

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15^Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες



Τι περιέχει το ΗΥ215?



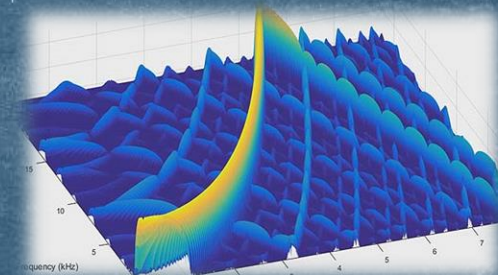
1^ο Κομμάτι

- ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier



2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Laplace
- ▶ Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ▶ ~~Τυπικά Σήματα~~
- ▶ Δειγματοληψία



- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Σύνοψη:
- Σήματα ενέργειας:

REMINDER

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}$$



- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$\sum X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \sum X_k \delta(f - k f_0)$$

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

- Για τα **περιοδικά** σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του **μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων**

- Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση

- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t + \tau)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι (από πίνακες)

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

- Ας επιβεβαιώσουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ισχύς του σήματος στο χώρο της συχνότητας

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Ας θυμηθούμε αρχικά τον **Parseval!**

$$\phi_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t+0)dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t)dt = P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- Άραγε, αν ολοκληρώσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, θα πάρουμε τη συνολική ισχύ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \right) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)df$$

- Επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)df = 1$$

τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x$$

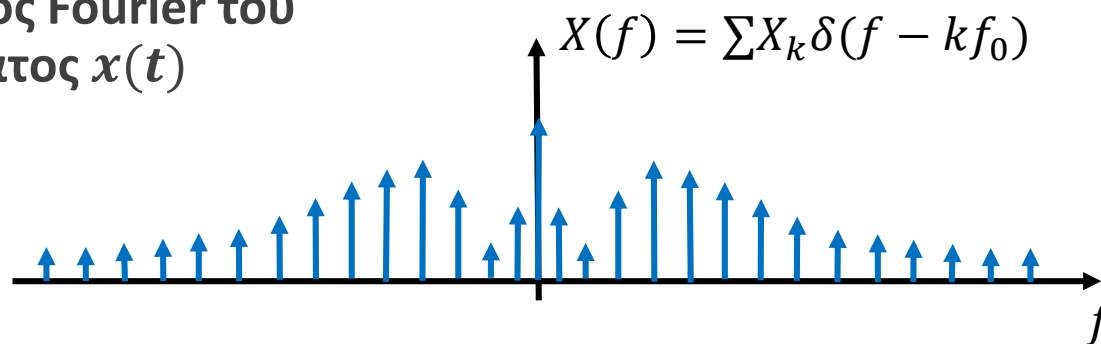
- Επιβεβαιώθηκε!

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

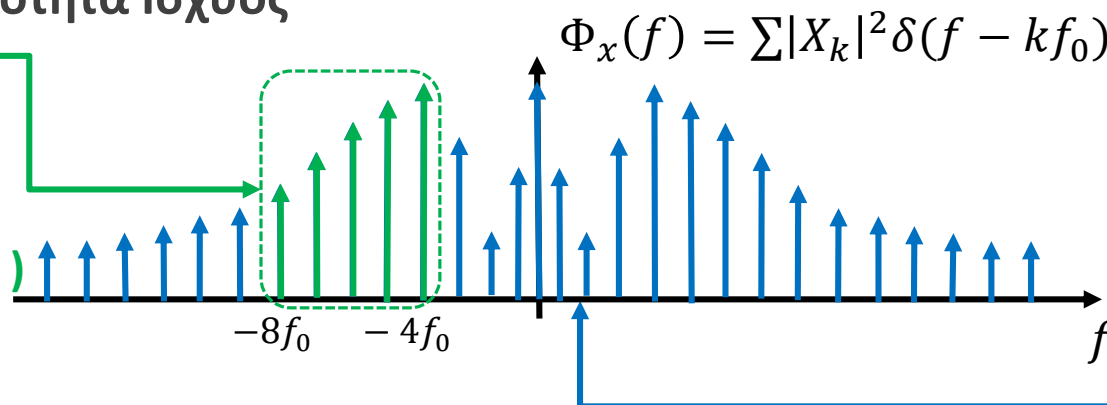
Συνάρτηση κατανομής ισχύος ως προς f

- Παράδειγμα:
Μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$



- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

Μερικό «εμβαδό»
=
Μερική ισχύς!
(στο $[-8f_0, -4f_0]$)



Συνολικό «εμβαδό»
=
Συνολική ισχύς

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Θυμηθείτε ότι ένας τρόπος να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier είναι μέσω του μετασχ. Fourier **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος!

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

- Η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ περιοδικών σημάτων είναι κι αυτή ένα περιοδικό σήμα!
- ...και έχουμε δείξει ότι έχει συντελεστές Fourier $\Phi_k = |X_k|^2$!
- Μπορούμε άραγε αυτούς να τους βρούμε με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω?

• **ΝΑΙ!** 😊

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $\Phi_k = |X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπώντας τη φασματική πυκνότητα **ενέργειας** $\Phi_x(f, T_0)$ **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ.

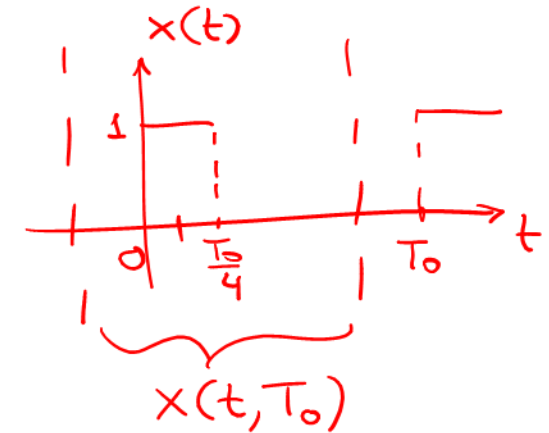
$$\Phi_k = |X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0^2} |X(f, T_0)|^2 \Big|_{f=kf_0}$$

• Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

- Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$$



Θεωράμε τη μια περίοδο του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ. την $x(t, T_0)$. Είναι:

$$x(t, T_0) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{8}}{\frac{T_0}{4}}\right) \xleftrightarrow{F} X(f, T_0) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right) e^{j\pi f \frac{T_0}{4}}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{ρα}} \quad \Phi_X(f, T_0) &= |X(f, T_0)|^2 = \left(\frac{T_0}{4}\right)^2 \left|\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 \cdot \left|e^{-j\pi f \frac{T_0}{4}}\right|^2 \\ &= \frac{T_0^2}{16} \left|\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 = \frac{T_0^2}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right). \end{aligned}$$

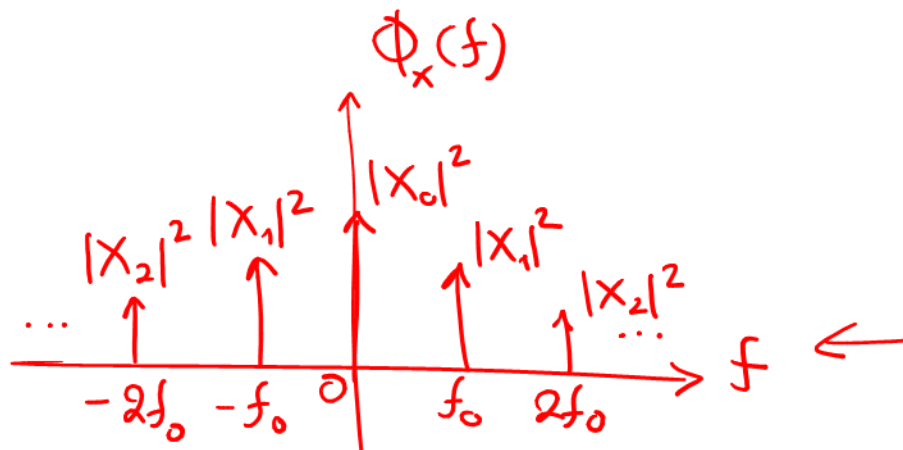
• Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \text{Άρα } |X_k|^2 &= \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{\cancel{T_0^2}} \frac{\cancel{T_0^2}}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4} f\right) \Big|_{f=kf_0} \\ &= \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4} kf_0\right) \stackrel{f_0 T_0 = 1}{=} \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = |X_k|^2 \end{aligned}$$

Οπότε

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) = \frac{1}{16} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$



Τι παρατηρείτε
αριστερά;
Την κατανομή
στη ισχύ του
περιοδικού σήματος
στη συχνότητα

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι αφού η **διαφασματική πυκνότητα ισχύος** αποτελεί το μετασχ. Fourier της **ετεροσυσχέτισης** δυο περιοδικών σημάτων, μπορούμε να εξάγουμε αντίστοιχες με τη φασματική πυκνότητα εκφράσεις:

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

- Όμως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

- Φασματικές Πυκνότητες
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Άρα

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [X^*(kf_0, T_0)Y(kf_0, T_0)]\delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [X(kf_0, T_0)Y^*(kf_0, T_0)]\delta(f - kf_0)$$

- Καταφέραμε και σχετίσαμε και τις (δια)φασματικές πυκνότητες ισχύος περιοδικών σημάτων με τους μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του/των περιοδικού/ών σήματος/ων

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Σύνοψη:

- Σήματα ενέργειας:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}$$



- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k \delta(f - kf_0)\end{aligned}$$



με

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0)$$

• Φασματικές Πυκνότητες

- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι **φασματικές πυκνότητες** μπορούν να **υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων που εμπλέκονται**
- Για **απεριοδικά σήματα ισχύος**, κάτι τέτοιο **δεν** ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για τέτοια σήματα ισχύος η (π.χ.) φασματική πυκνότητα ισχύος γράφεται ως

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2$$

με

$$X(f, T) = F \left\{ x(t) \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \right\}$$

δηλ. το **μετασχ. Fourier ενός τμήματος του σήματος ισχύος** $x(t)$, διάρκειας T

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να **μην** υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η **μελέτη των απεριοδικών σημάτων ισχύος** στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται **μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους**
 - ...και **όχι** μέσω του μετασχ. Fourier των ιδίων των σημάτων ισχύος

- Φασματικές Πυκνότητες

$$A, \forall t \leftrightarrow A\delta(f)$$

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος $x(t) = u(t)$

Βρήκαμε ότι $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \forall \tau.$

Άρα

$$\begin{aligned} \Phi_x(f) &= F\{\varphi_x(\tau)\} = \\ &= F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f). \end{aligned}$$

Άρα $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2} \xleftrightarrow{F} \Phi_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f)$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Σύνοψη:

- Σήματα ενέργειας:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}$$



- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k \delta(f - kf_0)\end{aligned}$$



- Σήματα ισχύος (απεριοδικά):

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f)\end{aligned}$$



- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την απόκριση συχνότητας $H(f)$, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$

- Θα συμβολίζουμε με $\phi_x(\tau)$, $\phi_y(\tau)$ τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με $\Phi_x(f)$, $\Phi_y(f)$ τις αντίστοιχες πυκνότητες

- Ξέρουμε ότι

$$\phi_y(\tau) = y(\tau) * y(-\tau)$$

$$= (x(\tau) * h(\tau)) * (x(-\tau) * h(-\tau))$$

$$= (x(\tau) * x(-\tau)) * (h(\tau) * h(-\tau))$$

$$= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)$$

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για **σήματα ενέργειας**:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2$$

όπως αναμενόταν

- Για **περιοδικά σήματα**:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 |H(kf_0)|^2 \delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για **απεριοδικά σήματα ισχύος**:



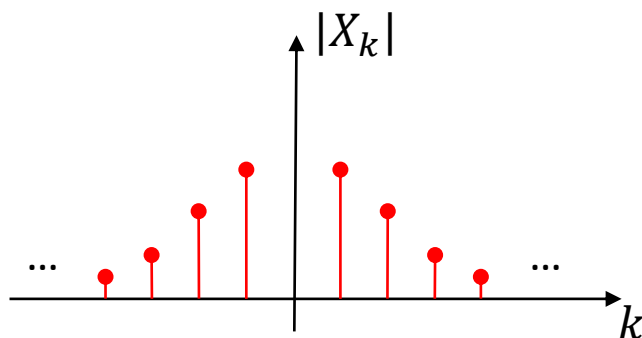
$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

για και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες των σημάτων εισόδου και εξόδου
 - ...αλλά δε θα επεκταθούμε σε αυτές στα πλαίσια του μαθήματος

Για το σπίτι..

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα:**
 - Αναπτύσσονται σε σειρά Fourier
 - Περιγράφονται συχνοτικά από τους συντελεστές Fourier, $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$
 - Οι τελευταίοι μας πληροφορούν για το πλάτος $|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi k f_0 t}$ που «περιέχεται» στο περιοδικό σήμα
 - Αν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορούν *επιπλέον* για το πλάτος $2|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του συνημιτόνου συχνότητας $k f_0$ που «περιέχεται» στο πραγματικό περιοδικό σήμα
 - Το περιοδικό σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης των συντελεστών Fourier (είτε ως προς k είτε ως προς f)
 - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** των συντελεστών Fourier όπως το παρακάτω



Ερώτημα: το διπλανό φάσμα είναι **φάσμα πλατών**. Αν θέλω να έχω ένα **φάσμα ισχύος**, δηλ. να δω πόση ισχύ φέρει κάθε συχνότητα $k f_0$, τι πρέπει να κάνω?

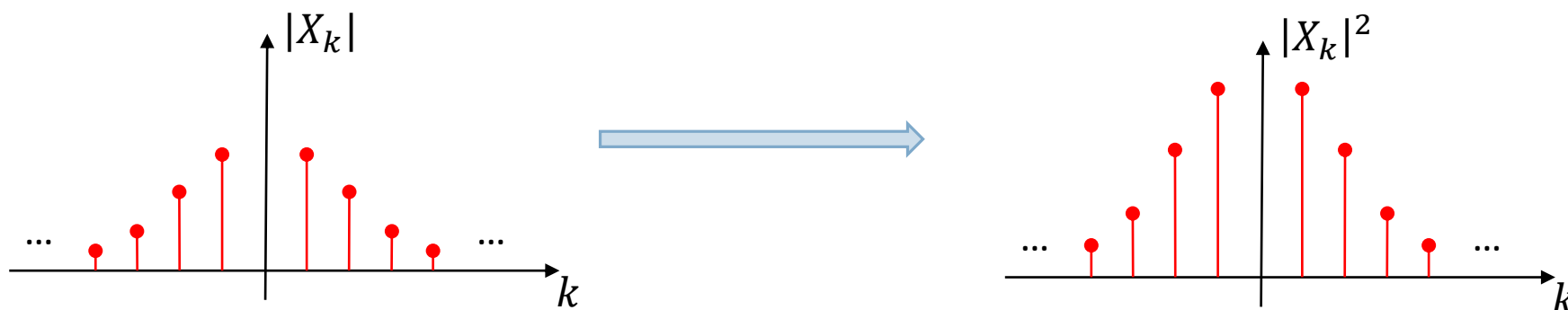
Για το σπίτι..

• Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

• Διαισθητική σύνοψη

• Περιοδικά σήματα:

- Αρκεί να πάρουμε το μέτρο των συντελεστών Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



- Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται **φάσμα ισχύος** ή **φασματική πυκνότητα ισχύος** του περιοδικού σήματος!

- Μας πληροφορεί για το **πόση από τη συνολική ισχύ** του περιοδικού σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα kf_0
- Η ισχύς αυτή είναι απλά $|X_k|^2$, για τη συχνότητα kf_0
- ... ή, αν πρόκειται για πραγματικό σήμα, η ισχύς του **συνημιτόνου** συχνότητας kf_0 είναι $2|X_k|^2$

- Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ισχύος** του περιοδικού σήματος!

- Μαθηματικά, το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$

- ... και εναλλακτικά το σχεδιάζουμε σε συνεχή άξονα f , αντί του διακριτού άξονα k που βλέπετε παραπάνω
- ... αλλάζουμε τον άξονα από k σε f , και χρησιμοποιούμε συναρτήσεις Δέλτα αντί για «στρογγυλά» κεφαλάκια

Για το σπίτι..

• Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

• Διαισθητική σύνοψη

• Περιοδικά σήματα:

- Ποιο **σήμα στο χρόνο** αντιστοιχεί σε αυτήν την **φασματική πυκνότητα ισχύος**?

- Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ισχύος $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?

- Η **περιοδική αυτοσυσχέτιση** $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!

- Η περιοδική αυτοσυσχέτιση είναι περιοδική με την **ίδια περίοδο** με το περιοδικό σήμα, και άρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier! Πως?

- Προφανώς ως

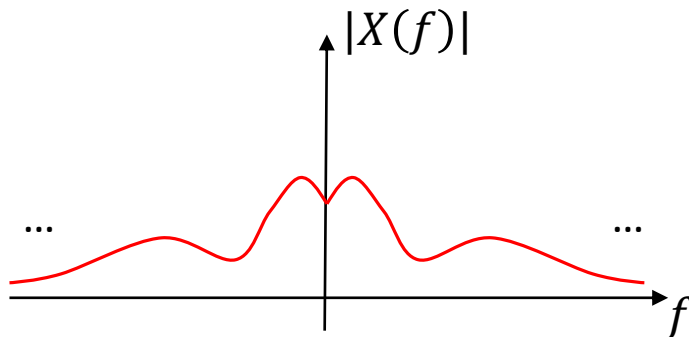
$$\phi_x(\tau) = \sum |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και όπως είπαμε πριν,

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \sum |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας:**
 - **ΔΕΝ** αναπτύσσονται σε σειρά Fourier αλλά αναλύονται με το Μετασχηματισμό Fourier
 - Περιγράφονται συχνотικά από τον ίδιο το μετασχηματισμό, $X(f)$
 - Ο τελευταίος μας πληροφορεί για το πλάτος $df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi(df)t}$ που «περιέχεται» στο σήμα
 - Αν το σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορεί *επιπλέον* για το πλάτος $2df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του συνημιτόνου συχνότητας df που «περιέχεται» στο πραγματικό σήμα
 - Το σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης του μετασχηματισμού Fourier (ως προς f)
 - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** του μετασχηματισμού Fourier όπως το παρακάτω



Ερώτημα: το διπλανό φάσμα είναι **φάσμα πλάτους**. Αν θέλω να έχω ένα **φάσμα ενέργειας**, δηλ. να δω πόση ενέργεια φέρει κάθε συχνότητα df , τι πρέπει να κάνω?

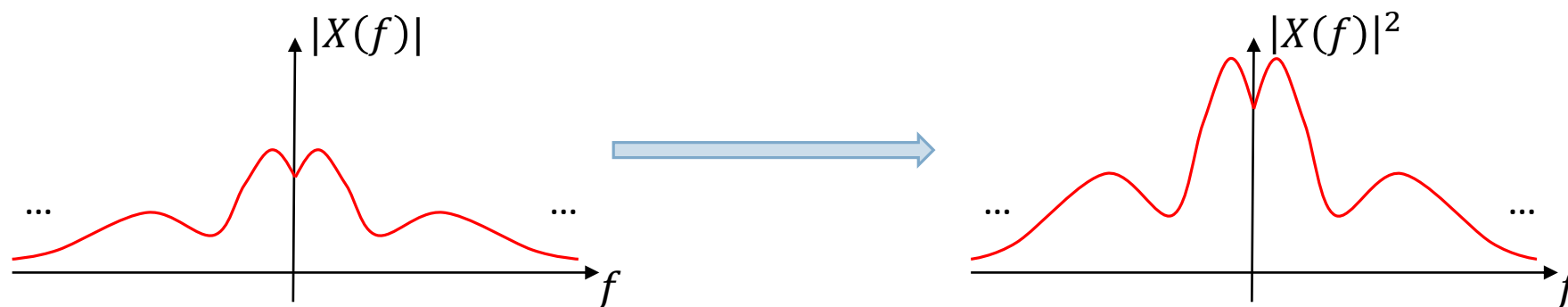
Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Διαισθητική σύνοψη

- **Σήματα ενέργειας:**

- Αρκεί να πάρουμε το μέτρο του μετασχ. Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



- Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται **φάσμα ενέργειας ή φασματική πυκνότητα ενέργειας** του σήματος!

- Μας πληροφορεί για το πόση από τη συνολική ενέργεια του σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα df
- Η ενέργεια αυτή είναι απλά $df|X(df)|^2$, για τη συχνότητα df

- Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ενέργειας** του σήματος!

- Μαθηματικά, το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$ (προφανές)

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας:**
 - Ποιο **σήμα στο χρόνο** αντιστοιχεί σε αυτήν την **φασματική πυκνότητα ενέργειας**?
 - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ενέργειας $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
 - Η **αυτοσυσχέτιση** $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
- **Σήματα ισχύος (απεριοδικά):**
 - Τα απεριοδικά σήματα ισχύος **δεν** μπορούν **πάντα** να περιγραφούν στο χώρο των φασματικών πυκνοτήτων **με όρους του μετασχ. Fourier τους**
 - ...ακόμα κι αν συμπεριλάβουμε συναρτήσεις Δέλτα ή άλλες «εξωτικές» συναρτήσεις/κατανομές
 - Οπότε η **μελέτη τους γίνεται με το μετασχ. Fourier απ'ευθείας της αντίστοιχης συνάρτησης συσχέτισής τους**
 - Παρόμοια γενικεύονται οι έννοιες για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

Για το σπίτι..

• Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

• Διαισθητική σύνοψη

• ΓΧΑ συστήματα:

- Όταν μια φασματική πυκνότητα εισόδου περνά μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα, η φασματική πυκνότητα αυτή **επηρεάζεται** από το σύστημα
- Είναι σαν να λέμε ότι η **κατανομή ενέργειας/ισχύος ενός σήματος εισόδου επηρεάζεται από το σύστημα όταν περνά μέσα από αυτό**
 - ...λογικό, αφού ένα σύστημα μεταβάλλει συχνοτικά την είσοδό του (κόβοντας συχνότητες, ενισχύοντας ή καταστέλλοντας άλλες, κλπ) και έτσι αλλάζει την κατανομή ενέργειας/ισχύος της, δίνοντας έτσι ένα διαφορετικό σήμα εξόδου (και μια αντίστοιχα διαφορετική - σε σχέση με την είσοδο - φασματική πυκνότητα)
 - **Μην ξεχνάτε:** η φασματική πυκνότητα είναι απλά μια **συχνοτική περιγραφή** ενός σήματος **με όρους ενέργειας ή ισχύος ανά συχνότητα!** (αντί για πλάτος + φάση ανά συχνότητα)
- Αν υποθέσουμε ότι τα ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται από κρουστικές αποκρίσεις που είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες (και άρα έχουν μετασχ. Fourier = απόκριση σε συχνότητα), τότε η φασματική πυκνότητα του συστήματος θα είναι

$$\Phi_h(f) = |H(f)|^2$$

- Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

Για το σπίτι..

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Διαισθητική σύνοψη
- ΓΧΑ συστήματα:
 - Η σχέση

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

δεν πρέπει να σας εκπλήσσει

- Γιατί γνωρίζετε ότι

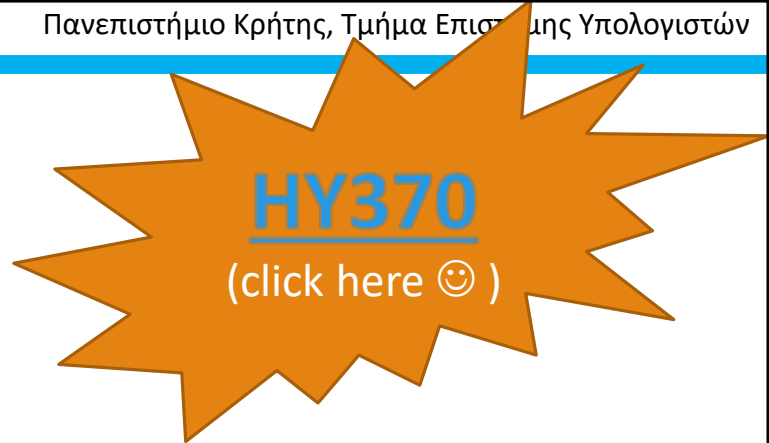
$$Y(f) = X(f)H(f)$$

για σήματα ενέργειας, ενώ για περιοδικά σήματα

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Αν υψώσετε τα μέτρα των σχέσεων αυτών στο τετράγωνο, θα πάρετε τα αποτελέσματα των φασματικών πυκνοτήτων που είδαμε σε αυτή τη διάλεξη!! 😊

- Μια γρήγορη ματιά στο HY370...
- Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

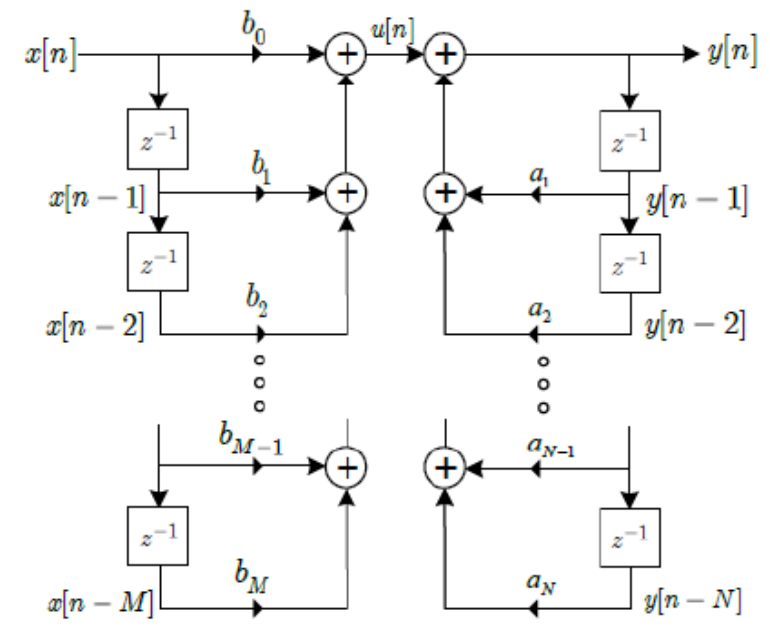
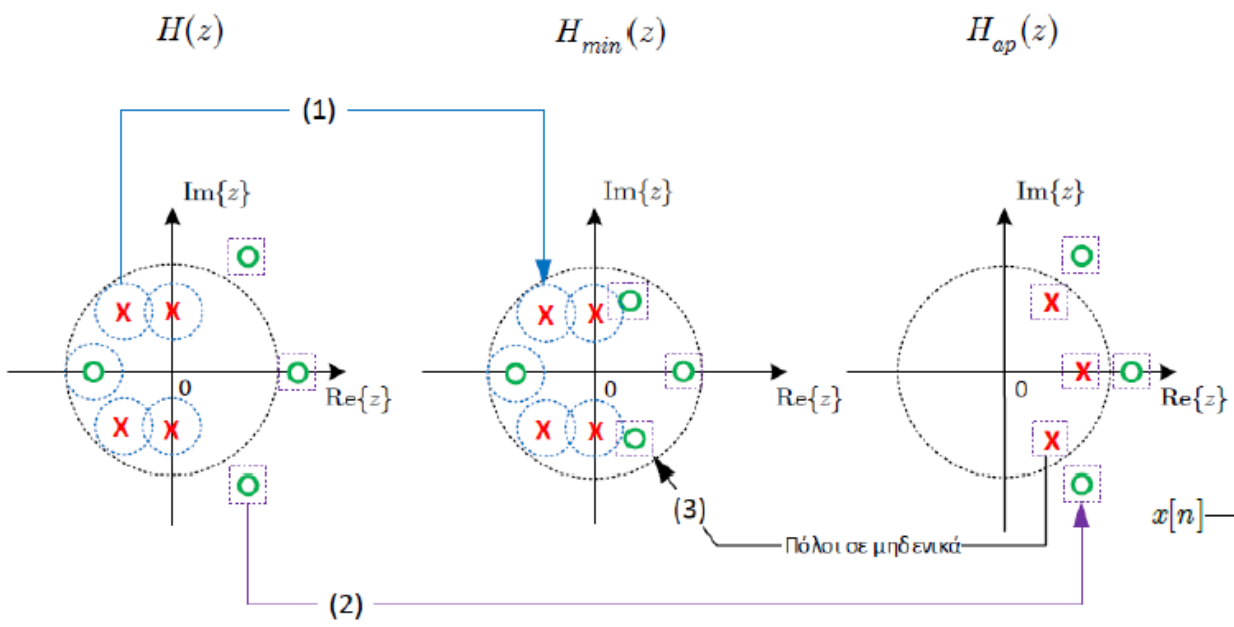
- Μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- ΓΧΑ συστήματα

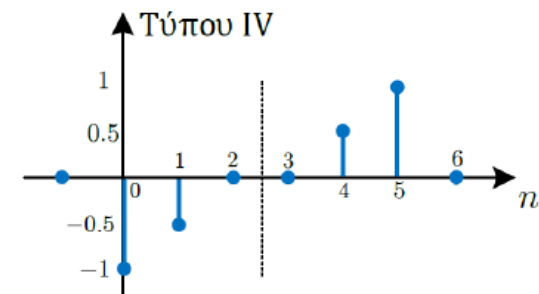
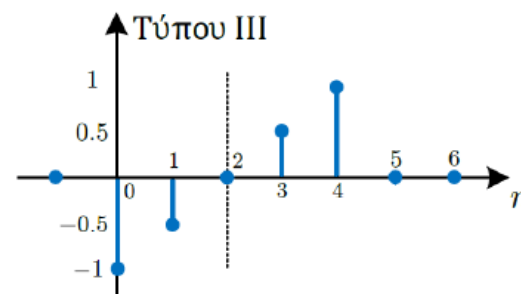
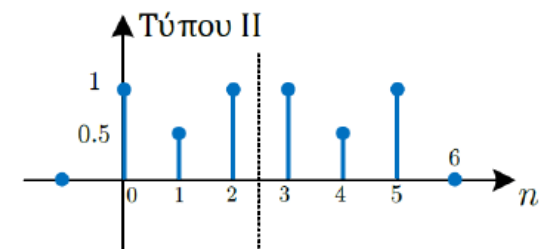
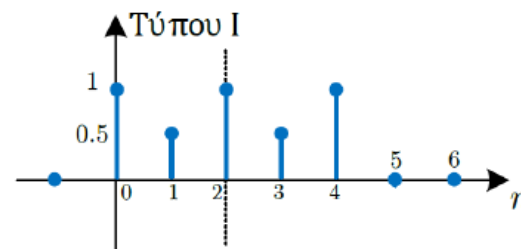
$$\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^N b_l x[n-l]$$

- Μια γρήγορη ματιά στο HY370...
- Συστήματα ελάχιστης φάσης, αντίστροφα συστήματα, συστήματα all-pass

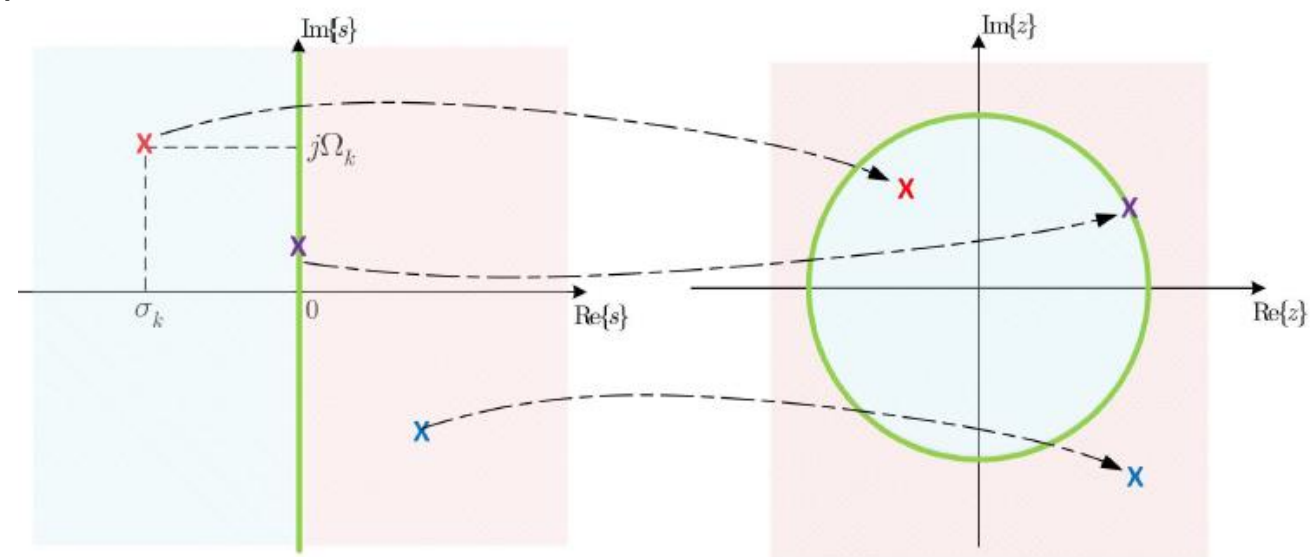


- Υλοποιήσεις συστημάτων

- Μια γρήγορη ματιά στο ΥΥ370...
- Συστήματα γραμμικής φάσης

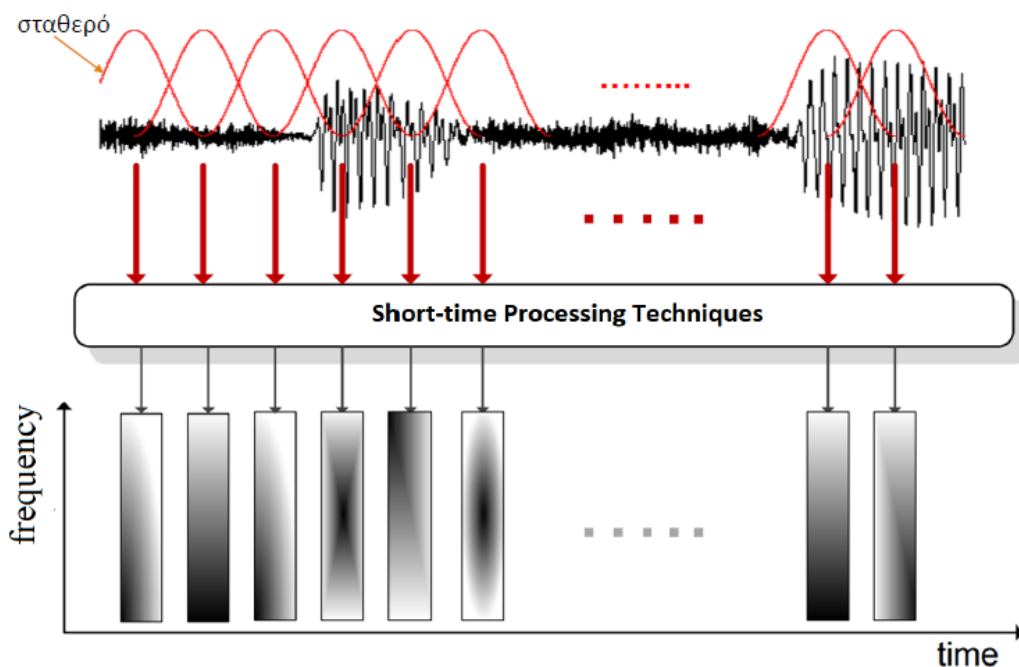
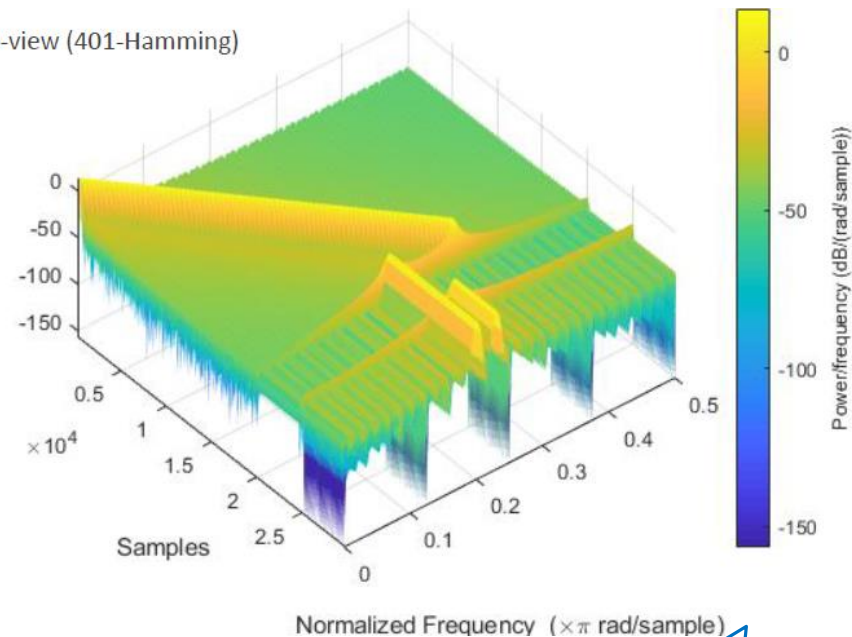


- Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων



- Μια γρήγορη ματιά στο HY370...
- Φασματική Ανάλυση
- Short Time Fourier Transform

• 3D-view (401-Hamming)



HY370

- Ίδια δομή με HY215
- Εργαστηριακές ασκήσεις (~4-5) (πραγματικές mini-εφαρμογές)
- Θεωρητικές ασκήσεις (~4-5)
- Project (πραγματική εφαρμογή)
- Εξετάσεις προόδου
- Τελική εξέταση

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

