

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14^Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες



Τι περιέχει το ΗΥ215?



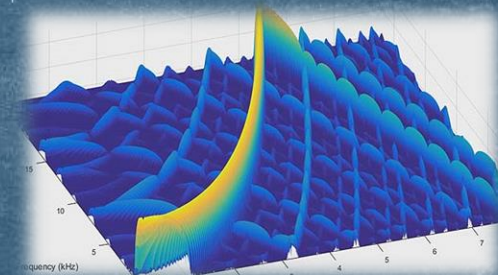
1^ο Κομμάτι

- ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier



2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Laplace
- ▶ Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ▶ ~~Τυπικά Σήματα~~
- ▶ Δειγματοληψία



• Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- Ως τώρα μελετήσαμε σήματα και την επίδραση των συστημάτων επάνω τους
 - Μελετήσαμε μεμονωμένα σήματα και συστήματα
- Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τις *ομοιότητες* μεταξύ σημάτων
- Παράδειγμα εφαρμογής
 - Ανίχνευση απόστασης στόχου



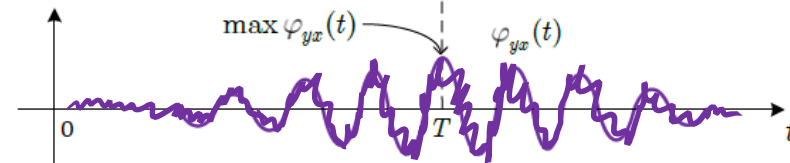
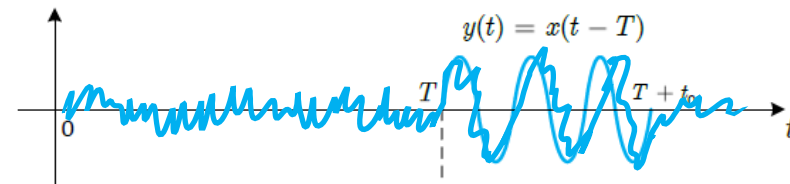
• Έννοια της *συσχέτισης*

- Το ανακλώμενο σήμα πρέπει να συσχετιστεί με το εκπεμφθέν για βρεθεί τόσο η παρουσία ενός στόχου όσο και η απόστασή του από τη θέση αναφοράς
- Βρίσκει την *ομοιότητα* των δυο σημάτων στο πεδίο του χρόνου



• Έννοια της *φασματικής πυκνότητας*

- Αποτελεί την εικόνα των συσχετίσεων στο χώρο του Fourier
- Δείχνει την *κατανομή της ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος ή την από κοινού κατανομή δυο σημάτων* ανά συχνότητα



- **Συσχετίσεις**
- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**
- Η αυτοσυσχέτιση συσχετίζει ένα σήμα (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *με τον εαυτό του*
 - Συνάρτηση του χρόνου (**μετατόπισης**) που εκφράζει την ομοιότητα του σήματος σε σχέση με **μετατοπισμένες** «εκδόσεις» (καθυστερήσεις) του εαυτού του
 - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Η ετεροσυσχέτιση συσχετίζει δυο σήματα (περιοδικά ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *μεταξύ τους*
 - Συνάρτηση του χρόνου (**μετατόπισης**) που εκφράζει την ομοιότητα ενός σήματος σε σχέση με **μετατοπισμένες** «εκδόσεις» ενός άλλου σήματος
 - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Είναι βολικό να μελετήσουμε τις συσχετίσεις ανάλογα με το είδος του σήματος
 - Περιοδικά σήματα
 - Σήματα ισχύος
 - Σήματα ενέργειας

- Συσχετίσεις
- Περιοδική Αυτοσυσχέτιση
- Ορισμός:

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- «Τυφλή» ως προς την αρχική φάση του περιοδικού σήματος

- Συσχετίσεις

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

Έχουμε

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) x(t+\tau) dt = \dots \quad \text{?}$$

Όπως

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j 2\pi k f_0 \tau} \quad \text{①}$$

Είναι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \stackrel{\text{Euler}}{=} \underbrace{\frac{A}{2} e^{j\theta}}_{X_1} e^{j 2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j\theta}}_{X_{-1}} e^{-j 2\pi f_0 t}$$

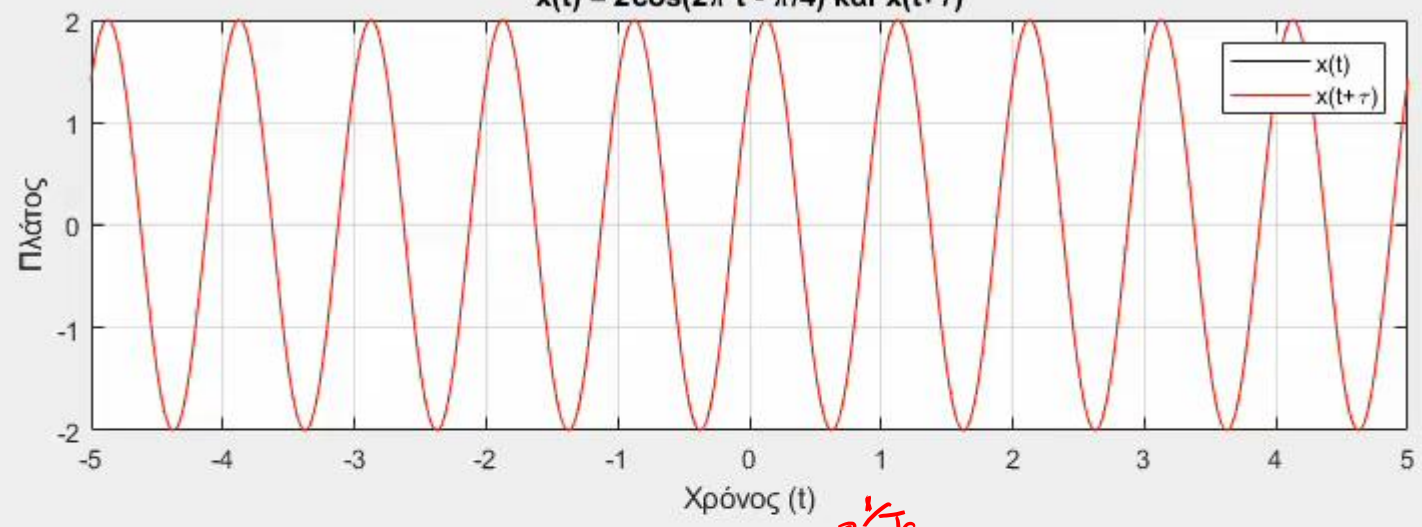
Άρα $|X_k|^2 = \frac{A^2}{4}, k=1, -1.$

Οπότε $\varphi_x(\tau) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A^2}{4} e^{j 2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4} e^{-j 2\pi f_0 \tau} \stackrel{\text{Euler}}{=} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$

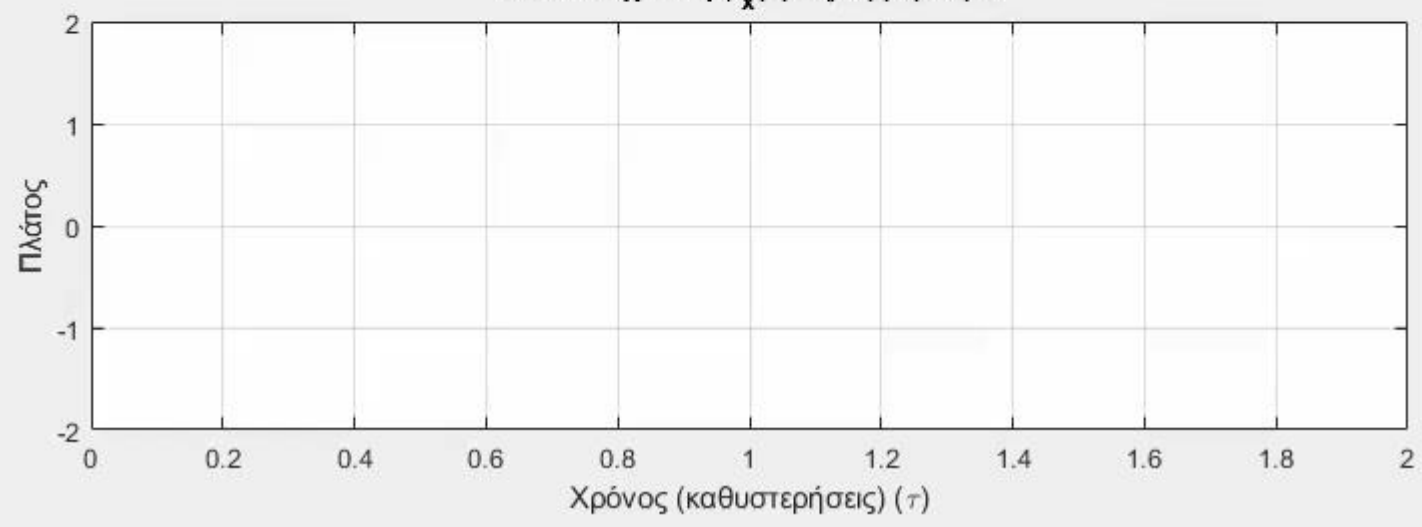
• Συσχετίσεις

$$2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$x(t) = 2\cos(2\pi t - \pi/4)$ και $x(t+\tau)$

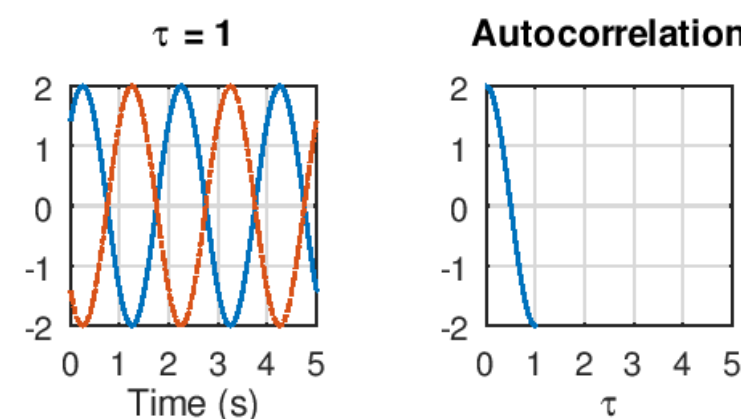
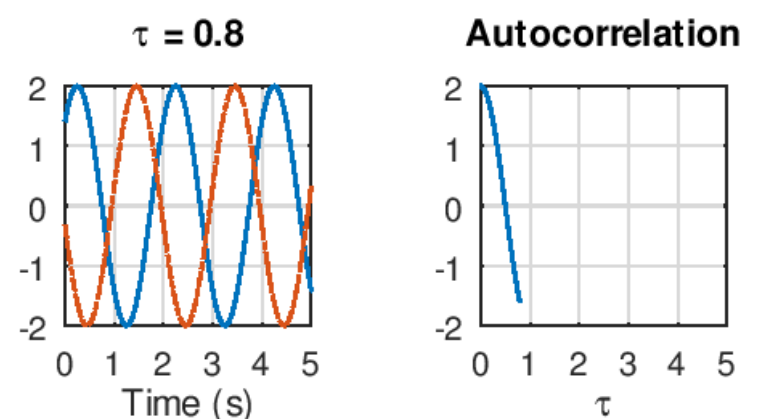
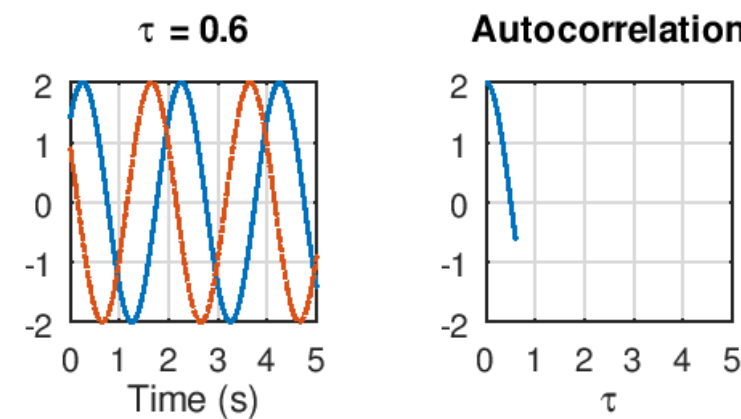
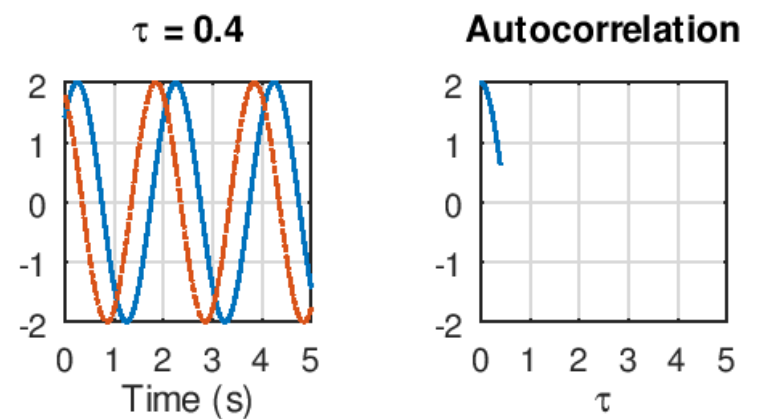
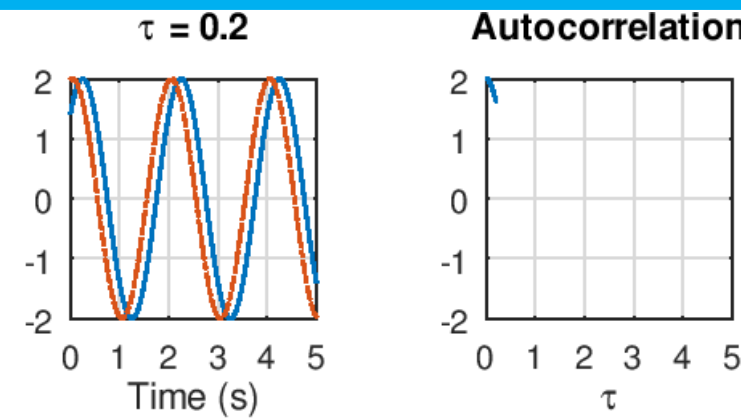
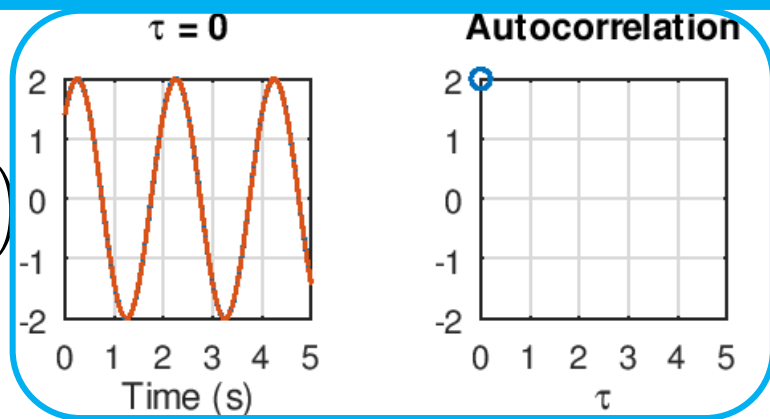


Αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$



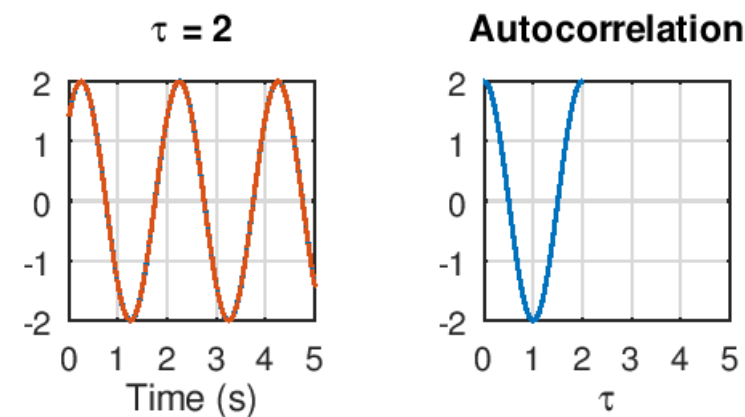
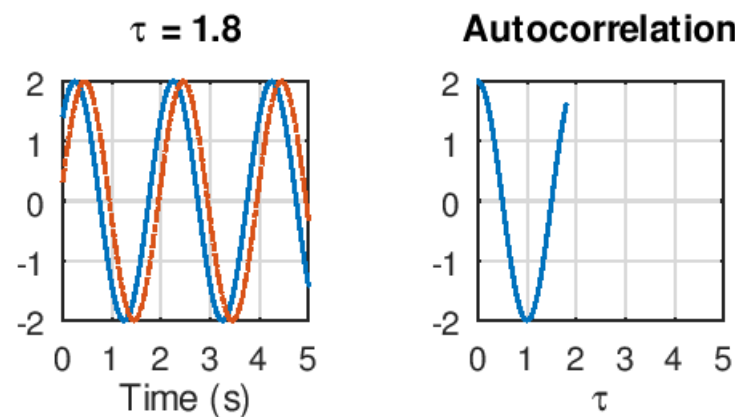
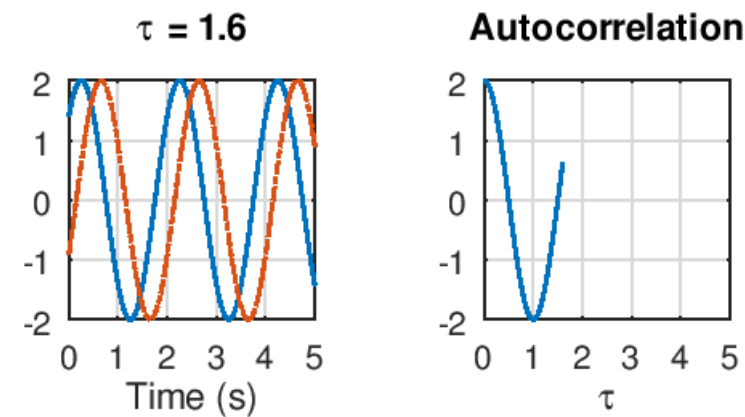
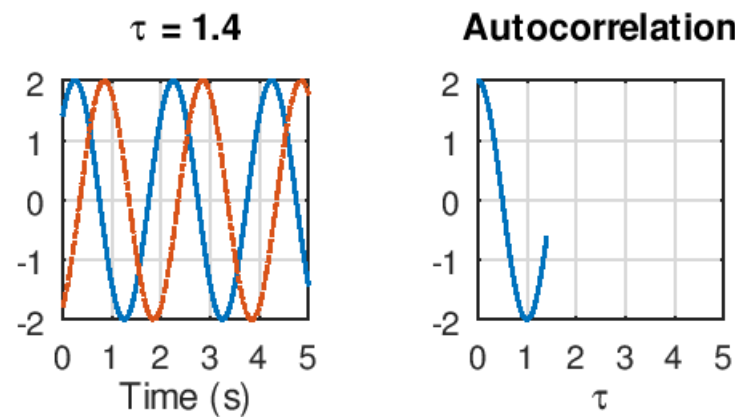
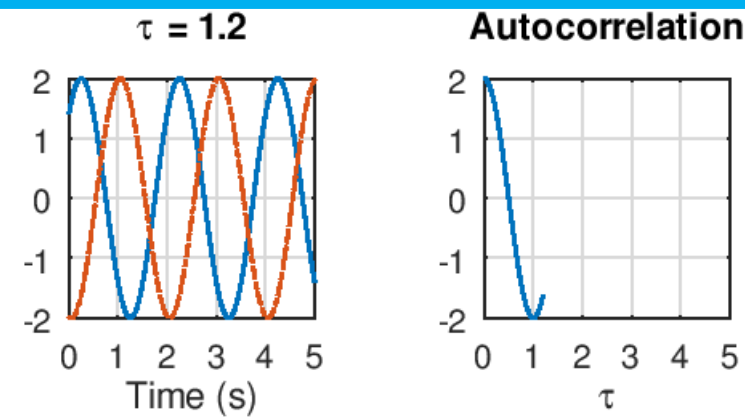
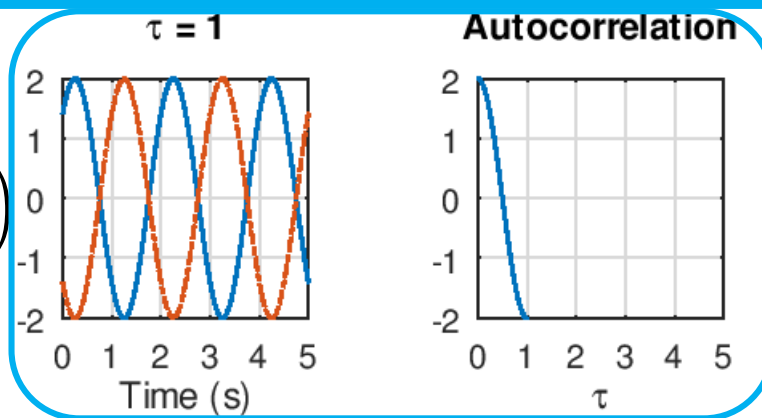
• Συσχετίσεις

$$x(t) = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$



• Συσχετίσεις

$$x(t) = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$



- Συσχετίσεις
- Περιοδική Ετεροσυσχέτιση

- Ορισμός:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)y(t + \tau)dt \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad , \quad y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- Προφανώς αν $y(t) = x(t)$ παίρνουμε τις σχέσεις της αυτοσυσχέτισης

- Συσχετίσεις
- Σήματα Ενέργειας
- Αυτοσυσχέτιση:

Μεταβλητή μας το t !

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t + \tau) dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t + \tau) dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t + \tau) dt$$

- Η συσχέτιση αποτελείται από το ολοκλήρωμα ενός γινομένου, που μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη! 😊
- Πριν τις συγκρίνουμε, ας δούμε πως κατασκευάζουμε το σήμα που μετατοπίζεται:

$$x(t + \tau)$$

ή

$$y(t + \tau)$$

- Συσχετίσεις

- Παράδειγμα:

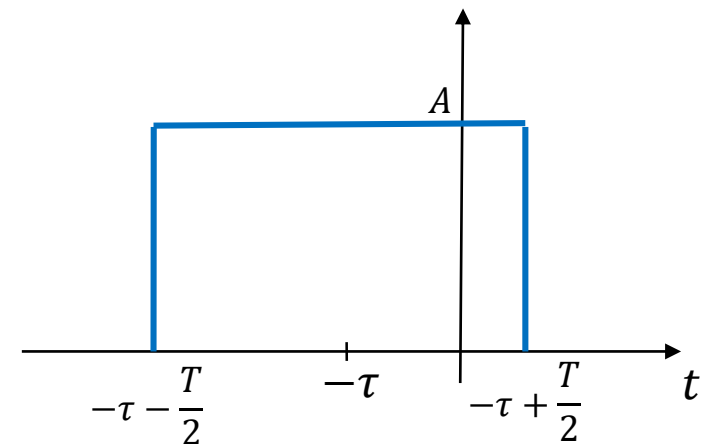
○ Έστω $x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.

Πρέπει να κατασκευάσουμε το σήμα $x(t + \tau)$

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

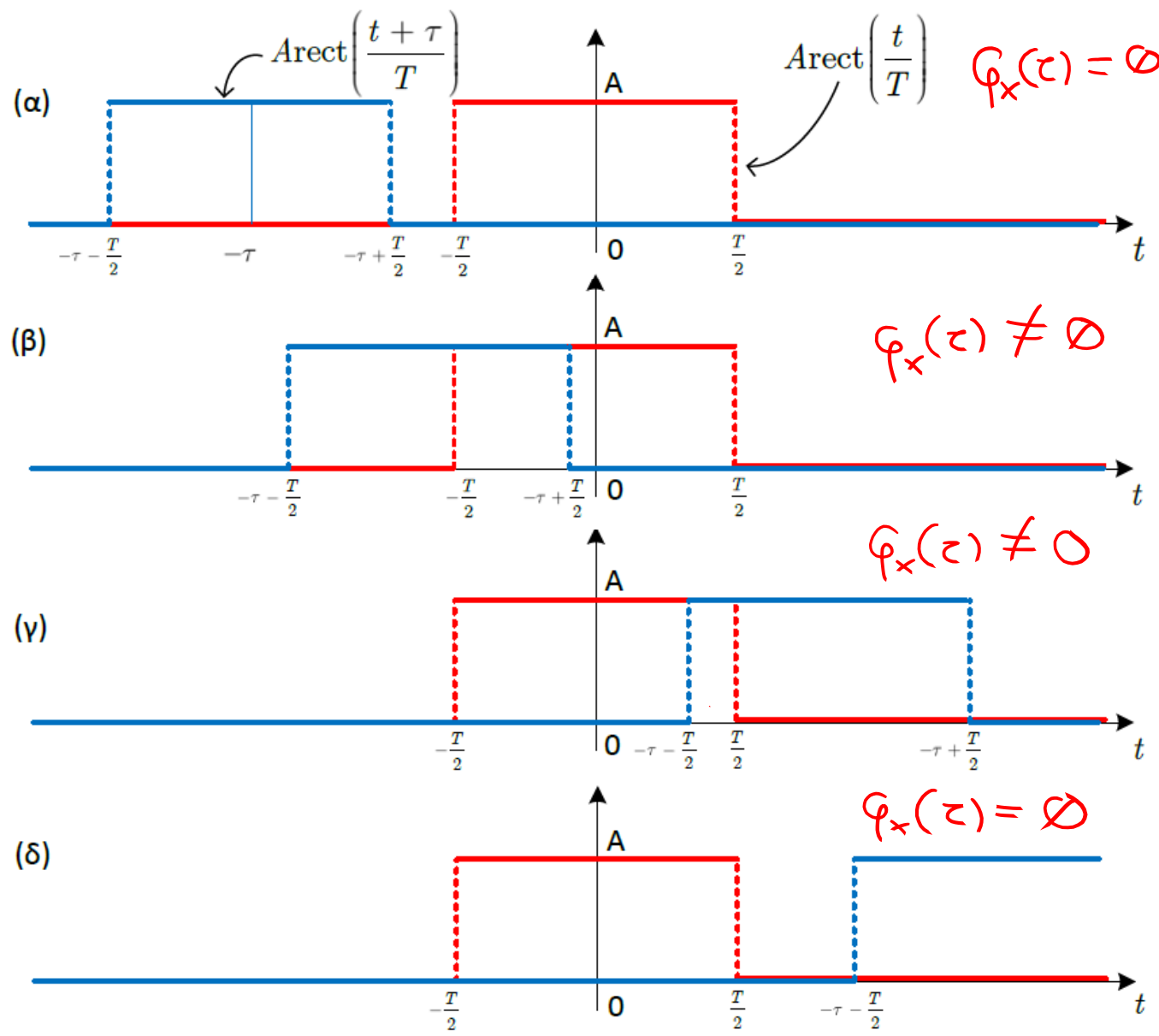
$$x(t + \tau) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t + \tau < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A, & -\tau - \frac{T}{2} < t < -\tau + \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

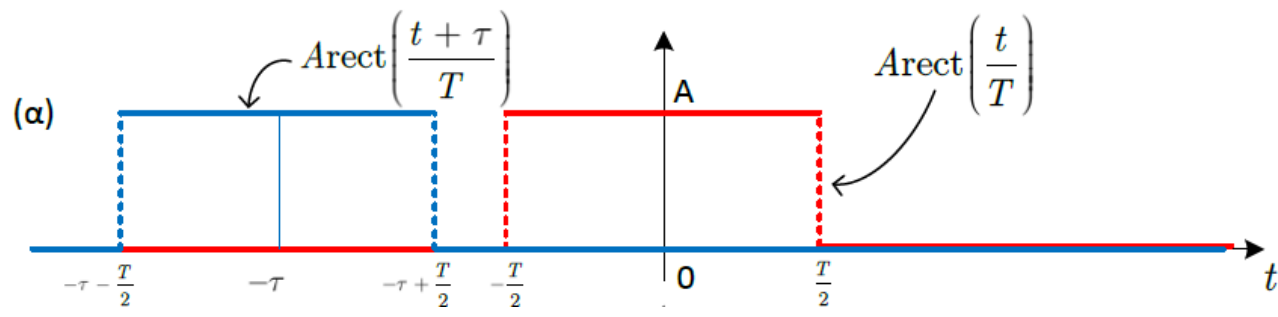


- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

○ Έστω $x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$,
 βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



$\phi_x(\tau) = 0,$

όσο $-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2}$

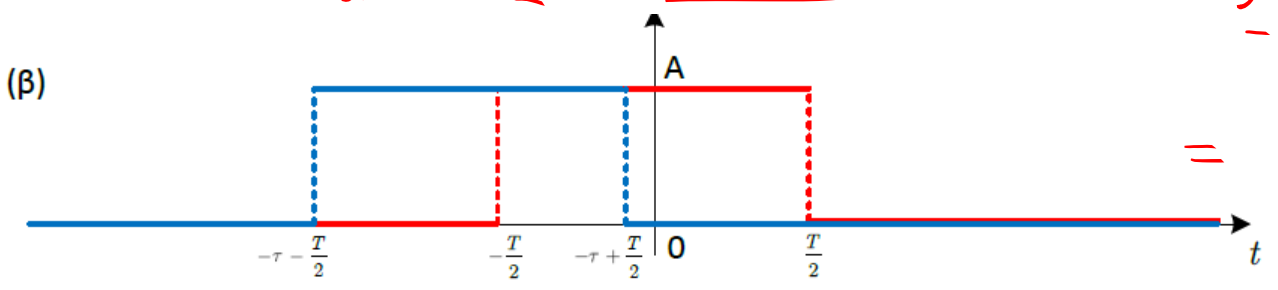
δηλ. $\tau > T$

• $-\frac{T}{2} < -\tau + \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau < T$ *

• $-\tau - \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > 0$

$\phi_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} A \cdot A \, dt$

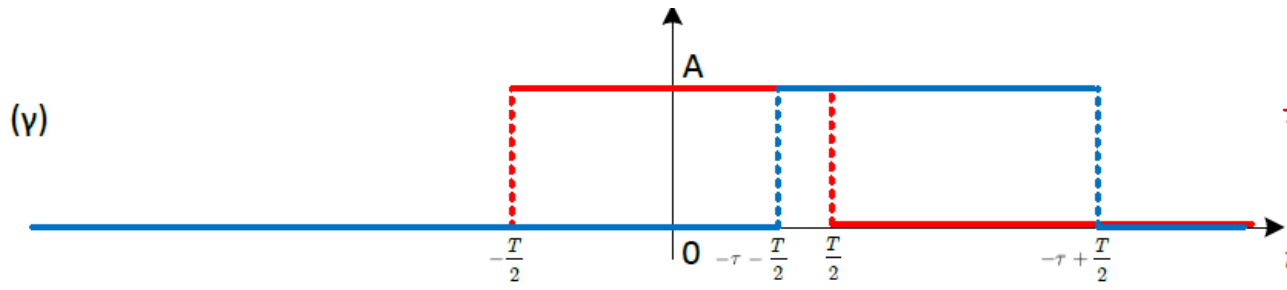
$= \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} A^2 \, dt$



$= A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} dt = A^2 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} = A^2 (T - \tau), \quad * \tau > 0 < T$

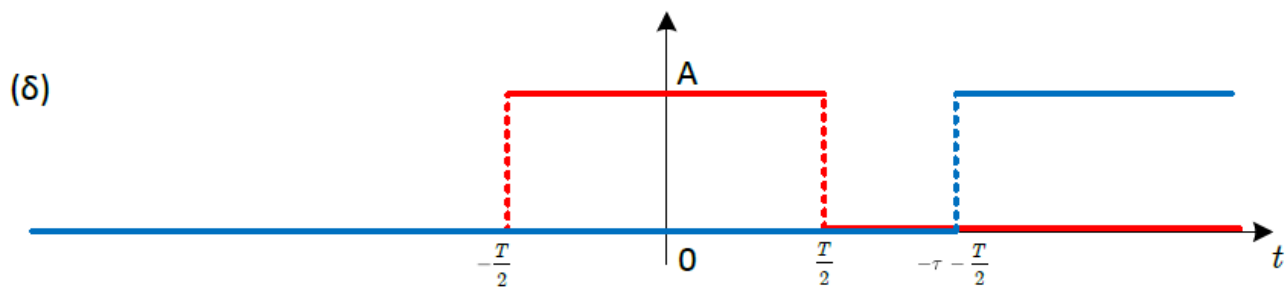
- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau) &= \int_{-\tau - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot A \cdot dt \\ &= \int_{-\tau - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 \int_{-\tau - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \\ &= A^2 (T + \tau), * \end{aligned}$$



- $-\tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau < 0}$ *
- $-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau > -T}$

$$\boxed{-T < \tau < 0}$$

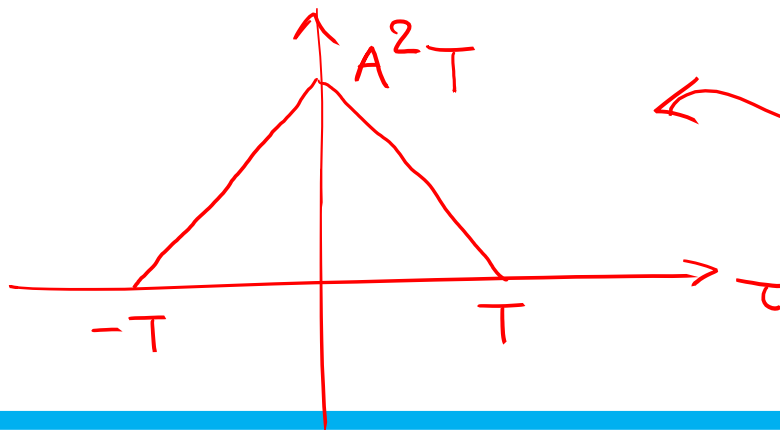


$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau) &= 0, \\ -\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{\tau < -T} \end{aligned}$$

- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

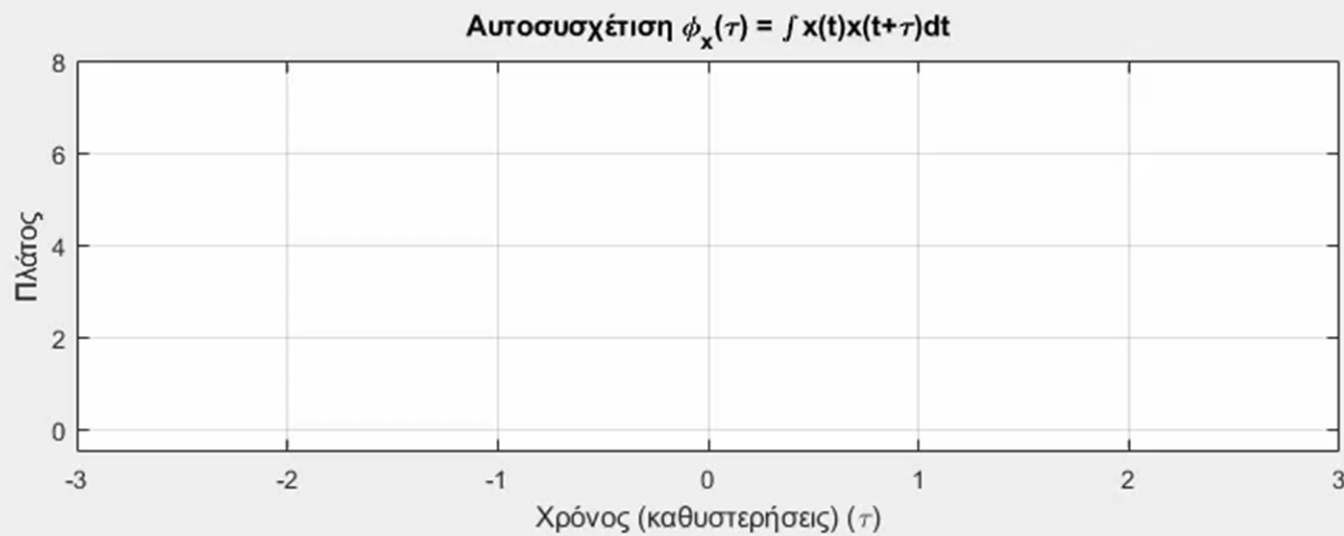
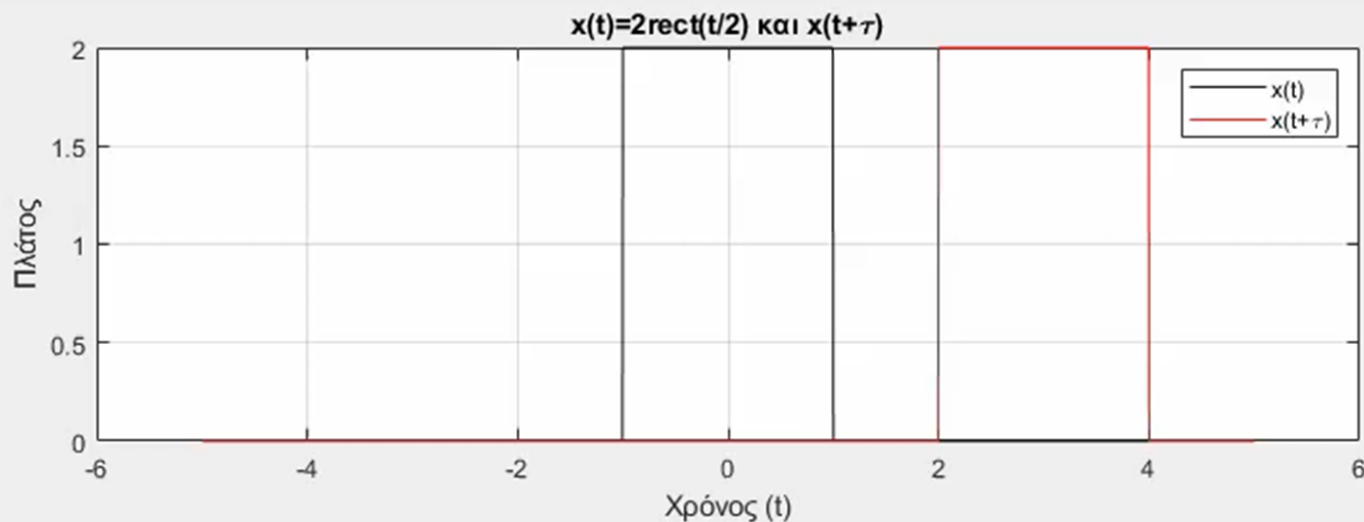
Άρα τελικά,

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > T, \quad \tau < -T \\ A^2(T - \tau), & 0 < \tau < T \\ A^2(T + \tau), & -T < \tau < 0 \end{cases}$$

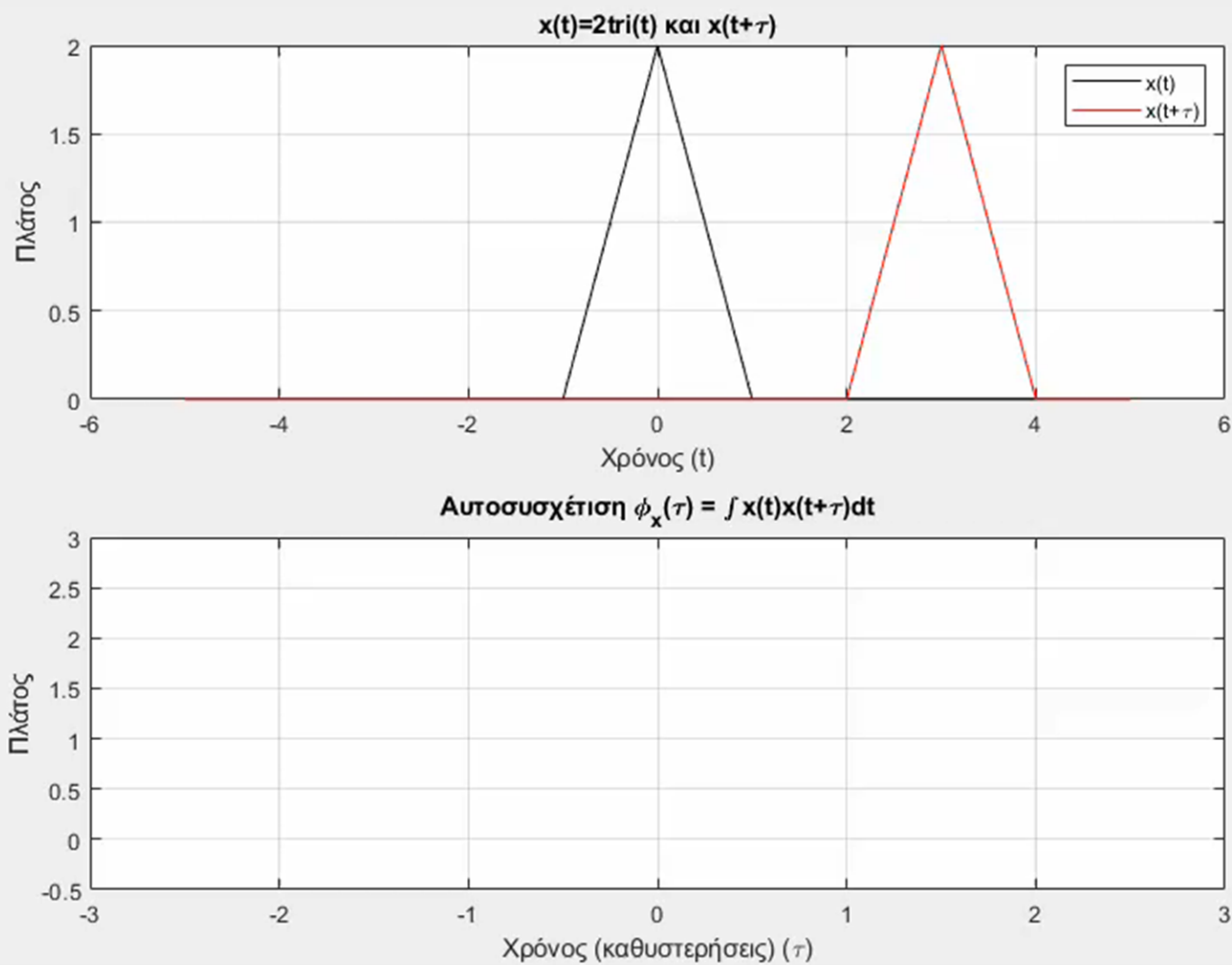


$$\leftarrow \varphi_x(\tau) = A^2 T \operatorname{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right).$$

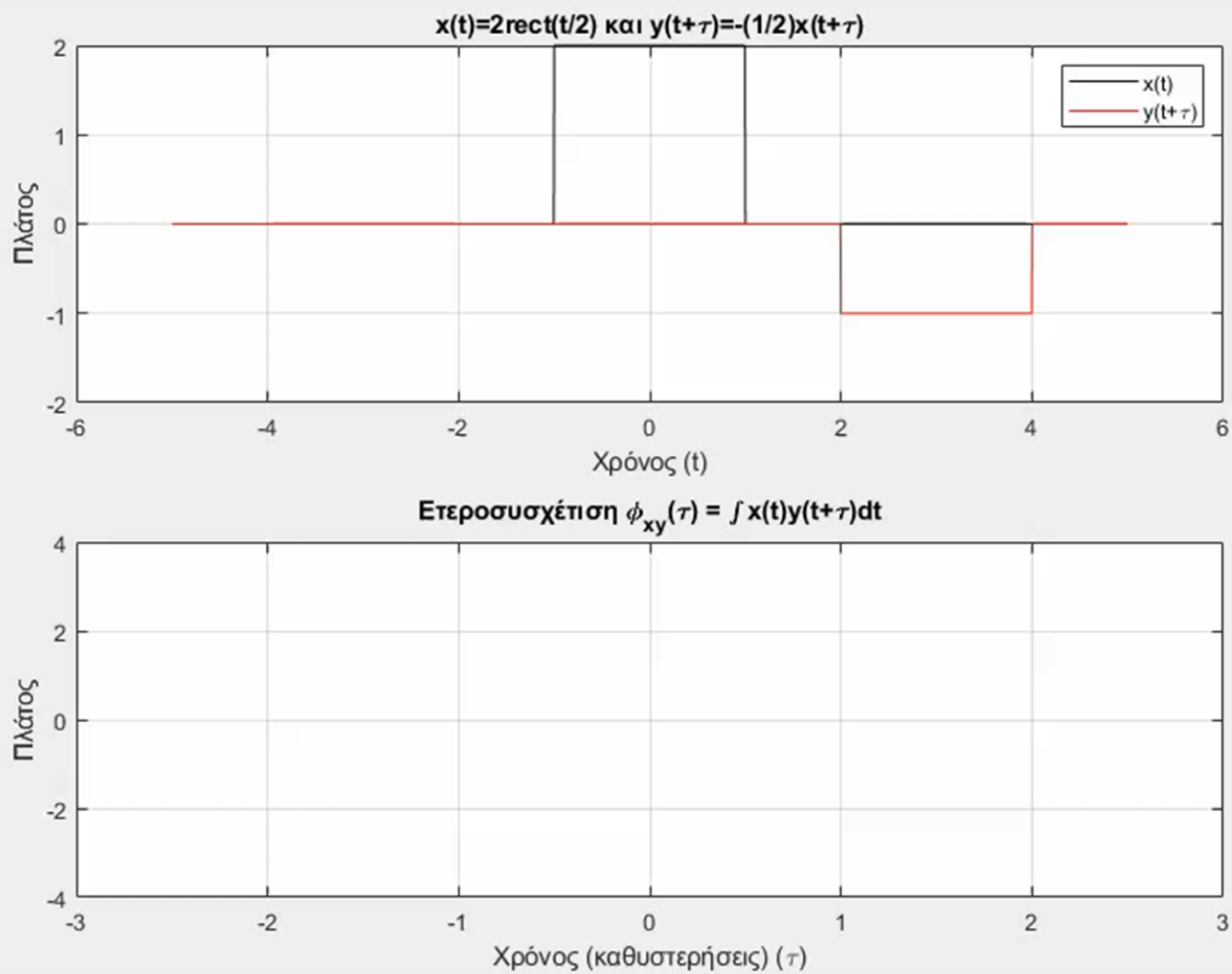
- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



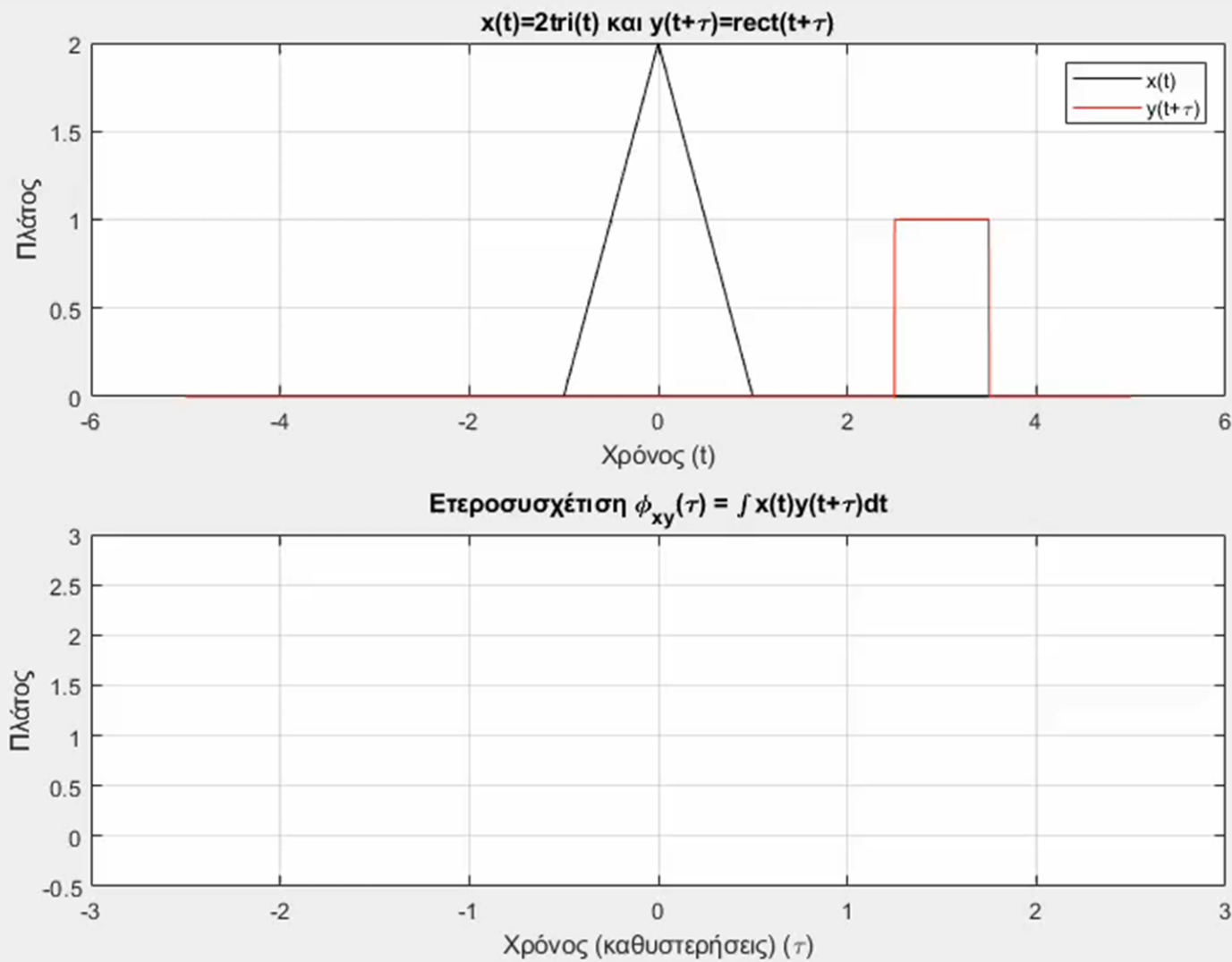
- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



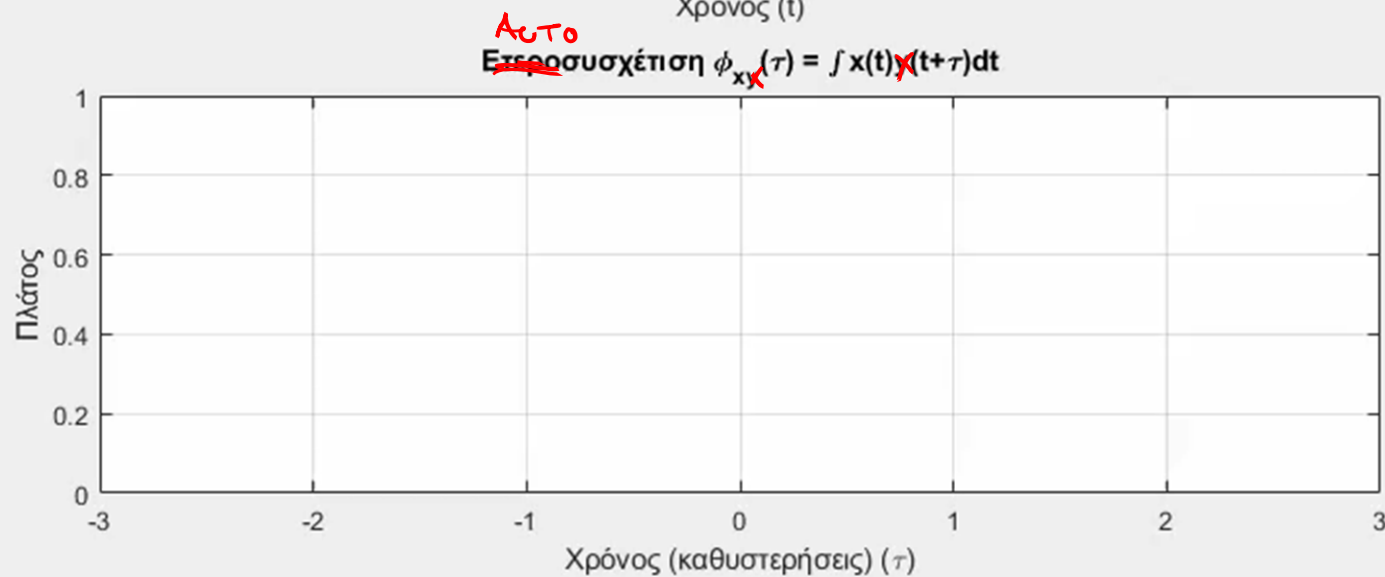
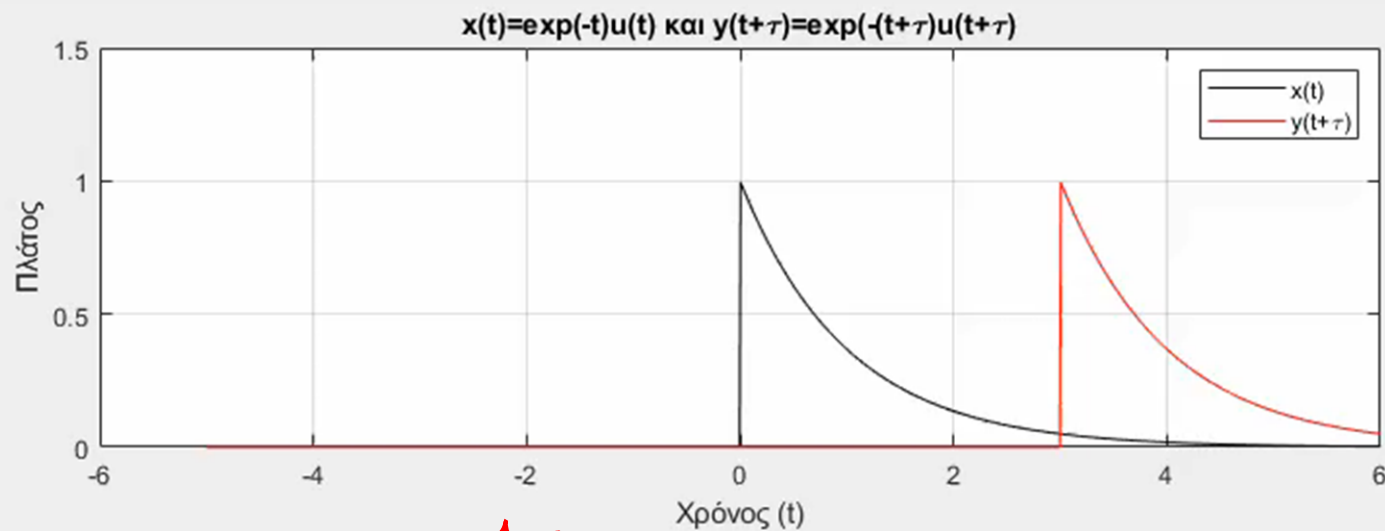
- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**
- Είναι εμφανές ότι ο ορισμός της συσχέτισης για σήματα ενέργειας μοιάζει πολύ με τον ορισμό της συνέλιξης (ελαφρώς «πειραγμένο» για λόγους εμφάνισης):

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t)dt = x(\tau) * y(\tau)$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau)$$

Η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη **χωρίς** τη χρονική αντιστροφή του ενός σήματος

- Προφανώς αν τα σήματα είναι πραγματικά, $x^*(\tau) = x(\tau)$

- Συσχετίσεις
- Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t + \tau)dt$$

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Προφανώς το T εδώ είναι μια οποιαδήποτε (μεγάλη) διάρκεια
- Ξανά η συζυγία παραλείπεται όταν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά σήματα
- Το ολοκλήρωμα επιλύεται επιλέγοντας ένα τμήμα του γινομένου, διάρκειας T , εκτελώντας το ολοκλήρωμα, και στέλνουμε στο τέλος το T στο άπειρο

- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

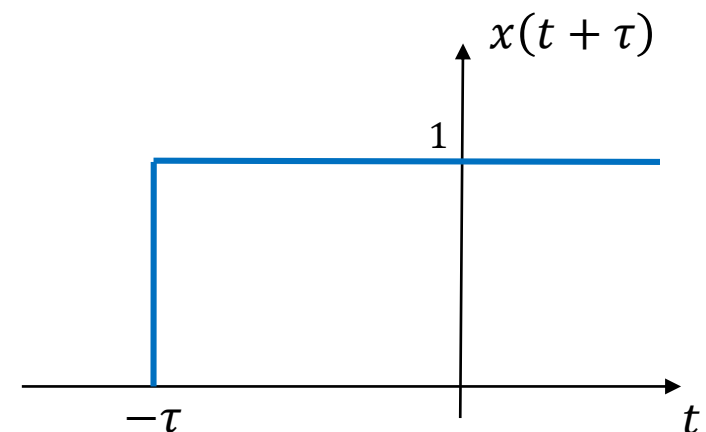
○ Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.

Πρέπει να κατασκευάσουμε το σήμα $x(t + \tau) = u(t + \tau)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$$

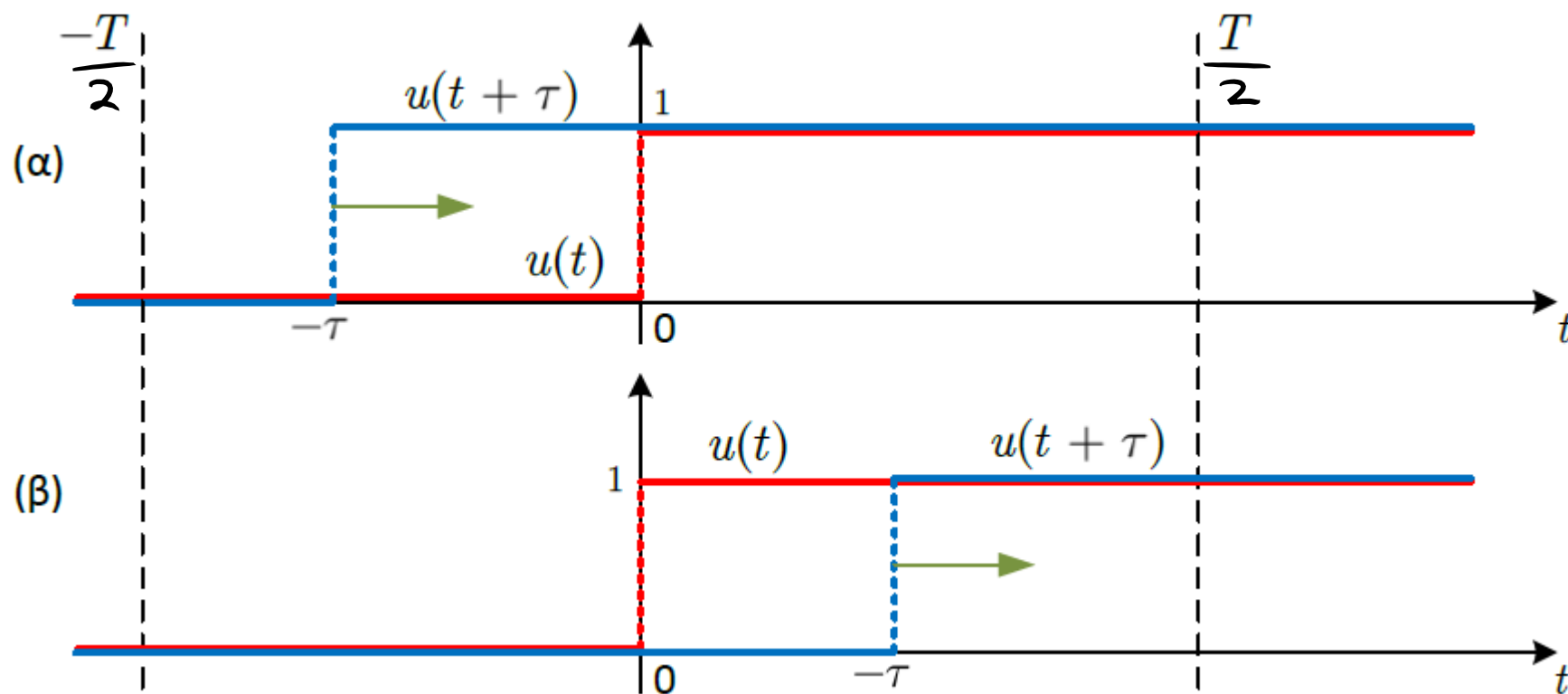
$$x(t + \tau) = \begin{cases} 1, & t + \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & t > -\tau \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$$

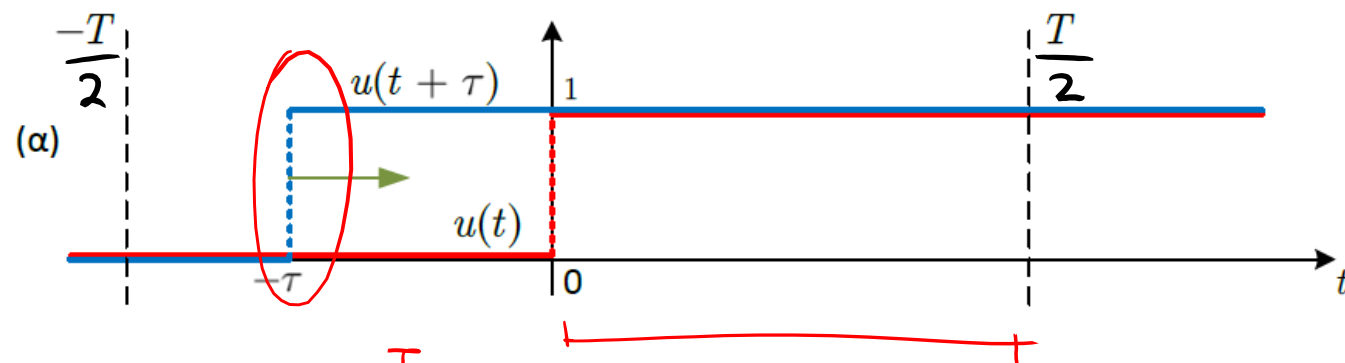


- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

○ Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

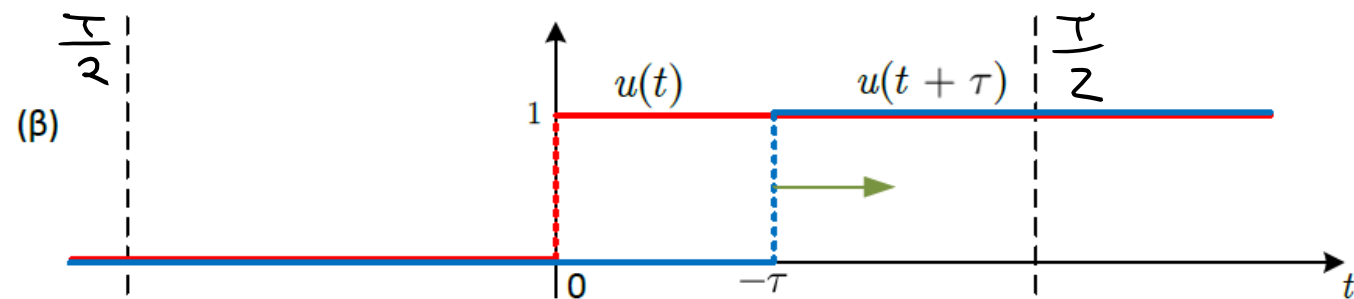


Είναι

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) u(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot 1 \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

για $-\tau < 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau > 0}$

- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:

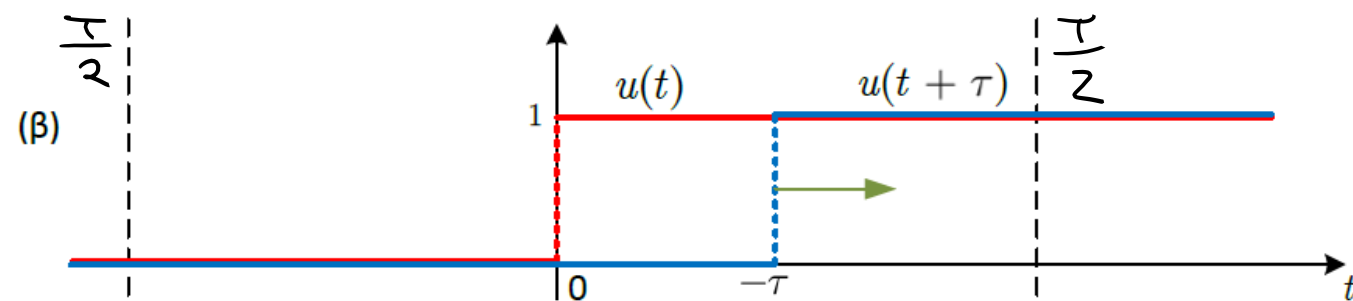


Είναι

$$\begin{aligned}
 \rho_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-H/2}^{H/2} x(t) x(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) u(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T/2} 1 \cdot 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} t \Big|_{-\tau}^{T/2} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \tau \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

για $-\tau > 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau < 0}$

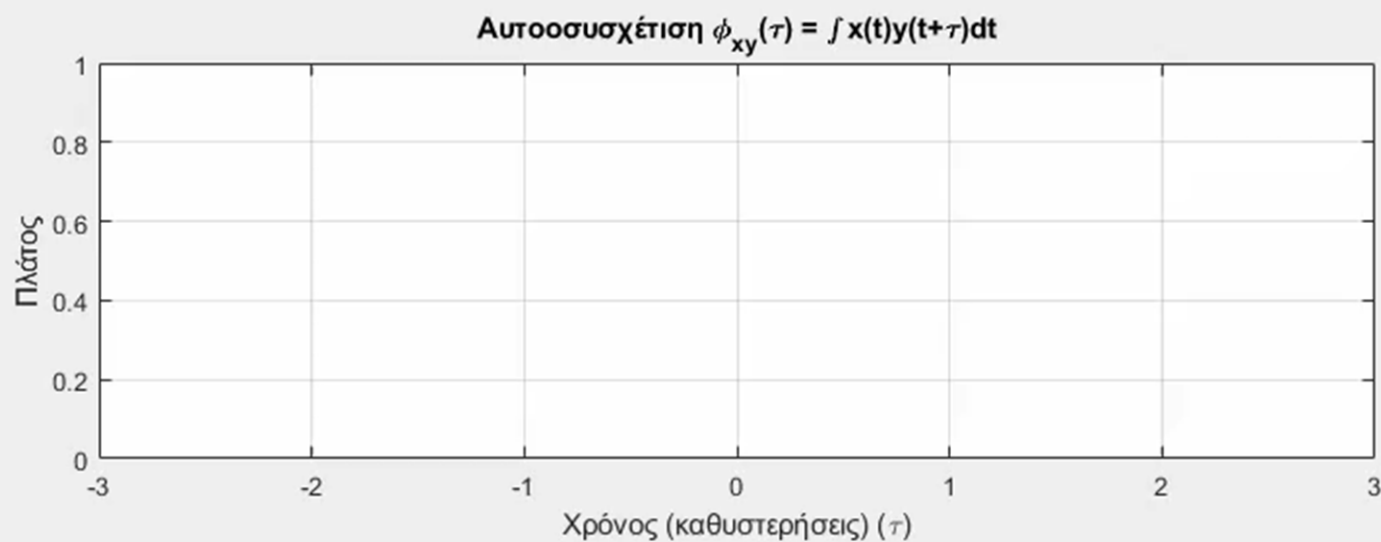
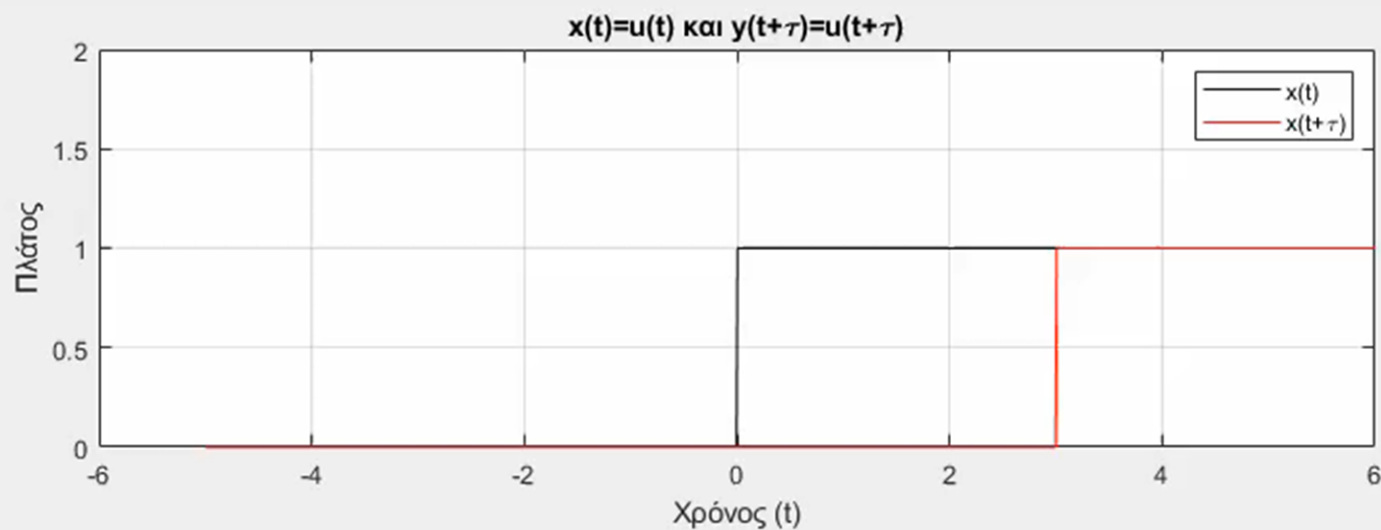
- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



Άρα συνολικά

$$f_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \forall \tau.$$

- Συσχετίσεις
- Παράδειγμα:



- Συσχετίσεις

- Ιδιότητες

1) Ισχύει ότι

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

2) Ισχύει ότι

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau)$$

για σήματα ενέργειας

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = E_x$$

3) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = P_x$$

για σήματα ισχύος

4) Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, το ίδιο είναι και η αυτοσυσχέτισή του (με την ίδια περίοδο) και μάλιστα

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(kT_0) = P_x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

5) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση του σήματος

6) Ισχύει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

7) Αν η ετεροσυσχέτιση είναι μηδενική για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$, τα σήματα λέγονται ασυσχέτιστα

$$\begin{aligned} \phi_x(kT_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t+kT_0)dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t)dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = P_x \end{aligned}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

