

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/4/2025

Ημερομηνία Παράδοσης : 29/4/2025, 16:00
είτε γραπτά στο μάθημα, είτε ηλεκτρονικά

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 σε αυτή τη σειρά.)

Ασκηση 1 - Δυσκότητα

Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{3 + 2t^2} \quad (1)$$

$$\text{Απ: } X(f) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} e^{-\sqrt{6}\pi|f|}$$

Ασκηση 2 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα

Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = 2e^{-2t} u(t) \quad (3)$$

στο πεδίο του χρόνου, και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα στο χώρο του Fourier.

$$\text{Απ: } c_{xy}(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

[*] Ασκηση 3 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier I

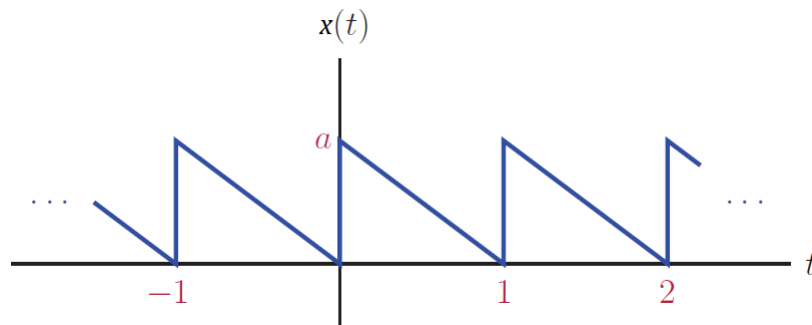
Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος

$$X(f) = (a + b)\text{sinc}((b - a)f)\text{sinc}((b + a)f) \quad (4)$$

$$\text{Απ: } x(t) = \begin{cases} 0, & t < -b \\ (t + b)/(b - a), & -b < t < -a \\ 1, & -a < t < a \\ (-t + b)/(b - a), & a < t < b \end{cases}$$

Ασκηση 4 - Μετασχ. Fourier και Σειρά Fourier

Στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων (3η) είχατε να υπολογίσετε τους συντελεστές Fourier ενός περιοδικού σήματος, αυτού του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Περιοδικό σήμα Ασκήσης 4.

Σε αυτήν την άσκηση θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές αυτούς μέσω του μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος.

(α) Επιλέξτε μια περίοδο του περιοδικού σήματος, έστω $x(t, T_0)$, και υπολογίστε το μετασχ. Fourier της, $X(f, T_0)$, με χρήση της ιδιότητας της παραγωγίσιμης, και δείξτε ότι αυτός ισούται με

$$X(f, T_0) = \frac{a}{j2\pi f} (1 - \text{sinc}(f)e^{-j\pi f}) \quad (5)$$

(β) Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος που προκύπτει από την επανάληψη του $x(t, T_0)$ ανά $T_0 = 1$, δηλ. του περιοδικού σήματος του Σχήματος 1, δίνονται ως

$$X_k = \frac{a}{2\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (6)$$

όπως είχατε βρει στην 3η σειρά σακήσεων, αλλά τώρα εφαρμόζοντας τη δειγματοληψία του μετασχ. Fourier ανά $f_k = \frac{k}{T_0}$:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} \quad (7)$$

Hint: $\text{sinc}(k) = 0, k \neq 0$.

Άσκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II

Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{4}{(j2\pi f)^2 + j18\pi f + 20} \quad (8)$$

Βρείτε το σήμα στο χρόνο στο οποίο αυτός αντιστοιχεί με χρήση αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα και με χρήση έτοιμων ζευγών μετασχ. Fourier.

$$\text{Απ.: } x(t) = 4e^{-4t}u(t) - 4e^{-5t}u(t)$$

Άσκηση 6 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier III

Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \begin{cases} j2\pi f, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9)$$

αντιστοιχεί στο σήμα

$$x(t) = \frac{2}{t} \cos(2\pi t) - \frac{1}{\pi t^2} \sin(2\pi t)$$

Προσπαθήστε να γράψετε το μετασχηματισμό $X(f)$ συναρτήσεως του τετραγωνικού παλμού, $\text{rect}(\cdot)$, στο χώρο της συχνότητας.

Άσκηση 7 - ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις

ΑΣ δούμε σε αυτήν την άσκηση έναν τρόπο επίλυσης ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται ως διαφορικές εξισώσεις τον οποίο θα αναλύσουμε μετά τις γιορτές του Πάσχα. Ακολουθήστε τα βήματα.

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 104y(t) = 2x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \quad (10)$$

(α) Μεταφέρετε όλη τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Fourier, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης όπου απαιτείται.

(β) Παραγοντοποιήστε ως προς $Y(f)$ και $X(f)$, αριστερά και δεξιά της ισότητας, αντίστοιχα.

(γ) Δημιουργήστε το λόγο

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) \quad (11)$$

που γνωρίζουμε από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο του μετασχ. Fourier, και δείξτε ότι ισούται με

$$H(f) = \frac{2 + j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + 4j2\pi f + 104} \quad (12)$$

(δ) Δείξτε ότι

$$h(t) = e^{-2t} \cos(10t)u(t) \quad (13)$$

αν γνωρίζετε το ζεύγος

$$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t), a > 0 \longleftrightarrow \frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2} \quad (14)$$

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ENA ενιαίο αρχείο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

sisamaki@csd.uoc.gr

με τίτλο: [HY215] Παράδοση 4ης σειράς ασκήσεων

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.