

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο

(α') Εύκολα προκύπτει από γνωστά ζεύγη ότι

$$H(f) = \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} \quad (1)$$

(β') Αν $RC = \frac{1}{2\pi 80}$, τότε

$$H(f) = \frac{1}{1 + jf/80} \quad (2)$$

Η είσοδος είναι ένα περιοδικό σήμα, οπότε

$$y(t) = 5|H(20)| \cos(2\pi 20t + \angle H(20)) \quad (3)$$

Έτσι

$$H(20) = \frac{1}{1 + j20/80} = \frac{1}{1 + j/4} = \frac{4}{4 + j} \quad (4)$$

με μέτρο

$$|H(20)| = \frac{4}{|4 + j|} = \frac{4}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (5)$$

και φάση

$$\angle H(20) = -\tan^{-1} \frac{1/4}{1} = -\tan^{-1} \frac{1}{4} = -0.245 \quad (6)$$

Οπότε

$$y(t) = \frac{20}{\sqrt{17}} \cos(2\pi 20t - 0.245) = 4.8507 \cos(2\pi 20t - 0.245) \quad (7)$$

(γ') Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι στην έξοδο οι συντελεστές Fourier θα είναι της μορφής

$$Y_k = H(kf_0)X_k = H(20k)X_k = H(20k) \frac{1}{5} \text{sinc}(k/5) = \frac{1}{1 + jk/4} \frac{1}{5} \text{sinc}(k/5) = \frac{\frac{1}{5} \text{sinc}(k/5)}{1 + j(k/4)} \quad (8)$$

Ασκηση 2 - Ο μετασχηματισμός Laplace

Από τους πίνακες ζευγών έχουμε

$$(α') x(t) = 3e^{-t}u(t) - 5e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{5}{s+3} = \frac{3(s+3)-5(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{-2s+4}{(s+1)(s+3)}, \sigma > -1$$

$$(β') x(t) = 3e^{-t}u(t) + 2e^{3t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s-3} = \frac{3(s-3)-2(s+1)}{(s+1)(s-3)} = \frac{s-11}{(s+1)(s-3)}, -1 < \sigma < 3$$

$$(γ') x(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = 1 + \frac{2}{s+1} = \frac{s+1+2}{s+1} = \frac{s+3}{s+1}, \sigma > -1$$

$$(δ') x(t) = (1 - e^{-t})u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+1-s}{s(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)}, \sigma > 0$$

$$(ε') x(t) = \cos(2t)u(t) + 2\sin(3t)u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+9} = \frac{s(s^2+9)+6(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{s^3+6s^2+9s+24}{(s^2+4)(s^2+9)}, \sigma > 0$$

$$(γ') \quad x(t) = e^{-2t} \cos(3t)u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}, \quad \sigma > -2$$

Ασκηση 3 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα θα έχουμε:

(α)

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}, \quad \sigma > 0 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}, \quad \sigma > 0 \text{ και } \sigma > -2 \quad (9)$$

οπότε

$$x(t) = Au(t) + Be^{-2t}u(t) \quad (10)$$

με

$$A = \frac{s+1}{s(s+2)}s \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$B = \frac{s+1}{s(s+2)}(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2} \quad (12)$$

Συνολικά

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) \quad (13)$$

(β)

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+9)}, \quad \sigma > 0 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3j} + \frac{C}{s-3j} \quad (14)$$

οπότε

$$A = \frac{s+1}{s(s^2+9)}s \Big|_{s=0} = \frac{1}{9} \quad (15)$$

$$B = \frac{s+1}{s(s^2+9)}(s+3j) \Big|_{s=-3j} = \frac{s+1}{s(s-3j)} \Big|_{s=-3j} = \frac{1-3j}{(-3j)(-6j)} = -\frac{1}{18} + \frac{3}{18}j \quad (16)$$

$$C = \frac{s+1}{s(s^2+9)}(s-3j) \Big|_{s=3j} = \frac{s+1}{s(s+3j)} \Big|_{s=3j} = \frac{1+3j}{(3j)(6j)} = -\frac{1}{18} - \frac{3}{18}j \quad (17)$$

Έτσι

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9} \frac{1}{s} + \left(-\frac{1}{18} + j\frac{3}{18}\right) \frac{1}{s+3j} + \left(-\frac{1}{18} - j\frac{3}{18}\right) \frac{1}{s-3j} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{s} - \frac{1}{18} \frac{1}{s+3j} + j\frac{3}{18} \frac{1}{s+3j} - \frac{1}{18} \frac{1}{s-3j} - j\frac{3}{18} \frac{1}{s-3j} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{s} - \frac{1}{18} \frac{1}{s+3j} + e^{j\pi/2} \frac{3}{18} \frac{1}{s+3j} - \frac{1}{18} \frac{1}{s-3j} + e^{-j\pi/2} \frac{3}{18} \frac{1}{s-3j} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{s} - \frac{1}{18} \left(\frac{1}{s+3j} + \frac{1}{s-3j} \right) + \frac{3}{18} \left(e^{j\pi/2} \frac{1}{s+3j} + e^{-j\pi/2} \frac{1}{s-3j} \right) \quad (21)$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$x(t) = \frac{1}{9}u(t) - \frac{1}{18} \left(e^{-j3t}u(t) + e^{j3t}u(t) \right) + \frac{3}{18} \left(e^{j\pi/2} e^{-j3t}u(t) + e^{-j\pi/2} e^{j3t}u(t) \right) \quad (22)$$

$$= \frac{1}{9}u(t) - \frac{1}{18} 2 \cos(3t)u(t) + \frac{3}{18} 2 \cos(3t - \pi/2)u(t) \quad (23)$$

$$= \frac{1}{9}u(t) - \frac{1}{9} \cos(3t)u(t) + \frac{1}{3} \sin(3t)u(t) \quad (24)$$

(γ')

$$X(s) = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)(s-3)}, \quad -1 < \sigma < 2 = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-3} \quad (25)$$

με αντίστοιχα πεδία σύγκλισης

$$\sigma > -1, \quad \sigma > -2, \quad \sigma < 2, \quad \sigma < 3 \quad (26)$$

οπότε

$$A = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)(s-3)}(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{5(s-1)}{(s+2)(s-2)(s-3)} \Big|_{s=-1} = -\frac{5}{6} \quad (27)$$

$$B = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)(s-3)}(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s-2)(s-3)} \Big|_{s=-2} = \frac{3}{4} \quad (28)$$

$$C = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)(s-3)}(s-2) \Big|_{s=2} = \frac{5(s-1)}{(s+2)(s+1)(s-3)} \Big|_{s=2} = -\frac{5}{12} \quad (29)$$

$$D = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)(s-3)}(s-3) \Big|_{s=3} = \frac{5(s-1)}{(s+2)(s-2)(s+1)} \Big|_{s=3} = \frac{1}{2} \quad (30)$$

Έτσι, στο πεδίο του χρόνου από γνωστά ζεύγη θα έχουμε

$$x(t) = \left(-\frac{5}{6}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-2t} \right) u(t) + \left(\frac{5}{12}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} \right) u(-t) \quad (31)$$

(δ)

$$X(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2 \quad (32)$$

Πρέπει να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα. Θα είναι

$$X(s) = 1 + \frac{-4s-6}{(s+2)(s+3)} = 1 + G(s) \quad (33)$$

Εκτελώντας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα στο δεύτερο όρο

$$G(s) = \frac{-4s-6}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \quad (34)$$

θα έχουμε

$$A = G(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-4s-6}{s+3} \Big|_{s=-2} = 2 \quad (35)$$

$$B = G(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{-4s-6}{s+2} \Big|_{s=-3} = -6 \quad (36)$$

οπότε στο πεδίο του χρόνου

$$x(t) = \delta(t) + 2e^{-2t}u(t) - 6e^{-3t}u(t) \quad (37)$$

Ασκηση 4 - ΣυνέλιξηΤα σήματα $x(t) = e^{-t}u(t)$ και $y(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$ έχουν μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1 \quad (38)$$

$$Y(s) = 1 - \frac{1}{s+2} = \frac{s+1}{s+2}, \quad \sigma > -2 \quad (39)$$

και επειδή η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace, θα έχουμε

$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{1}{s+1} \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}, \quad R_{xy} \supseteq \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma > -2\} = \{\sigma > -2\} \quad (40)$$

αφού ο μόνος πόλος που υπάρχει στο αποτέλεσμα είναι ο $s = -2$. Από γνωστά ζεύγη

$$c_{xy}(t) = e^{-2t}u(t) \quad (41)$$

Ασκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα Ι

(α') Ξέρουμε ότι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}}{\frac{1}{s}} = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \quad (42)$$

Προφανώς αφού έχουμε το $R_y = \{\sigma > 0\}$, χρειαζόμαστε ένα R_h του οποίου η τομή με το $R_x = \{\sigma > 0\}$ να μας δίνει το R_y . Οι πόλοι του $H(s)$ είναι οι $s_1 = -1$, $s_2 = -2$. Η σωστή επιλογή θα είναι $R_h = \{\sigma > -1\}$.

(β') Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα

$$H(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (43)$$

με

$$A = H(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = 4 \quad (44)$$

$$B = H(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = -4 \quad (45)$$

θα είναι

$$H(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{-4}{s+2}, \quad \sigma > -1 \quad (46)$$

οπότε στο πεδίο του χρόνου

$$h(t) = (4e^{-t} - 4e^{-2t})u(t) \quad (47)$$

(γ') Ναι, μπορούμε, γιατί ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης. Ο μετασχ. Fourier - δηλ. η απόκριση σε συχνότητα - είναι της μορφής

$$H(f) = \frac{4}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f + 2)} \quad (48)$$

(δ') Έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \iff Y(s)(s^2 + 3s + 2) = 4X(s) \iff s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 4X(s) \quad (49)$$

και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης, θα είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 4x(t) \quad (50)$$

Ασκηση 6 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα ΙΙ

Μεταφέροντας την εξίσωση στο πεδίο του Laplace, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t) \longleftrightarrow Y(s)(s^2 + 2s + 2) = (s+1)X(s) \iff H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \quad (51)$$

Οι πόλοι του βρίσκονται στις θέσεις $s_1 = -1 + j$, $s_2 = s_1^* = -1 - j$. Το πραγματικό τους μέρος είναι $\sigma = -1$, κι επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης θα είναι δεξιόπλευρο, δηλ. $\sigma > -1$. Για την κρουστική απόκριση, αν παρατηρήσουμε ότι

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 1 + 1} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} \quad (52)$$

τότε από τον πίνακα με τα γνωστά ζεύγη καταλήγουμε εύκολα στο ότι

$$h(t) = e^{-t} \cos(t) u(t) \quad (53)$$

Ασκηση 7 - Πόλοι και Μηδενικά

Το πεδίο σύγκλισης καθορίζεται αποκλειστικά από τους πόλους του μετασχ. Laplace. Έρα:

(α') ο μετασχ. Fourier του κάθε σήματος $x_i(t)$ υπάρχει μέσω του ορισμού του σημαίνει ότι ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Έτσι θα έχουμε

$$(\alpha') -1 < \sigma < 1$$

$$(\beta') \sigma > -1$$

$$(\gamma') \sigma < 1$$

$$(\delta') \sigma > -1$$

(β') το $x_i(t)$ είναι αιτιατό και στις τέσσερις περιπτώσεις σημαίνει ότι το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο, δηλ. περιλαμβάνει ένα ημιεπίπεδο δεξιότερα του πόλου με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Έτσι θα έχουμε

$$(\alpha') \sigma > 1$$

$$(\beta') \sigma > -1$$

$$(\gamma') \sigma > 2$$

$$(\delta') \sigma > -1$$

(γ') το $x_i(t)$ είναι αντι-αιτιατό και στις τέσσερις περιπτώσεις σημαίνει ότι το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο, δηλ. περιλαμβάνει ένα ημιεπίπεδο αριστερότερα του πόλου με το μικρότερο πραγματικό μέρος. Έτσι θα έχουμε

$$(\alpha') \sigma < -1$$

$$(\beta') \sigma < -2$$

$$(\gamma') \sigma < 1$$

$$(\delta') \sigma < -1$$

[*] Ασκηση 8 - Κυκλώματα και μετασχ. Laplace

Το κύκλωμα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = 4x(t) \quad (54)$$

με αρχική συνθήκη $y(0^-) = -2$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μονόπλευρο μετασχ. Laplace για την εύρεση της εξόδου. Έχουμε

$$sY(s) - y(0^-) + 4Y(s) = 4X(s) \iff sY(s) + 2 + 4Y(s) = 4X(s) \iff Y(s) = \frac{4}{s+4}X(s) - \frac{2}{s+4} \quad (55)$$

με

$$X(s) = L\{u(t) - u(t-2)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}}{s}, \quad \forall s \quad (56)$$

οπότε

$$Y(s) = \frac{4(1 - e^{-2s})}{s(s+4)} - \frac{2}{s+4} = G(s)(1 - e^{-2s}) - \frac{2}{s+4} \quad (57)$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα τον όρο $G(s)$ θα έχουμε

$$G(s) = \frac{4}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} \quad (58)$$

με

$$A = G(s)s \Big|_{s=0} = 1 \quad (59)$$

$$B = G(s)(s+4) \Big|_{s=-4} = -1 \quad (60)$$

οπότε

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} \right) (1 - e^{-2s}) - \frac{2}{s+4} \quad (61)$$

Γυρνώντας στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = u(t) - u(t-2) - e^{-4t}u(t) + e^{-4(t-2)}u(t-2) - 2e^{-4t}u(t) \quad (62)$$

$$= (1 - 3e^{-4t})u(t) - (1 - e^{-4(t-2)})u(t-2) \quad (63)$$

Ασκηση 9 - Δειγματοληψία I

Θέτοντας $t := n/f_s$, έχουμε

$$x_1[n] = \cos(12\pi n/f_s) = \cos(3\pi n/4) \quad (64)$$

$$x_2[n] = \cos(20\pi n/f_s) = \cos(20\pi n/16) = \cos(5\pi n/4) \quad (65)$$

$$= \cos((8\pi n - 3\pi n)/4) = \cos(-3\pi n/4) = \cos(3\pi n/4) = x_1[n] \quad (66)$$

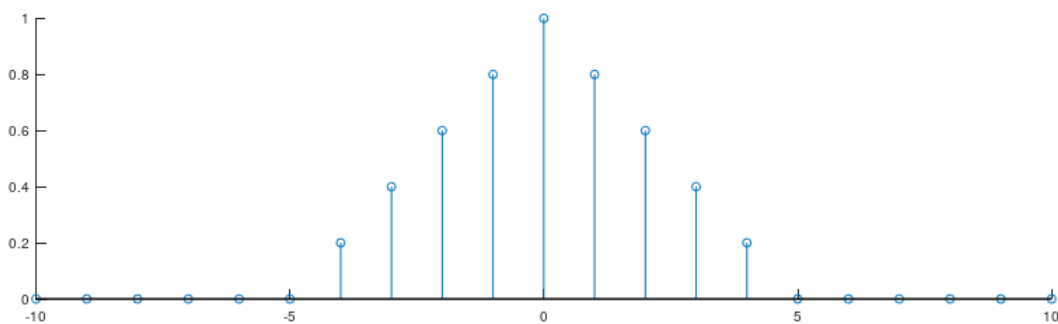
$$x_3[n] = \cos(44\pi n/f_s) = \cos(44\pi n/16) = \cos(11\pi n/4) \quad (67)$$

$$= \cos((8\pi n + 3\pi n)/4) = \cos(3\pi n/4) = x_1[n] \quad (68)$$

Άρα πράγματι τα τρία σήματα στο διακριτό χρόνο είναι τα ίδια.

[★] Ασκηση 10 - Δειγματοληψία II

(α) Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Ασκηση 10α.

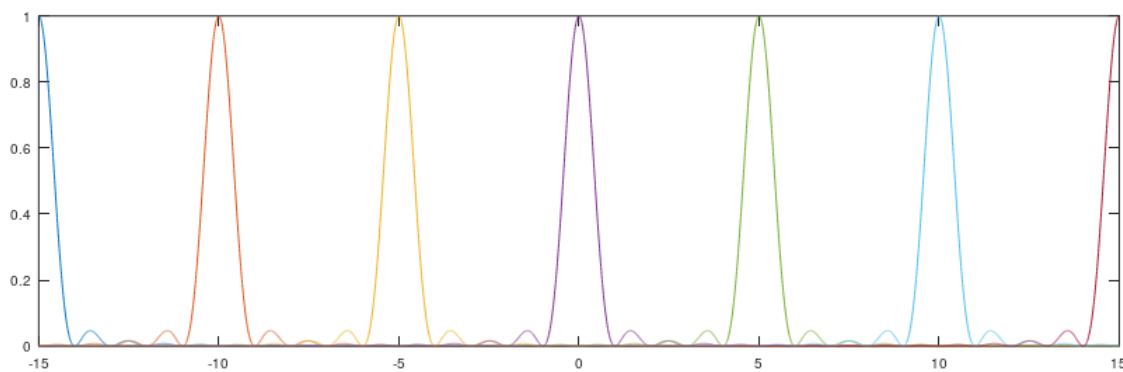
(β') Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, $X_s(f)$, δίνεται γενικά ως

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) \quad (69)$$

και ειδικότερα

$$X_s(f) = 5 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - 5k) = 5 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f - 5k), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (70)$$

(γ') Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Ασκήση 10γ.

Ασκήση 11 - Δειγματοληψία III

(α') $x(t) = u(t) - u(t - 3)$: το σήμα αυτό είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, καθώς αποτελεί έναν τετραγωνικό παλμό, οπότε στη συχνότητα θα είναι άπειρης διάρκειας - συνάρτηση $\text{sinc}()$. Άρα δεν μπορούμε να ορίσουμε μέγιστη συχνότητα κι έτσι δεν μπορεί να δειγματοληπτηθεί χωρίς aliasing.

(β') $x(t) = e^{-2t}u(t)$: το σήμα αυτό έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (71)$$

που είναι άπειρης διάρκειας. Άρα δεν μπορούμε να ορίσουμε μέγιστη συχνότητα κι έτσι δεν μπορεί να δειγματοληπτηθεί χωρίς aliasing.

(γ') $x(t) = \cos(100\pi t) + 2\sin(150\pi t)$: το σήμα αυτό είναι άπειρης διάρκειας στο χρόνο με μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - 50) + \frac{1}{2}\delta(f + 50) + \frac{1}{j}\delta(f + 75) - \frac{1}{j}\delta(f - 75) \quad (72)$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε μέγιστη συχνότητα κι αυτή είναι $f_{max} = 75$ Hz. Οπότε μπορούμε να το δειγματοληπτήσουμε χωρίς aliasing.

(δ') $x(t) = \cos(100\pi t) + 2\sin(150\pi t)\sin(200\pi t)$: το σήμα αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \cos(100\pi t) + 2\sin(150\pi t)\sin(200\pi t) = \cos(100\pi t) + \cos(50\pi t) - \cos(350\pi t) \quad (73)$$

με μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - 50) + \frac{1}{2}\delta(f + 50) + \frac{1}{2}\delta(f - 25) + \frac{1}{2}\delta(f + 25) - \frac{1}{2}\delta(f - 175) - \frac{1}{2}\delta(f + 175) \quad (74)$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε μέγιστη συχνότητα κι αυτή είναι $f_{max} = 175$ Hz. Οπότε μπορούμε να το δειγματοληπτήσουμε χωρίς aliasing.

(ε') $x(t) = e^{-t}\cos(100\pi t)u(t)$: το σήμα αυτό έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1 + j2\pi f}{(1 + j2\pi f)^2 + 100^2} \quad (75)$$

το οποίο είναι άπειρης διάρκειας και άρα δεν μπορούμε να ορίσουμε μέγιστη συχνότητα, άρα δεν μπορούμε να το δειγματοληπτήσουμε χωρίς aliasing.