

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

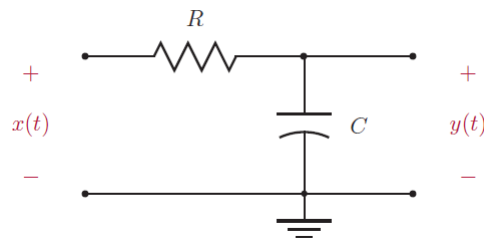
Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/5/2025

Ημερομηνία Παράδοσης : 3/6/2025, ως τις 16:00
είτε γραπτά στο γραφείο Η303, είτε ηλεκτρονικά

Οι ασκήσεις με [★] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 110/90 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο

Η κρουστική απόκριση ενός RC κυκλώματος όπως στο Σχήμα 1 δίνεται ως



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad (1)$$

(α) Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$.

(β) Αν $RC = \frac{1}{2\pi 80}$, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = 5 \cos(2\pi 20t)$.

(γ) Αν στην είσοδο εμφανιστεί ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές εκθετικής Σειράς Fourier

$$X_k = \frac{1}{5} \text{sinc} \left(\frac{k}{5} \right)$$

και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 20$ Hz, ποιά μορφή θα έχουν οι εκθετικοί συντελεστές Fourier στην έξοδο του συστήματος;

$$\text{Απ.: (α) } H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}, \text{ (β) } y(t) = 4.8507 \cos(2\pi 20t - 0.245), \text{ (γ) } X_k = \frac{\frac{1}{5}}{1 + j\frac{k}{4}} \text{sinc} \left(\frac{k}{5} \right)$$

Άσκηση 2 - Ο μετασχηματισμός Laplace

Βρείτε τους μετασχ. Laplace για τα παρακάτω σήματα με χρήση ιδιοτήτων και γνωστών ζευγών από έτοιμους πίνακες. Μην ξεχάσετε να βρείτε το πεδίο σύγκλισης!

(α) $x(t) = 3e^{-t}u(t) - 5e^{-3t}u(t)$

(β) $x(t) = 3e^{-t}u(t) + 2e^{3t}u(-t)$

(γ) $x(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t)$

$$(\delta') \quad x(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

$$(\epsilon) \quad x(t) = \cos(2t)u(t) + 2\sin(3t)u(t)$$

$$(\zeta') \quad x(t) = e^{-2t} \cos(3t)u(t)$$

Ασκηση 3 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αποδείξτε τα παρακάτω ζεύγη αντίστροφου μετασχ. Laplace αποκλειστικά με χρήση ιδιοτήτων και πινάκων ζευγών μετασχηματισμού (ξεκινώντας **πάντα** από το πεδίο του μετασχ. Laplace):

$$(\alpha') \quad X(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}, \quad \sigma > 0 \longleftrightarrow x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$(\beta') \quad X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+9)}, \quad \sigma > 0 \longleftrightarrow x(t) = \frac{1}{9}u(t) - \frac{1}{9}\cos(3t)u(t) + \frac{1}{3}\sin(3t)u(t)$$

$$(\gamma') \quad X(s) = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)(s-3)}, \quad -1 < \sigma < 2 \longleftrightarrow x(t) = \left(-\frac{5}{6}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-2t}\right)u(t) + \left(\frac{5}{12}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t}\right)u(-t)$$

$$(\delta') \quad X(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2 \longleftrightarrow x(t) = \delta(t) + 2e^{-2t}u(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

Ασκηση 4 - Συνέλιξη

Με χρήση μετασχ. Laplace βρείτε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$ και $y(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$.

$$\text{Απ.: } c_{xy}(t) = e^{-2t}u(t)$$

Ασκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα I

Ένα ΓΧΑ σύστημα για είσοδο $x(t) = u(t)$ επιστρέφει έξοδο

$$y(t) = (2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) \quad (2)$$

(α') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

$$\text{Απ.: } h(t) = (4e^{-t} - 4e^{-2t})u(t)$$

(γ') Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier, $H(f)$, του συστήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, εξηγήστε και βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

(δ') Βρείτε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$.

$$\text{Απ.: } \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 4x(t)$$

Ασκηση 6 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα II

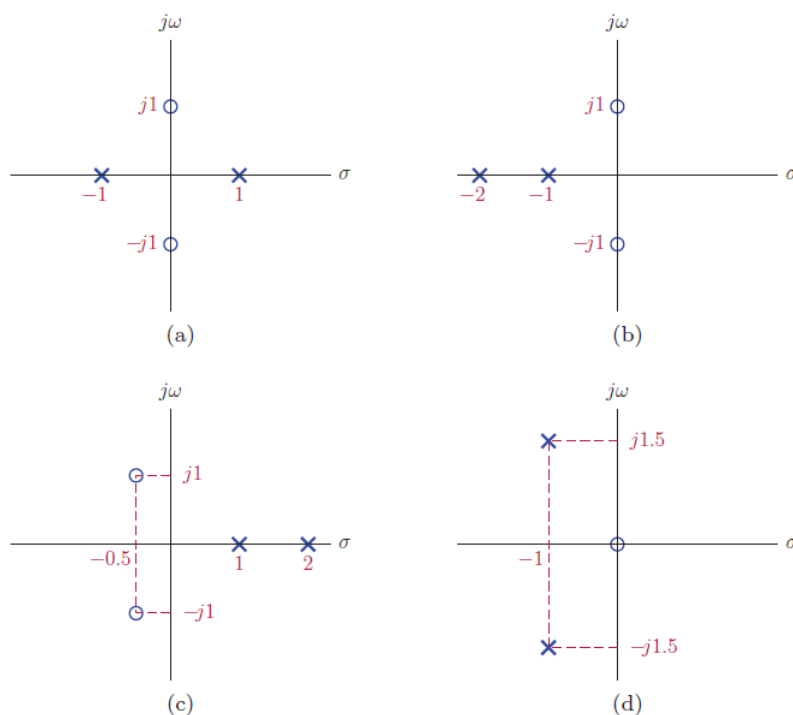
Ένα *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t) \quad (3)$$

Ελέγξτε αν το σύστημα αυτό είναι ευσταθές και δείξτε ότι η κρουστική του απόκριση ισούται με $h(t) = e^{-t} \cos(t)u(t)$.

Ασκηση 7 - Πόλοι και Μηδενικά

Στο Σχήμα 2 βλέπετε τέσσερα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, ένα για κάθε ένα μετασχ. Laplace, $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Για καθένα από αυτά βρείτε το πεδίο σύγκλισης αν γνωρίζετε ότι



Σχήμα 2: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Άσκησης 7.

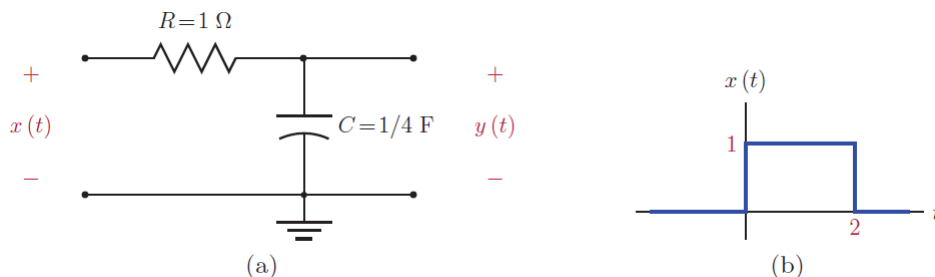
(α') ο μετασχ. Fourier του κάθε σήματος $x_i(t)$ υπάρχει μέσω του ορισμού του.

(β') το $x_i(t)$ είναι αιτιατό

(γ') το $x_i(t)$ είναι αντι-αιτιατό

[*] Άσκηση 8 - Κυκλώματα και μετασχ. Laplace

Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 3(a) το οποίο δέχεται την είσοδο του Σχήματος 3(b). Το κύκλωμα περιγράφεται από



Σχήμα 3: Κύκλωμα και σήμα εισόδου Άσκησης 8.

τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = 4x(t) \quad (4)$$

με αρχική συνθήκη $y(0^-) = -2$. Βρείτε την έξοδο του κυκλώματος.

$$\text{Απ.: } y(t) = (1 - 3e^{-4t})u(t) - (1 - e^{-4(t-2)})u(t-2)$$

Ασκηση 9 - Δειγματοληψία I

Τα ημιτονοειδή σήματα

$$x_1(t) = \cos(12\pi t) \quad (5)$$

$$x_2(t) = \cos(20\pi t) \quad (6)$$

$$x_3(t) = \cos(44\pi t) \quad (7)$$

δειγματοληπτούνται ιδανικά με ρυθμό $f_s = 16$ Hz. Δείξτε ότι τα τρία σήματα διακριτού χρόνου $x_i[n], i = 1, 2, 3$ που λαμβάνουμε είναι τα ίδια.

[*] Ασκηση 10 - Δειγματοληψία II

Έστω το αγαπημένο σας σήμα

$$x(t) = A \operatorname{tri}(t/T) \quad (8)$$

με μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = AT \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (9)$$

Θεωρήστε $A = 1$ και $T = 1$ s. Δειγματοληπτούμε το σήμα με ιδανική δειγματοληψία με ρυθμό $f_s = 5$ Hz.

(α') Σχεδιάστε το δειγματοληπτημένο σήμα στο χρόνο, με ακρίβεια. Ξεκινήστε από $t = 0$ και δειγματοληπτήστε ομοιόμορφα προς τα θετικά και προς τα αρνητικά.

(β') Βρείτε μια έκφραση για το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, $X_s(f)$.

(γ') Σχεδιάστε όσο καλύτερα μπορείτε το $X_s(f)$ για $-10 \leq f \leq 10$ Hz.

Ασκηση 11 - Δειγματοληψία III

Αναφέρετε ποιά από τα παρακάτω σήματα μπορούν να δειγματοληπτηθούν χωρίς απώλεια πληροφορίας (aliasing). Για αυτά που μπορούν, βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Εξηγήστε αναλυτικά.

(α') $x(t) = u(t) - u(t - 3)$

(β') $x(t) = e^{-2t}u(t)$

(γ') $x(t) = \cos(100\pi t) + 2\sin(150\pi t)$

(δ') $x(t) = \cos(100\pi t) + 2\sin(150\pi t)\sin(200\pi t)$

(ε') $x(t) = e^{-t}\cos(100\pi t)u(t)$

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ΕΝΑ ενιαίο αρχείο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

selisios@csd.uoc.gr

με τίτλο: [HY215] Παράδοση 5ης σειράς ασκήσεων

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.