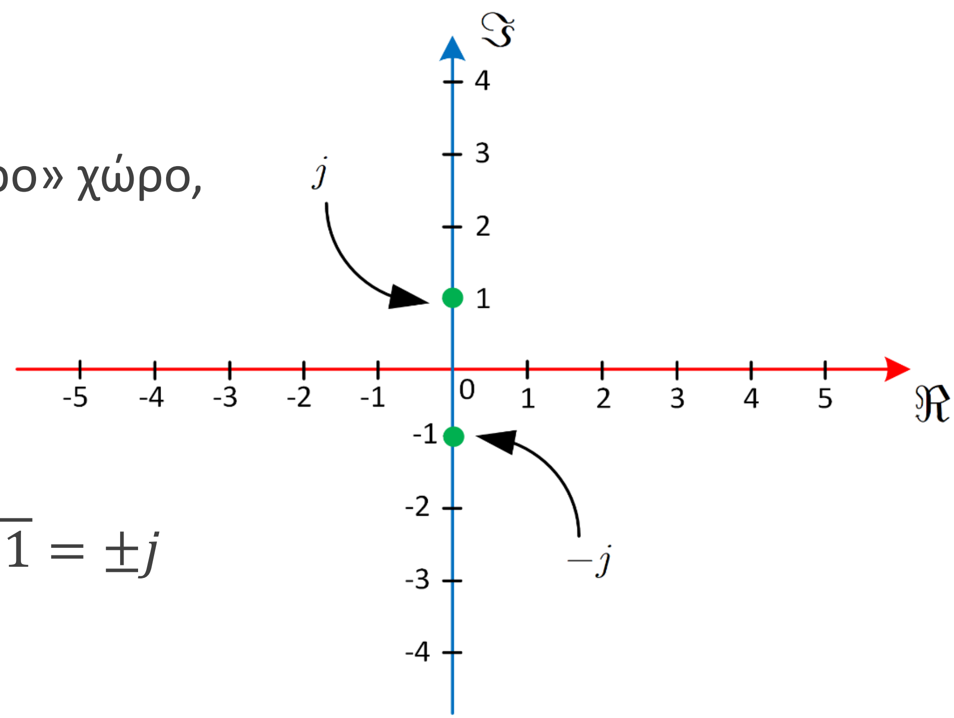
- Μπορούν να έχουν λύση σε ένα «ευρύτερο» χώρο, που περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα

- Ο χώρος αυτός λέγεται χώρος των ***μιγαδικών αριθμών* - $\mathbb{C}$**

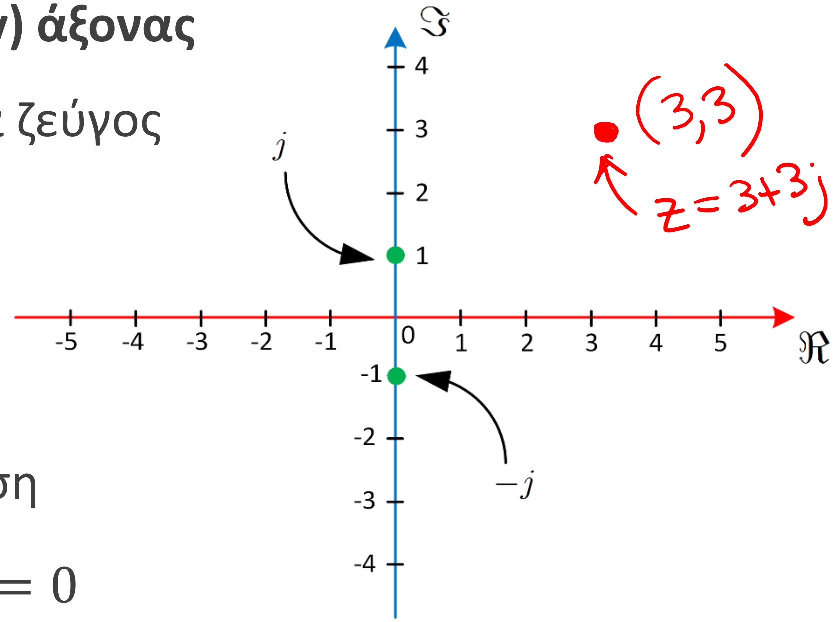
- Λύση:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$

με $\boldsymbol{\sqrt{-1} = j}$ τη **φανταστική μονάδα**



- Οι άξονες που συντελούν στη δημιουργία του μιγαδικού επιπέδου ονομάζονται **πραγματικός (real) και φανταστικός (imaginary) άξονας**



- Κάθε σημείο αυτού του επιπέδου αποτελεί ένα ζεύγος αριθμών (x, y)

- Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό γράφεται ως $z = x + jy$ και ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number)**

- Ας δούμε μια εύκολη εφαρμογή: έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης

- Όλα τα παραπάνω στο χώρο των πραγματικών αριθμών!

- Αν λύσουμε την εξίσωση στο χώρο των μιγαδικών αριθμών τότε το πράγμα αλλάζει! Ας δούμε πως:

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές (**μιγαδικές**) ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Οπότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Παράδειγμα:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x + 5$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

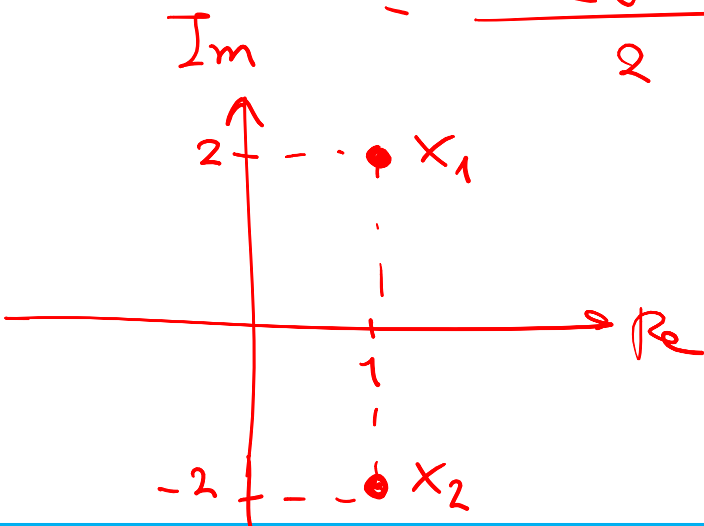
Έχουμε δυο μιγαδικές ρίζες!

Είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-2) \pm j\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm j4}{2}$$

$\rightarrow x_1 = 1 + 2j$

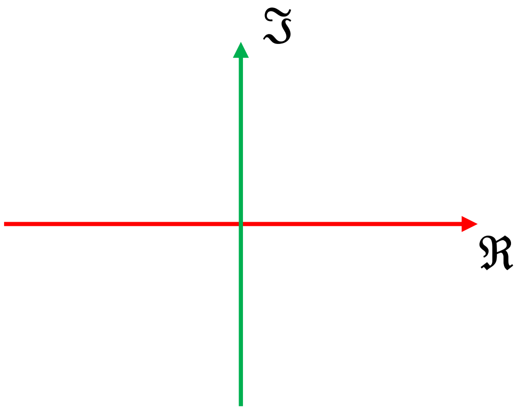
$\rightarrow x_2 = 1 - 2j$



- Η μορφή $z = x + jy$ ενός μιγαδικού αριθμού ονομάζεται

καρτεσιανή

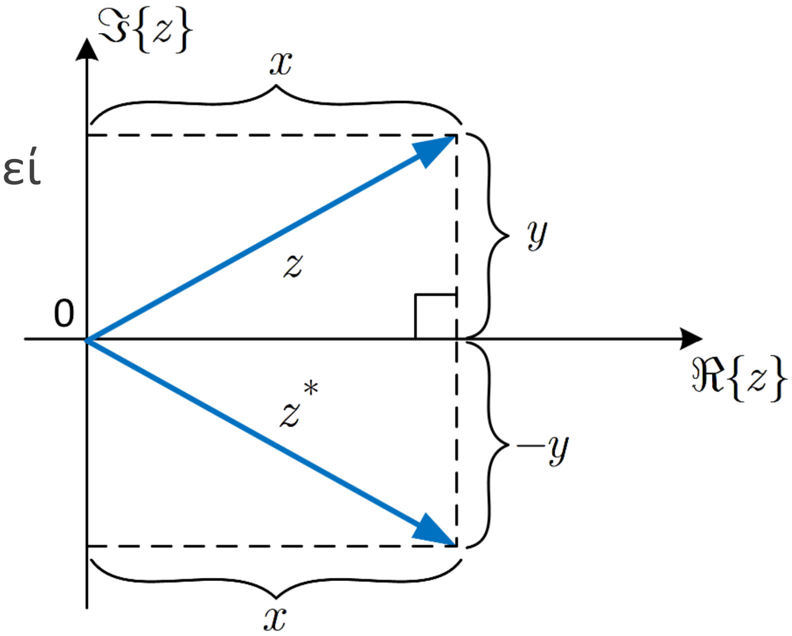
- Ορολογία:



  - x: τετμημένη : ***πραγματικό μέρος*** του μιγαδικού αριθμού
$$x = \Re\{z\} = \mathrm{Re}\{z\}$$
  - y: τεταγμένη : ***φανταστικό μέρος*** του μιγαδικού αριθμού
$$y = \Im\{z\} = \mathrm{Im}\{z\}$$

- Άρα
$$z = x + jy = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$$

- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **διάνυσμα** που ξεκινά από το $(0,0)$ και καταλήγει στις συντεταγμένες (x, y)



- **Συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$
$$z^* = x - jy = \Re\{z\} - j\Im\{z\}$$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = x + jy$	
	$z_2 = u + jv$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$	
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$	
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$	
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$	★
	$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$	★
	$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$	
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$	★
$z \in \Re$	$z = z^*$	★
$z \in \Im$	$z = -z^*$	★

- Ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό θεώρημα λέει ότι:
- Ένα πολυώνυμο βαθμού N έχει γενικά N ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές). Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι όποιες μιγαδικές ρίζες υπάρχουν θα «έρχονται» πάντα σε συζυγή ζεύγη!
  - Το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα
- Π.χ.

$$(z+j)(z-j) = z^2 + 1$$

$$\big(z+(2+j)\big)\big(z+(2-j)\big) = z^2 + 4z + 5$$

$$\left(z+\left(-1+j\sqrt{2}\right)\right)\left(z+\left(-1-j\sqrt{2}\right)\right) = z^2 + 2z + 3$$

$$(z+j)(z+1) = z^2 + {\color{red}(1+j)}z + {\color{red}j}$$

- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
  - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

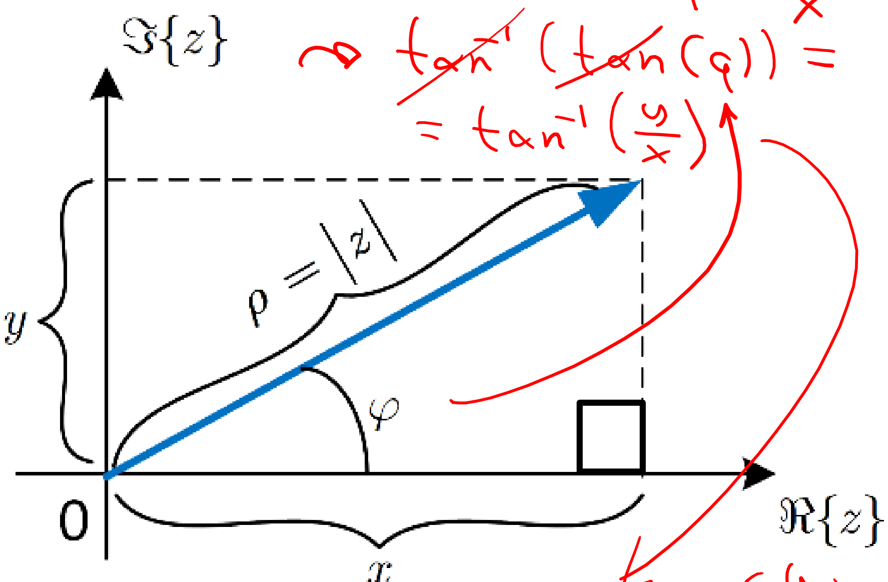
- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
  - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \alpha\pi\rho o\sigma\delta\iota\acute{o}\rho\iota\sigma\tau o, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$\in (-\pi, \pi]$

$\rightarrow \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

$\rightarrow \cancel{\tan^{-1}}(\cancel{\tan}(\varphi)) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$



$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

- Αντί της καρτεσιανής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή, την **πολική**
- Η πολική μορφή χρησιμοποιεί την έννοια του μέτρου και της φάσης που είδαμε
- Από απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$z = x + jy = \rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

- Η παραπάνω πολική μορφή μπορεί να απλοποιηθεί μέσω **των σχέσεων του Euler**
- Σχέση του Euler:

$$\boldsymbol{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)}$$

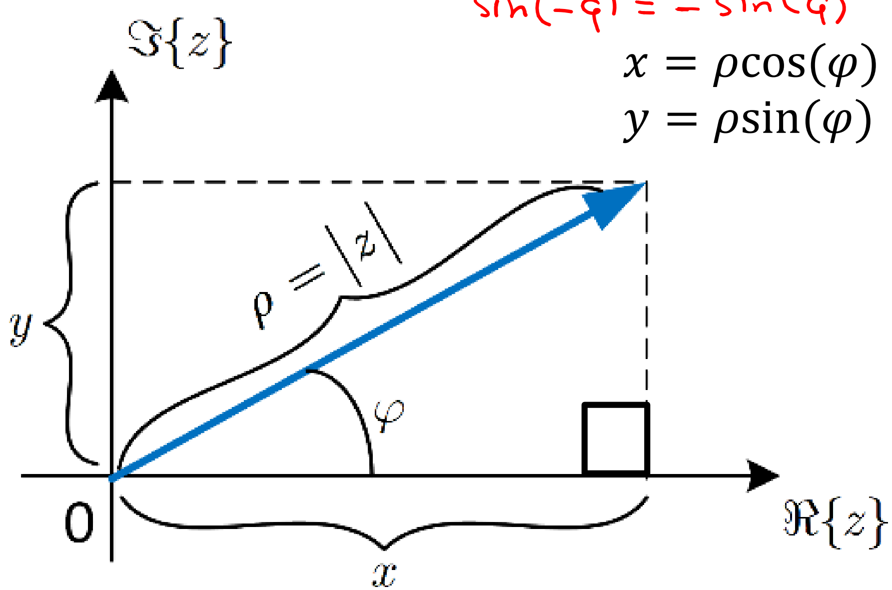
συζυγής:
$e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$
γιατί $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

- Άμεσες συνέπειες της παραπάνω σχέσης:

$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}}$$

$x = \rho\cos(\varphi)$
$y = \rho\sin(\varphi)$



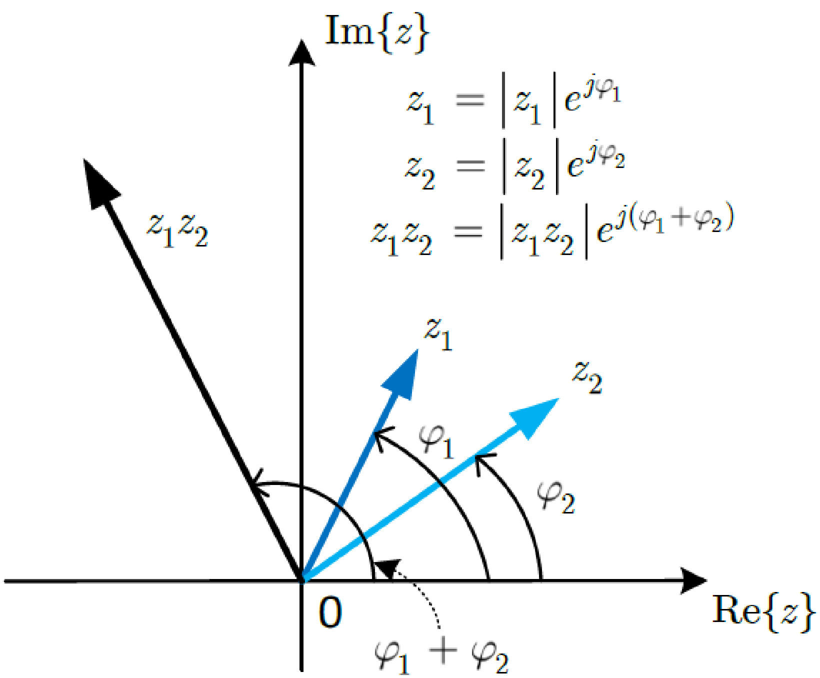
- <u>**Μεγάλης σπουδαιότητας σχέσεις!**</u>

- Η πολική μορφή γράφεται ως:

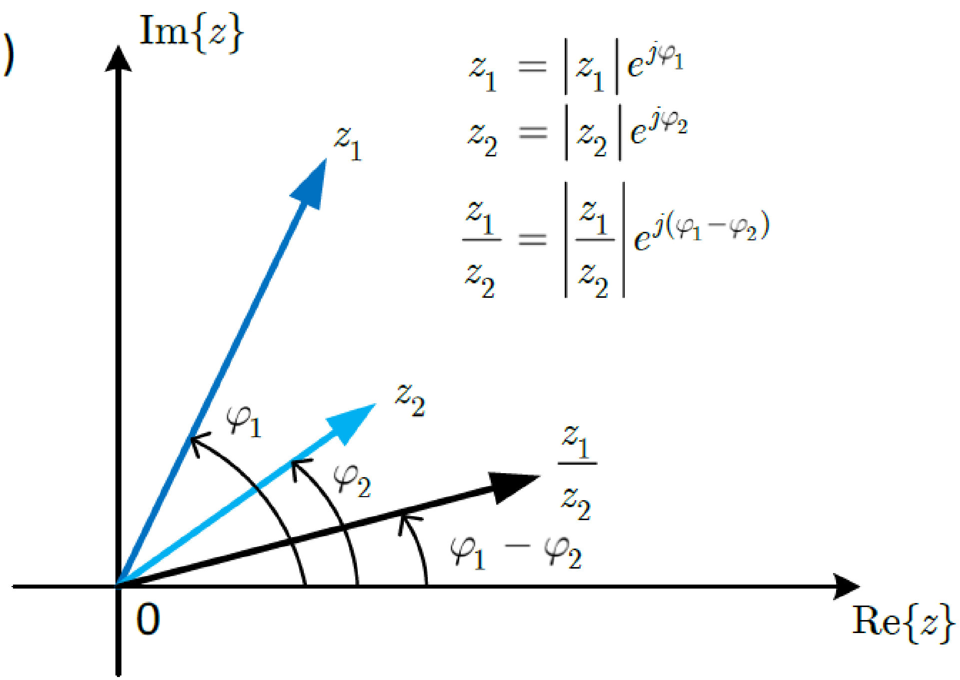
$$z = x + jy = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

με $|z|, \varphi$ όπως τα περιγράψαμε νωρίτερα

- Η πολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με τις πράξεις του **γινομένου** και της **διαίρεσης** μεταξύ μιγαδικών αριθμών
- Αντίθετα, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ βολική για τις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**



(β)



Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$	
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} + b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} - b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$	★
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \|z_1\|^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$	★
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1+\phi_2)}$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$	★
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\|\rho_1\| = \|\rho_2\|$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	★

- Κάποιες πολικές μορφές εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη
- Ας τις δούμε

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

Συνήθεις πολικές μορφές

Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

- Όλα τα παραπάνω αποδεικνύονται θέτοντας κατάλληλη τιμή του φ στη σχέση του Euler.

- **Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**
- Για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ χρονοβόρα
- Με πολική μορφή:

$$z^n = \left(|z|e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

- Η μορφή αυτή ονομάζεται **σχέση του De Moivre**
- Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$z^N - a = 0, \qquad a = |a|e^{j\theta} \in \mathbb{C}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

- Ας δούμε πως

$$z^N = a \iff |z|^N e^{j\boldsymbol{N\varphi}} = |a|e^{j\boldsymbol{(\theta+2\pi k)}} \iff z := \begin{cases} |z| = |a|^{\frac{1}{N}} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{N}, k = 0,1,\dots,N-1 \end{cases}$$

- Θέλουμε μόνο N ρίζες αφού το πολυώνυμο είναι N βαθμού

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 - 8 = 0$

Είναι $z^3 = 8$

- $z^3 = \left(|z| e^{j\varphi}\right)^3 = |z|^3 e^{j3\varphi}$
- $8 = 8 \cdot \underbrace{e^{j0}}_{1} = 8 \cdot \underbrace{e^{j2\pi k}}_{1}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow |z|^3 e^{j3\varphi} = 8 \cdot e^{j2\pi k}, \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 8 \\ 3\varphi = 2\pi k \end{cases} = \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \varphi = \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$

$e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{j\frac{6\pi - 2\pi}{3}} = e^{j2\pi} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

1

Άρα $z_1 = 2e^{j0} = 2, \quad z_2 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = 2 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

- **Γεωμετρικοί Τόποι**

$(x-2)^2+y^2=4$

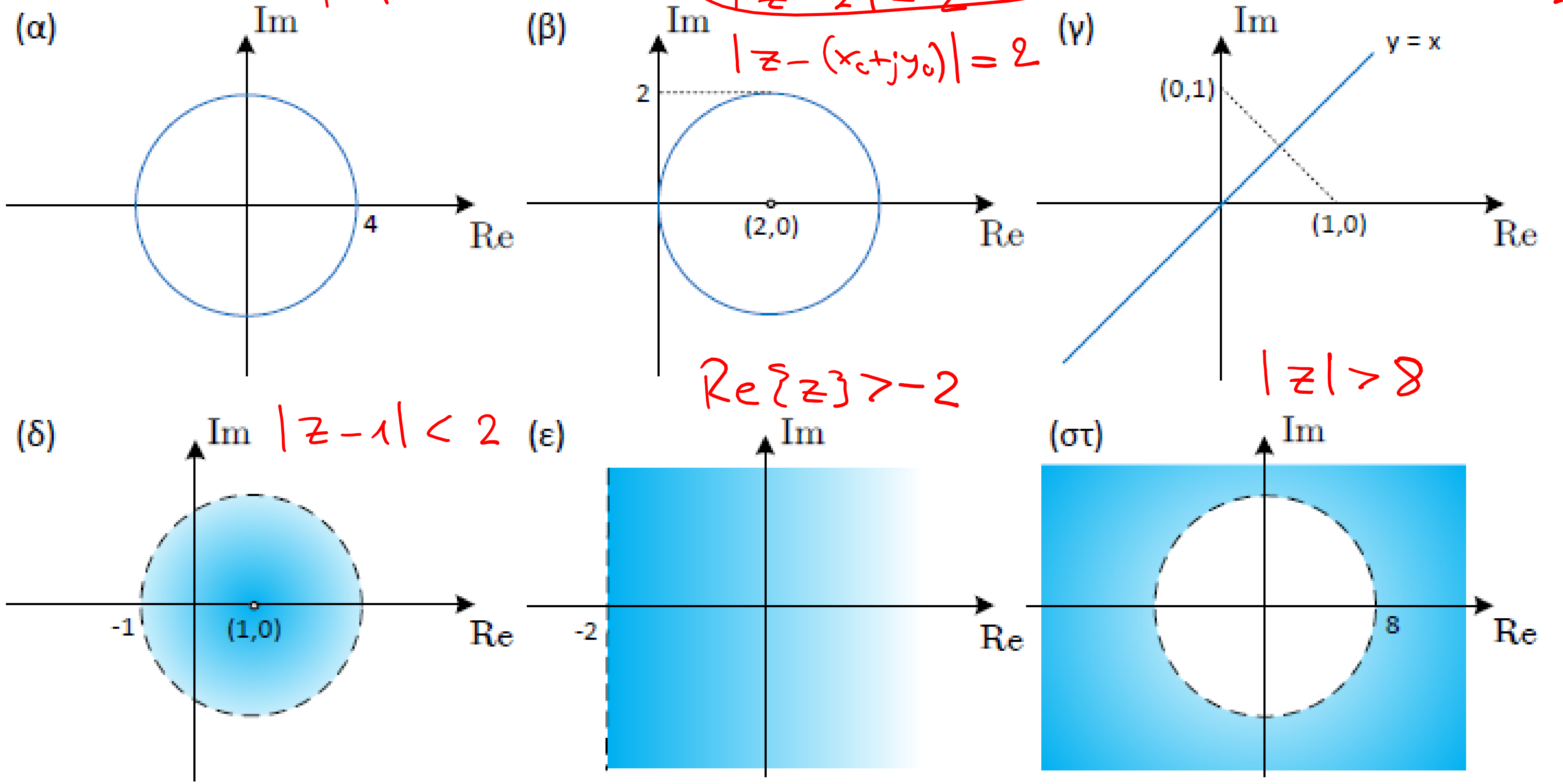
- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν μια συγκεκριμένη (γεωμετρική, πολλές φορές) ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος**

$|z|=4$ $|z-2|=2$ $Re\{z\}=Im\{z\}$

$|z-(x_c+jy_0)|=2$

$Re\{z\}>-2$ $|z|>8$

$|z-1|<2$



- Παράδειγμα:

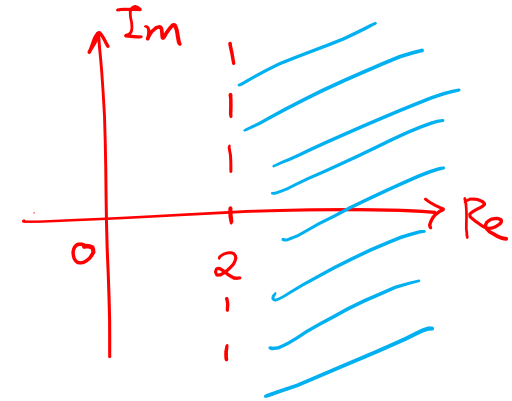
○ Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

a) $\Re\{z\} > 2$

b) $|z - (2 - j)| = 2$

c) $\arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

a) $\left.\begin{array}{l} Re\{z\} > 2 \\ z = x + jy \end{array}\right\} \Rightarrow x > 2$



b) Αν $z = x + jy$, τότε $|z-(2-j)| = 2 \Leftrightarrow |x+jy-2+j| = 2 \Leftrightarrow$

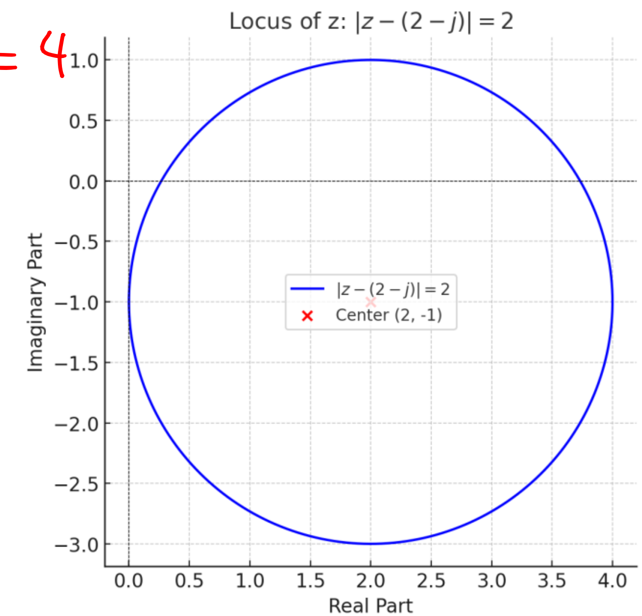
$\Leftrightarrow |(x-2)+j(y+1)| = 2 \Leftrightarrow |(x-2)+j(y+1)|^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 = 2^2$

Γενική μορφή:

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Κύκλος ακτίνας $r = 2$ με κέντρο το $(2, -1)$



- Παράδειγμα:

c) $\left.\begin{array}{l} \arg(z+1) = \frac{\pi}{3} \\ z = x+jy \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(x+jy+1) = \frac{\pi}{3}$

$\arg\big(\underbrace{(x+1)+jy}_{\omega}\big) = \frac{\pi}{3}$

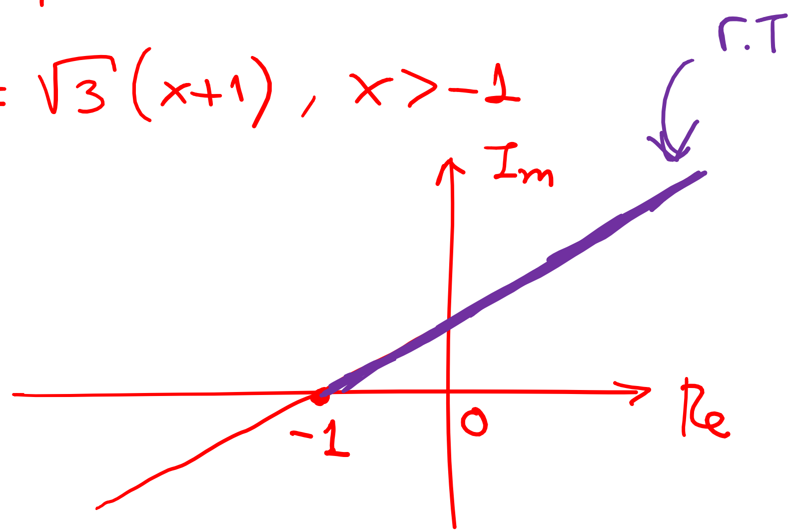
Άρα

$\tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3}, \quad Re\{\omega\} > 0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow \boxed{x>-1}$

όποτε

$\cancel{\tan}\left(\cancel{\tan^{-1}}\left(\frac{y}{x+1}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$\frac{y}{x+1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x+1), \quad x>-1$



- **Μιγαδικές Συναρτήσεις**
- Οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν ως πεδίο ορισμού ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου και πεδίο τιμών μιγαδικούς (εν γένει) αριθμούς
- Μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι (εν γένει) τεσσάρων διαστάσεων
- Μπορούμε όμως να σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της, ή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της
- Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, και της παραγωγισιμότητας έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και λίγες διαφορές με αυτές που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις
- Μια εκτενής παρουσίαση είναι εκτός σκοπού
  - Θα αντιμετωπίσουμε τις (όποιες) μιγαδικές συναρτήσεις όταν τις συναντήσουμε
- Θα μας απασχολήσουν περισσότερο **συναρτήσεις του χρόνου t** οι οποίες (μερικές φορές) θα παίρνουν **μιγαδικές τιμές**
- Ας δούμε μια τέτοια απλή και ΠΟΛΥ σημαντική συνάρτηση **του χρόνου t**
- Τη συνάρτηση

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$$

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**

- Η συνάρτηση αυτή είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία παίρνει μιγαδικές τιμές!

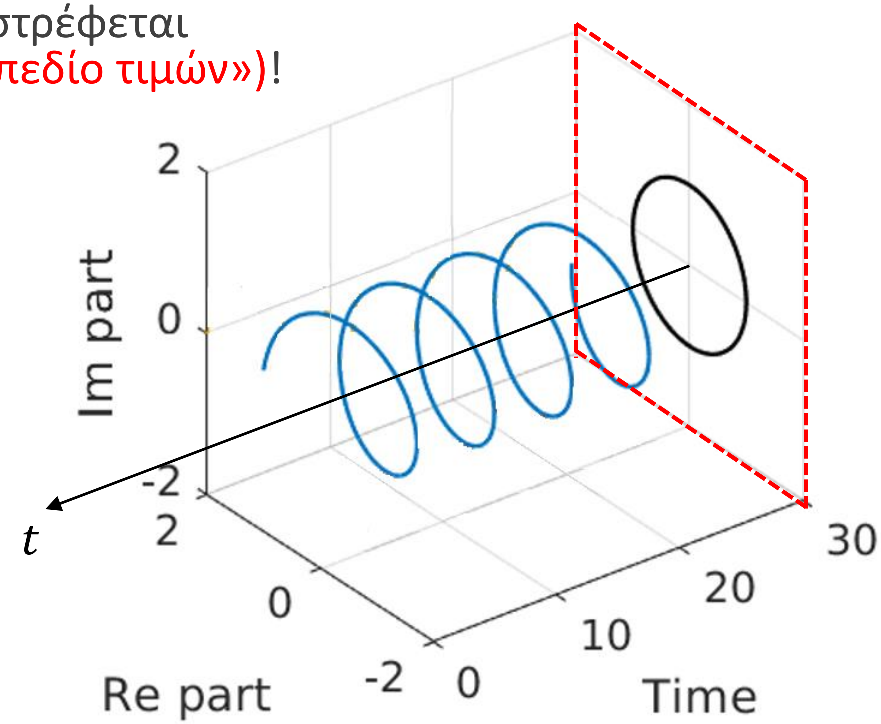
- Άρα για τη σχεδίασή της χρειαζόμαστε έναν άξονα t («πεδίο ορισμού»)

- Επίσης, θέλουμε ένα μιγαδικό «χώρο» (επίπεδο) για να βάζουμε τις τιμές της, π.χ. $x(0) = 1,\ x(1.2) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ x(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j, \ldots$

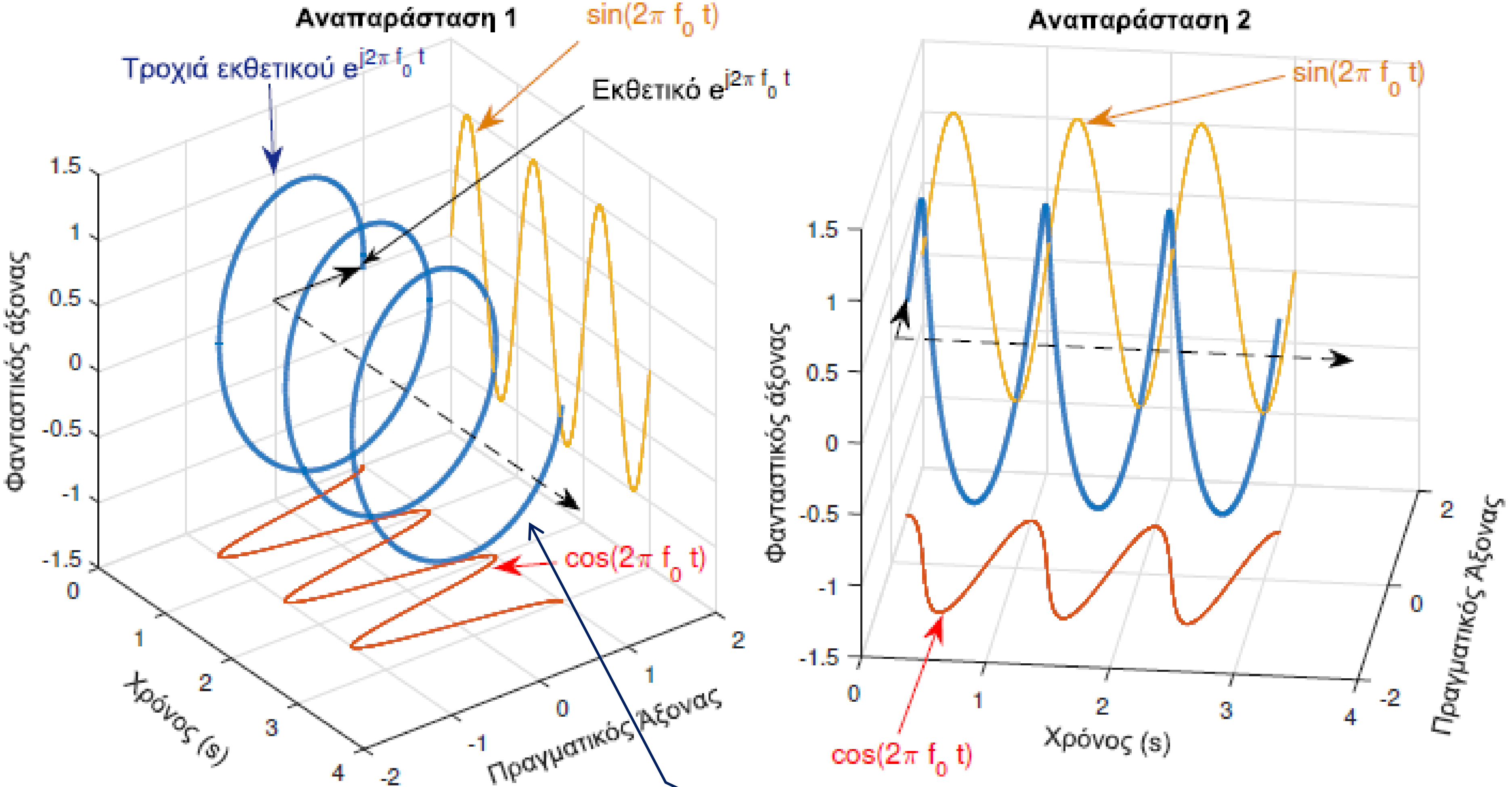
  - Παρατηρούμε ότι κάθε μια από αυτές τις τιμές, ως μιγαδικοί αριθμοί, θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα, που περιστρέφεται (αλλάζει τιμές) επάνω στο μιγαδικό επίπεδο («πεδίο τιμών»)!

- Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η συνάρτηση θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα σταθερού **μοναδιαίου** μέτρου…
  - …αφού $\left|e^{j\theta(t)}\right| = |\cos\theta(t) + j\sin\theta(t)|$
  $= \sqrt{\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)}$
  $= 1$

το οποίο προβάλλεται γύρω από τον άξονα του χρόνου σε σπειροειδή τροχιά



- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$**



Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή με συχνότητα f_0 Hz

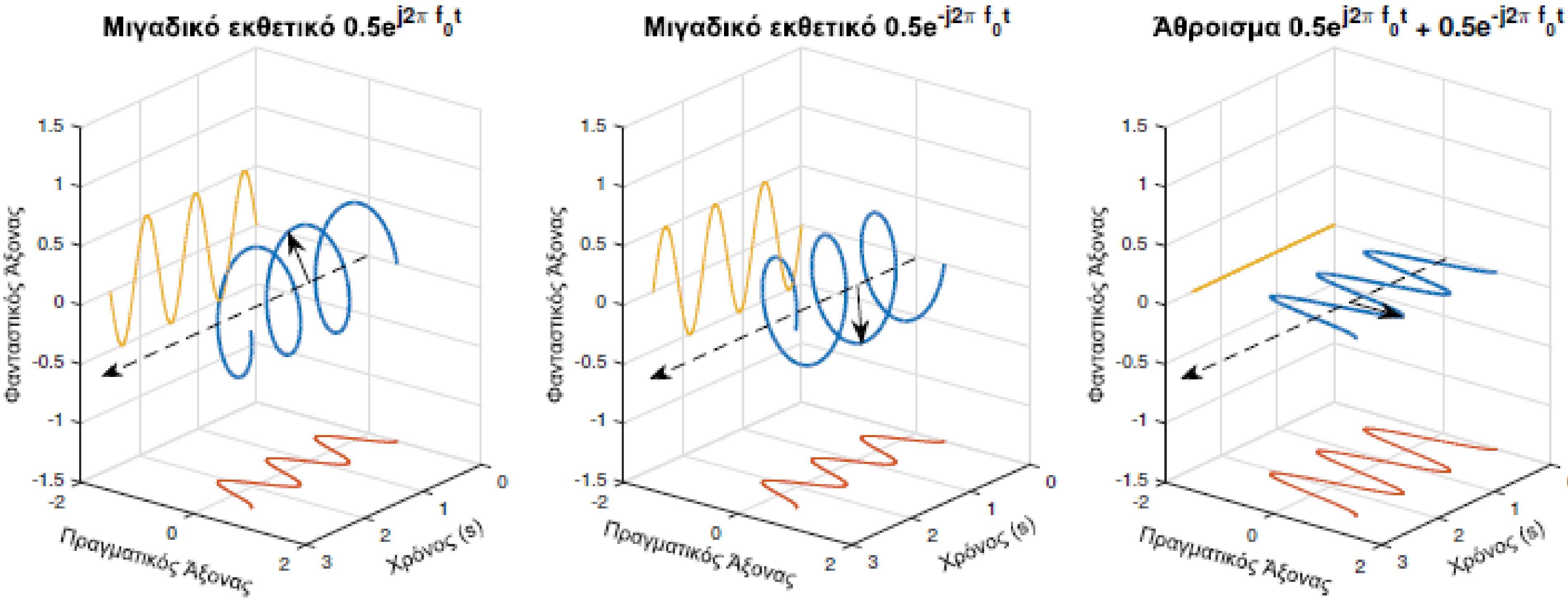
- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$**
- Θα παρατηρήσατε ότι η προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο (χρόνος, πραγματικός άξονας) αποτελεί ένα συνημίτονο!
- Αντίθετα, η προβολή στο επίπεδο (χρόνος, φανταστικός άξονας) «σχηματίζει» ένα ημίτονο!
- Αυτό είναι συνεπές με τις σχέσεις του Euler:

$$\Re\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

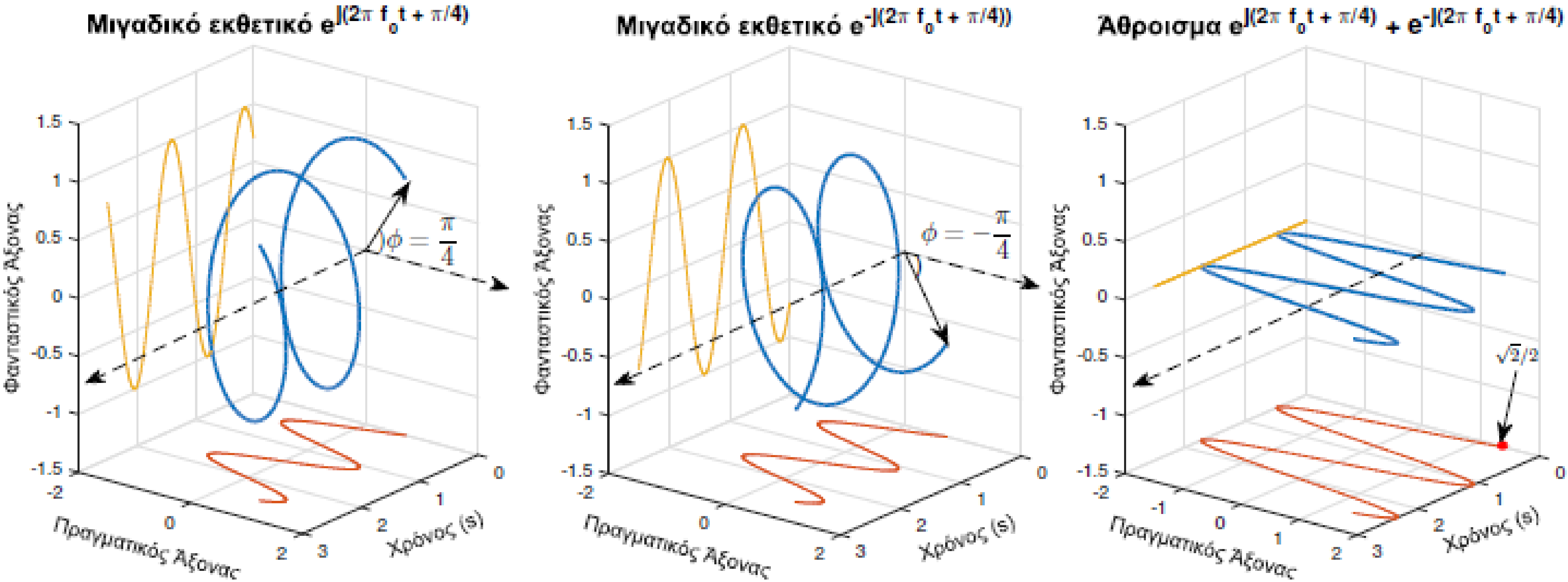
$$\Im\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t}$$

- **Επιπλέον**, από τις παραπάνω σχέσεις βλέπετε ότι το **άθροισμα δυο συζυγών εκθετικών συναρτήσεων δίνει μια πραγματική συνάρτηση**!
- Ας το δούμε αυτό οπτικά…

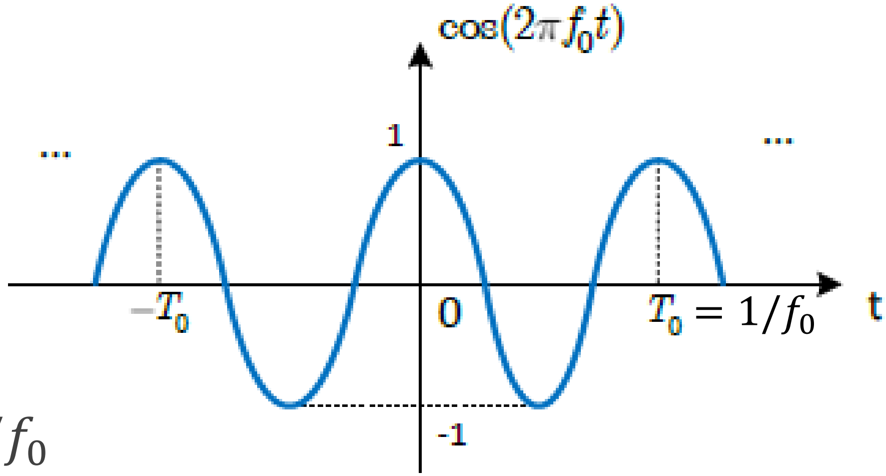
- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$**

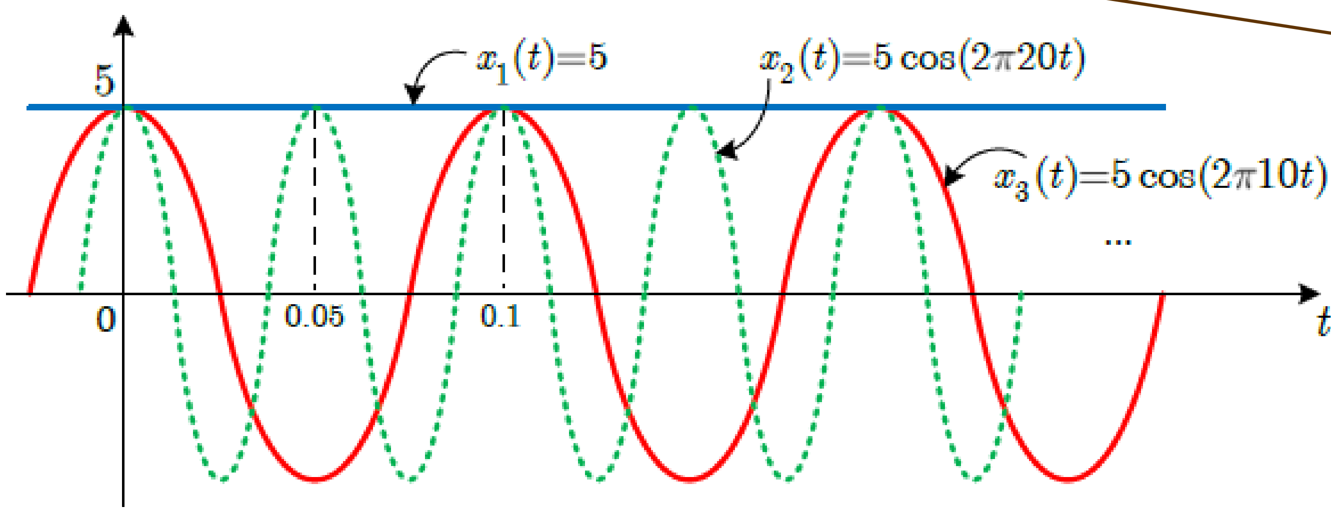


- **Η συνάρτηση** $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} = \cos(2\pi f_0 t + \phi) + j\sin(2\pi f_0 t + \phi)$



- Στην έννοιες που θα συζητήσουμε στο μάθημα, παίζουν θεμελιώδη ρόλο οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις
- Γενικότερα, μια ημιτονοειδής συνάρτηση ορίζεται ως $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$
- A: **πλάτος ημιτονοειδούς**
- f_0: **συχνότητα ημιτονοειδούς**
- φ: **φάση μετατόπισης (ή αρχική φάση) ημιτονοειδούς**
- <u>Κάθε</u> απλό ημιτονοειδές είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου, με **περίοδο** $T_0 = 1/f_0$





Περίοδος: το ελάχιστο χρονικό διάστημα που η συνάρτηση επαναλαμβάνει τον εαυτό της! Η περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφες μεταξύ τους ποσότητες.

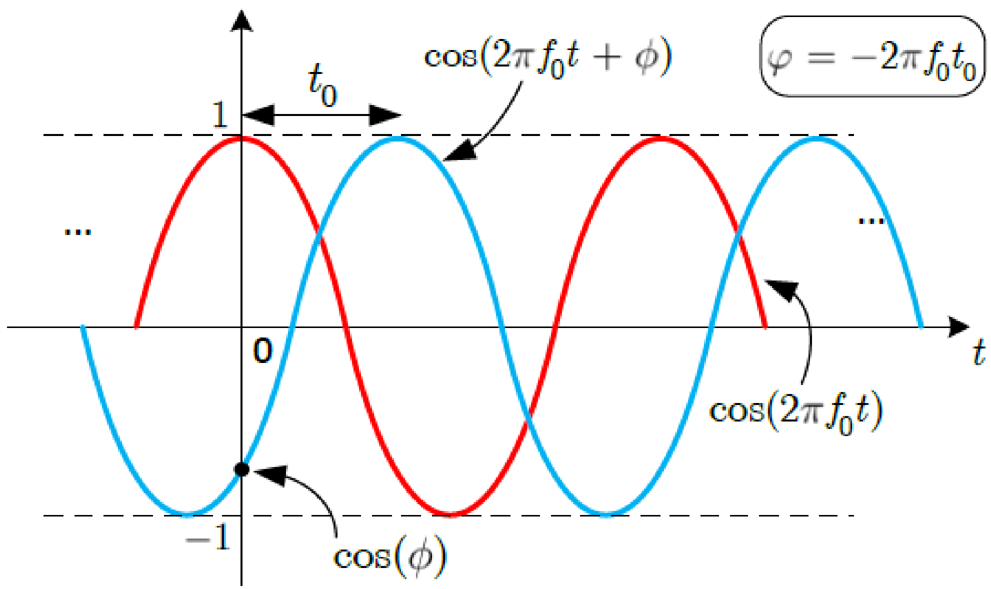
- **Μετατόπιση Φάσης**
- Η φάση μετατόπισης είναι μια τιμή που καθορίζει πόσο έχει μετατοπιστεί το ημιτονοειδές από τη θέση $t = 0$
- Αν $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)|_{\varphi=0} = A\cos(2\pi f_0 t)$ το ημιτονοειδές **χωρίς** μετατόπιση, τότε

$$x_0(t - t_0) = A\cos\big(2\pi f_0 (t - t_0)\big) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Μια **μετατόπιση κατά t_0 δεξιά ισούται με φάση μετατόπισης**

$$\varphi = -2\pi f_0 t_0 = -\frac{2\pi t_0}{T_0}$$

- Σχηματικά ($A = 1$):



- **Άθροισμα Ημιτόνων**
- Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως μπορούν να απλοποιηθούν οι πράξεις μεταξύ ημιτόνων όταν περνάμε μέσα από το μιγαδικό χώρο
- Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

- Από τις σχέσεις του Euler, μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + B\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\} \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t} + Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\} \\ &= \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}$$

Euler:

$$\boxed{\begin{aligned} &Ae^{j2\pi f_0 t} \\ &= \boldsymbol{A\cos(2\pi f_0 t)} + jA\sin(2\pi f_0 t) \\ &= \boldsymbol{\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\}} + j\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}}$$

$$e^{-\frac{j\pi}{2}} = -j$$

$\pm\pi$, σύμφωνα με τη γνωστή σχεση

- Όμως: $A + Be^{-\frac{j\pi}{2}} = A - jB = \sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}, \ \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$

- **Άθροισμα Ημιτόνων**
- Άρα

$$x(t) = \Re\left\{\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

Euler:

$$\boxed{A\cos(2\pi f_0 t) = \Re\left\{Ae^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\}$$

- Από την τελευταία σχέση – με χρήση Euler – διαπιστώνουμε ότι

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται και για N ημίτονα

- Ο μιγαδικός $\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)$ ονομάζεται **φάσορας (phasor)**
  - **Κάθε (σταθερός) μιγαδικός αριθμός $z = x + jy = |z|e^{j\theta}$ που σχετίζεται με γινόμενο**

$$z \cdot e^{j2\pi f_0 t} = |z|e^{j\theta} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

με μια συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$ λέγεται φάσορας

- **Παράδειγμα:**

  - Λύστε την εξίσωση $A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi 50 t + \pi) + \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\mathrm{Re}\{Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\} = \mathrm{Re}\{1\cdot e^{j(2\pi 50 t + \pi)}\} + \mathrm{Re}\{1\cdot e^{j(2\pi 50 t - \frac{\pi}{3})}\}$$

$$= \mathrm{Re}\{e^{j(2\pi 50 t + \pi)} + e^{j(2\pi 50 t - \frac{\pi}{3})}\}$$

$$= \mathrm{Re}\{e^{j\pi}\cdot e^{j2\pi 50 t} + e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j2\pi 50 t}\}$$

δηλ.

$$\mathrm{Re}\{\underbrace{Ae^{j\varphi}}_{W:\text{ phasor}}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathrm{Re}\{\underbrace{(e^{j\pi} + e^{-j\frac{\pi}{3}})}_{Z:\text{ phasor}}e^{j2\pi 50 t}\}$$

$f_0 = 50\text{ Hz}$

Είναι

$$Z = e^{j\pi} + e^{-j\frac{\pi}{3}} = -1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ⇝ καρτεσιανή μορφή, θέλουμε πολική!

$$|Z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

Άρα $Z = 1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = Ae^{j\varphi} \Longrightarrow A = 1,\ \varphi = -\frac{2\pi}{3}$

- **Παράδειγμα:**

  - Λύστε την εξίσωση $\Re\{\overbrace{(1+j)}^{z}e^{j\theta}\} = -1$ (1)

Είναι $z = 1 + j = |z| e^{j\varphi}$, $|z| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\frac{Im}{Re}$

Συγκεκριμένα, $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow z = |z| e^{j\varphi} = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$. Άρα η (1) δίνει

$$Re\{z e^{j\theta}\} = -1 \Leftrightarrow Re\{\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\theta}\} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Re\{\sqrt{2} e^{j(\theta + \frac{\pi}{4})}\} = -1 \overset{Euler}{\Leftrightarrow} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi k \pm \frac{3\pi}{4},$$

$k \in \mathbb{Z}$

- **Παράδειγμα:**
  - Λύστε την εξίσωση $\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1$

Οπότε

$$\theta = 2\pi k \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \begin{cases} 2\pi k + \frac{\pi}{2} \\ 2\pi k - \pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Περιοδικότητα**
- Είδαμε νωρίτερα ότι ένα απλό ημίτονο είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Άραγε το **άθροισμα** ημιτόνων είναι περιοδικό?
- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα:
- Έστω $x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)\,,\quad f_1 \neq f_2$
- Έστω ότι είναι περιοδικό. Τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάποιο $T_0 > 0$
- Άρα

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t + T_0) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t + T_0) + \phi_2)$$

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 t + \underline{2\pi f_1 T_0} + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \underline{2\pi f_2 T_0} + \phi_2)$$

- Πρέπει

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 T_0 &= 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T_0 &= 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Οπότε διαιρώντας

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{k}{l} = \text{λόγος ακεραιων}$$

- **Παράδειγμα:**

  - Ελέγξτε αν τα παρακάτω αθροίσματα είναι περιοδικά

α) $x(t) = 2\cos\left(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2\pi \underbrace{250}_{f_2} t - \frac{\pi}{4}\right)$ ✓

β) $x(t) = \cos\left(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\underbrace{400}_{2\pi \frac{400}{2\pi}} t + \frac{\pi}{3}\right)$ ✗

f_2

α) $f_1 = 100\ Hz$, $f_2 = 250\ Hz$, $\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{250} =$ λόγος ακεραίων

β) $f_1 = 100\ Hz$, $f_2 = \frac{400}{2\pi} = \frac{200}{\pi}$, $\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{200}{\pi}} = \frac{\pi}{2} \neq$ λόγος ακεραίων

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ