ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

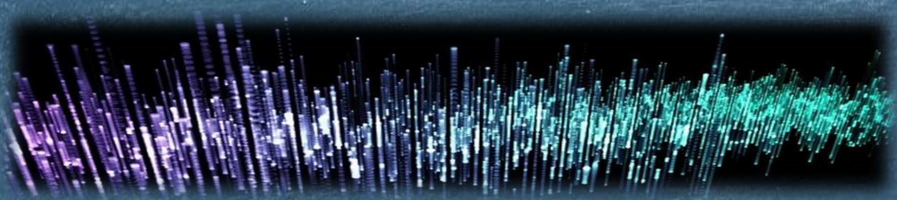
ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Τι περιέχει το HY215?

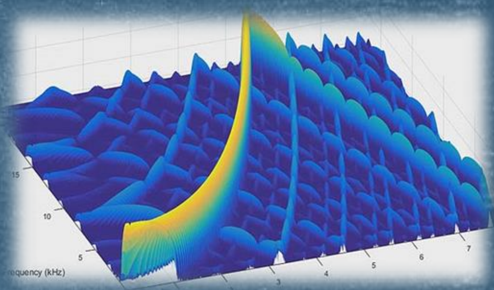
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ~~Τυχαία Σήματα~~
- Δειγματοληψία



- **Συσχετίσεις (review…)**

REMINDER

- **Περιοδικά Σήματα**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ενέργειας**

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων
- Θα λάβουμε ιδιαίτερη βοήθεια σχετικά με τα σήματα ισχύος που **δεν** έχουν μετασχηματισμό Fourier
  - Εξίσου σημαντικές είναι όμως και για τα υπόλοιπα σήματα
- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι **φασματικές πυκνότητες σχετίζονται** με τους ***μετασχηματισμούς Fourier*** των σημάτων που εμπλέκονται στις συσχετίσεις τους
  - …δηλ. των μετασχ. Fourier των σημάτων $x(t), y(t)$
- Πριν ξεκινήσουμε με τα σήματα ενέργειας πρώτα, ας κάνουμε έναν «περίπατο» στην έννοια της ενέργειας!

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- <u>**Ερώτηση**</u>: τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε (π.χ.) την ενέργεια ενός σήματος?
- Ο Parseval μας έχει ήδη πει <u>μια</u> απάντηση
  - *«Ολοκληρώστε τη συνάρτηση $|X(f)|^2$ ως προς f. Η τιμή που θα πάρετε αποτελεί την ενέργεια του σήματος»*

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- Άρα η συνάρτηση $G(f) = |X(f)|^2$ παίζει μεγάλο ρόλο στην υπόθεση «ενέργεια»!
  - Η συνάρτηση αυτή μας πληροφορεί για το πως μεταβάλλεται η ποσότητα $|X(f)|^2$ ως προς τις διάφορες συχνότητες
  - Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αν το παραπάνω ολοκλήρωμα μας δίνει τη **συνολική** ενέργεια του σήματος, ένα ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει διαφορετικά άκρα ολοκλήρωσης θα μας δίνει μια **μερική** ενέργεια του σήματος
    - …ή εναλλακτικά, μας δίνει την ενέργεια σε μια συγκεκριμένη «μπάντα» συχνοτήτων που εμείς επιλέγουμε ως άκρα ολοκλήρωσης

$$E_{[f_1,f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$

- Άρα η συνάρτηση $G(f) = |X(f)|^2$ μας πληροφορεί για το πως **κατανέμεται** η **ενέργεια** του σήματος **στις διάφορες συχνότητες**!

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Αν θελήσουμε να απεικονίσουμε γραφικά τη συνάρτηση αυτή, $G(f) = |X(f)|^2$, τι πρέπει να κάνουμε?
  - …ώστε να έχουμε μια εικόνα της κατανομής της ενέργειας του σήματος $x(t)$ στο χώρο της συχνότητας

- Πρέπει να:
  1. Υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$
  2. Βρούμε το μέτρο του στο τετράγωνο, $|X(f)|^2 = X_R^2(f) + X_I^2(f)$

- Υπάρχει πιο εύκολος/εναλλακτικός τρόπος?

- Το φάσμα $|X(f)|^2$ αντιστοιχεί σε κάποιο σήμα $g(t)$ στο χρόνο?
  - …έτσι ώστε ο μετασχ. Fourier του σήματος αυτού να μας δώσει κατευθείαν αυτό που θέλουμε?
  - Αν ναι, τι σχέση έχει το σήμα $g(t)$ με το σήμα $x(t)$ το οποίο μελετάμε ενεργειακά στο χώρο της συχνότητας?

- Οι ερωτήσεις αυτές θα απαντηθούν στη συνέχεια ☺
  - …τόσο για σήματα ενέργειας όσο και για σήματα ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Ας ξεκινήσουμε με τα σήματα ενέργειας
- Ορολογία:
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή*** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Την κατανομή της ενέργειας του σήματος $x(t)$, ή
  - Την από κοινού κατανομή της ενέργειας των σημάτων $x(t), y(t)$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$x(\tau + t_0) \leftrightarrow X(f)e^{j2\pi f t_0}$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t)\, e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\left(X(f)e^{j2\pi f t}\right)dt$$

$$= X(f)\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j2\pi f t}dt = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 \rightsquigarrow G(f)$$

- Άρα ο **μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας** ισούται με $|X(f)|^2$

$$\boxed{\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2}$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος
- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \qquad x(t) \in \Re$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \qquad \forall f$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+0)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier θα είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \bigg|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x}$$

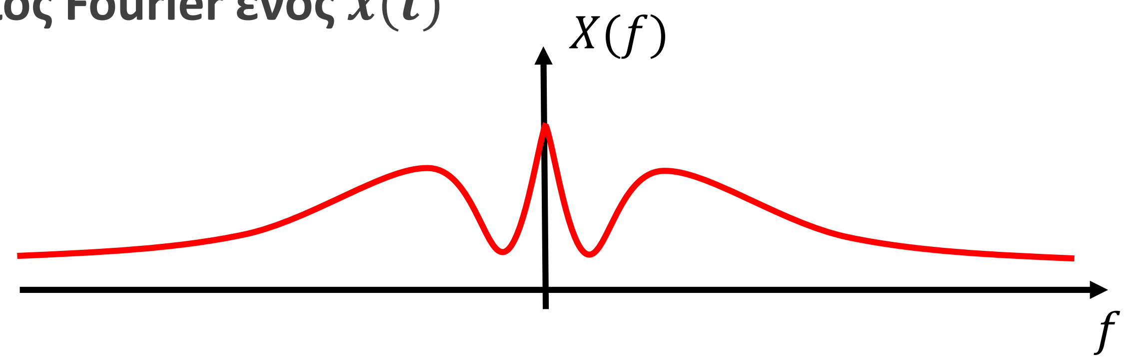
- **Επιβεβαιώνουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

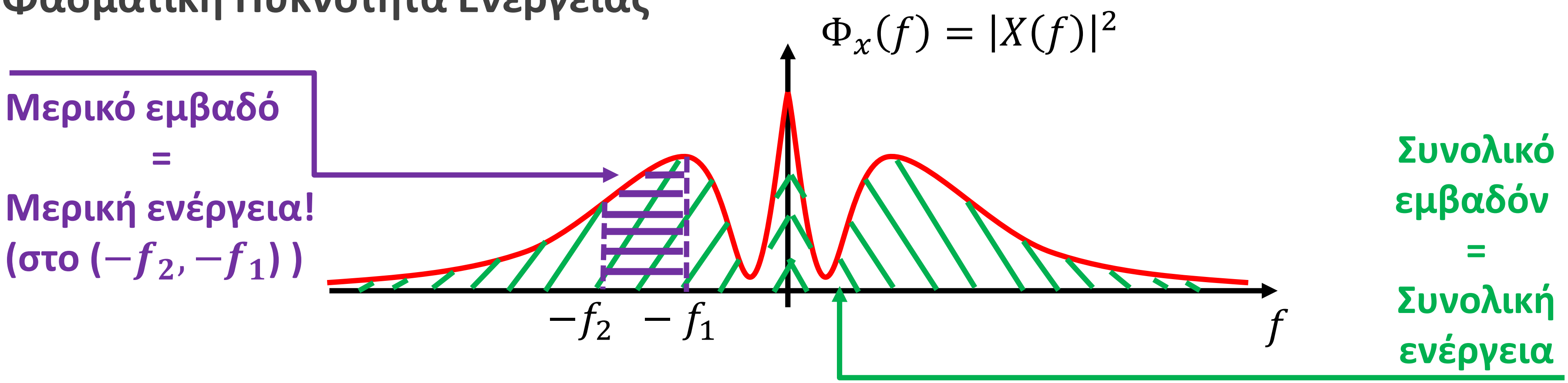
$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Συνάρτηση κατανομής ενέργειας ως προς f

- **Παράδειγμα:**
  Μετασχηματισμός Fourier ενός $x(t)$



- **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας**



- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)\\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}}$$

- Παρατηρήστε ότι αφού

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau), \qquad x(t), y(t) \in \Re$$

ισχύει ότι

$$\boxed{\Phi_{xy}(f) = \Phi^*_{yx}(f)}$$

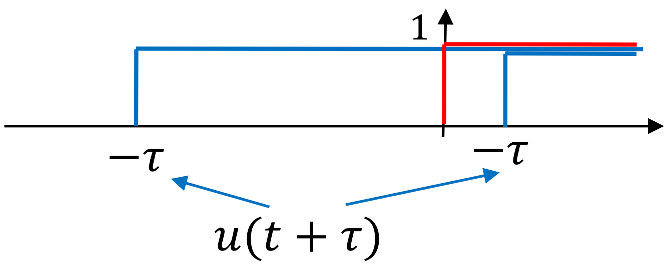
$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$

$x(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(f)$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

1



○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-2at}u(t), \qquad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

(a) Είναι

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)\cdot e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-2at}\cdot e^{-2a\tau}u(t)u(t+\tau)\,dt$$

$$= e^{-2a\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at}u(t)u(t+\tau)\,dt \quad (1)$$

Είναι $u(t)=1, \boxed{t>0,}$ ενώ $u(t+\tau)=1,\ t+\tau>0 \Rightarrow \boxed{t>-\tau}$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

- $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt$

$$= e^{-2a\tau}\left(-\frac{1}{3a} e^{-3at}\right)\Big]_{-\tau}^{+\infty} = e^{-2a\tau}\left(-\frac{1}{3a}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-3at} - e^{3a\tau}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau}\left(0 - e^{3a\tau}\right) = \frac{1}{3a} e^{a\tau}, \ \tau<0 = \frac{1}{3a} e^{a\tau} u(-\tau).$$

- $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt$

$$= e^{-2a\tau}\left(-\frac{1}{3a} e^{-3at}\right)\Big]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-3at} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau}\left(0 - 1\right) = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau}, \ \tau>0 = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau} u(\tau).$$

Συνολικά, $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{-2a\tau} u(\tau) + e^{a\tau} u(-\tau)\right).$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

(β) $\varphi_{xy}(\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$

$$X^*(f) = \frac{1}{a-j2\pi f}$$

Είναι $x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$

$y(t) = e^{-2at}u(t),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f) = \frac{1}{2a+j2\pi f}$

Άρα $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \frac{1}{(a-j2\pi f)(2a+j2\pi f)} =$

$= \frac{A}{a-j2\pi f} + \frac{B}{2a+j2\pi f}$, μπορούμε να βρούμε ότι $A = \frac{1}{3a} = B$

Οπότε $\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{2a+j2\pi f}$, κι από πίνακες

έχουμε $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau)\right)$.

Συνεχίζεται... ☺