

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2024-25**  
**Διδάσκων: Γ. Καφεντζής**

**Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων**

**Ασκηση 1 - Δυσκολότητα**

Για το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{3 + 2t^2} \quad (1)$$

θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της δυσκολότητας. Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-a|t|}, \quad a > 0 \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (2)$$

και άρα

$$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \longleftrightarrow e^{-a|f|} = e^{-a|f|}, \quad a > 0 \quad (3)$$

Χρειάζεται να προσαρμόσουμε λίγο το σήμα μας στο χρόνο για να ταιριάζει με το παραπάνω. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με  $2\pi^2$ , θα είναι

$$x(t) = \frac{1}{3 + 2t^2} = \frac{2\pi^2}{6\pi^2 + 4\pi^2 t^2} = \frac{2\pi^2}{(\sqrt{6}\pi)^2 + 4\pi^2 t^2} \quad (4)$$

οπότε βρήκαμε, συγκρίνοντας με τη Σχέση (3), ότι  $a = \sqrt{6}\pi$ . Συνεχίζοντας, πρέπει να φτιάξουμε τον αριθμητή ώστε να ισούται με  $2a = 2\pi\sqrt{6}$ , άρα

$$x(t) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{2\pi\sqrt{6}}{(\sqrt{6}\pi)^2 + 4\pi^2 t^2} \quad (5)$$

Εφαρμόζοντας τη Σχέση (3) στο παραπάνω έχουμε

$$X(f) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} e^{-\sqrt{6}\pi|f|} \quad (6)$$

**Ασκηση 2 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα**

Η συνέλιξη στο χρόνο θα μας δώσει

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{2} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\tau} u(\tau) e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-3\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \quad (7)$$

$$= e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = e^{-2t} (-e^{-\tau}) \Big|_0^t = e^{-2t} (1 - e^{-t}) = e^{-2t} - e^{-3t} \quad (8)$$

για  $t > 0$ , οπότε

$$c_{xy}(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \quad (9)$$

Στο χώρο του Fourier, οι επιμέρους μετασχηματισμοί είναι

$$X(f) = \frac{\frac{1}{2}}{3 + j2\pi f} \quad (10)$$

$$Y(f) = \frac{2}{2 + j2\pi f} \quad (11)$$

και η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα, οπότε

$$C_{xy}(f) = X(f)Y(f) = \frac{1}{(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \quad (12)$$

$$= \frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{3 + j2\pi f} \quad (13)$$

εφ' όσον ο αριθμητής είναι σταθερό πολυώνυμο και ο παρονομαστής δευτεροβάθμιο (ως προς  $j2\pi f$ ), με

$$A = \frac{1}{(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)}(2 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f := -2} = \frac{1}{(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f := -2} = 1 \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)}(3 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f := -3} = \frac{1}{(2 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f := -3} = -1 \quad (15)$$

οπότε

$$C_{xy}(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f} + \frac{-1}{3 + j2\pi f} \quad (16)$$

Από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$c_{xy}(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \quad (17)$$

που είναι η ίδια απάντηση με αυτή που βρήκαμε κάνοντας συνέλιξη.

### [\*] Ασκήση 3 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier I

Το σήμα

$$X(f) = (a + b)\text{sinc}((b - a)f)\text{sinc}((b + a)f) \quad (18)$$

έχει αντίστροφο μετασχ. Fourier που μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = (a + b)F^{-1}\{\text{sinc}((b - a)f)\} * F^{-1}\{\text{sinc}((b + a)f)\} \quad (19)$$

λόγω της ιδιότητας “συνέλιξη στο χρόνο  $\longleftrightarrow$  γινόμενο στη συχνότητα”. Από γνωστά ζεύγη θα είναι

$$x(t) = (a + b)\frac{1}{b - a}\text{rect}\left(\frac{t}{b - a}\right) * \frac{1}{a + b}\text{rect}\left(\frac{t}{a + b}\right) = \frac{1}{b - a}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{b - a}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{a + b}\right)\right] \quad (20)$$

Οι περιπτώσεις της συνέλιξης φαίνονται στο Σχήμα 1. Συγκεκριμένα,

- Είναι

$$x(t) = 0, \text{ για } t + (b - a)/2 < -(a + b)/2 \iff t < -b \quad (21)$$

και

$$x(t) = 0, \text{ για } t - (b - a)/2 > (a + b)/2 \iff t > b \quad (22)$$

- Είναι

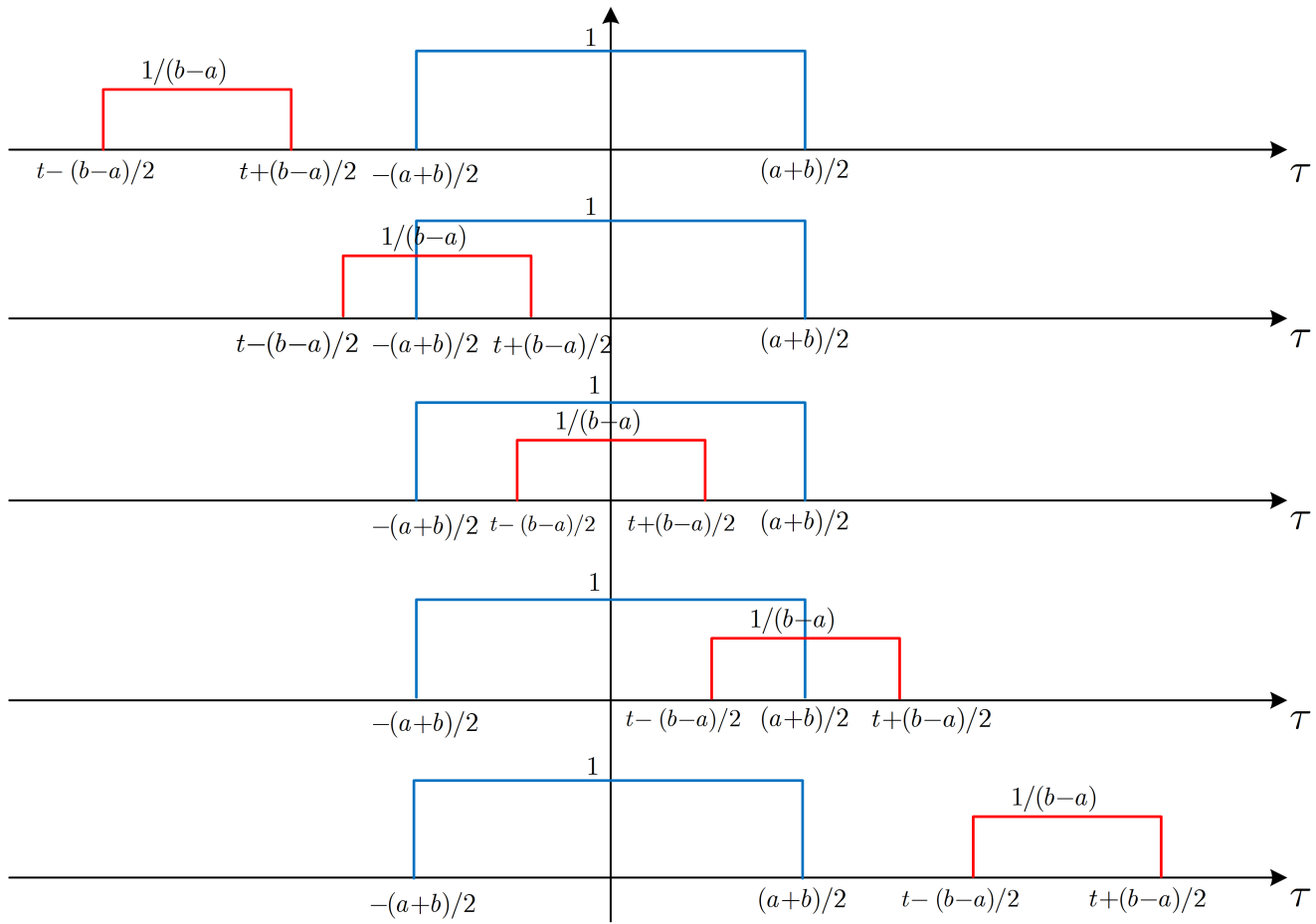
$$x(t) = \int_{-(a+b)/2}^{t+(b-a)/2} \frac{1}{b-a} d\tau = \frac{1}{b-a} \tau \Big|_{-(a+b)/2}^{t+(b-a)/2} = \frac{t+b}{b-a} \quad (23)$$

για  $t + (b - a)/2 > -(a + b)/2$  και  $t - (b - a)/2 < (a + b)/2$ , δηλ.  $-b < t < -a$ .

- Είναι

$$x(t) = \int_{t-(b-a)/2}^{t+(b-a)/2} \frac{1}{b-a} d\tau = \frac{1}{b-a} \tau \Big|_{t-(b-a)/2}^{t+(b-a)/2} = 1 \quad (24)$$

για  $t - (b - a)/2 > -(a + b)/2$  και  $t + (b - a)/2 < (a + b)/2$ , δηλ.  $-a < t < a$ .



Σχήμα 1: Περιπτώσεις συνέλιξης Άσκησης 3.

- Είναι

$$x(t) = \int_{t-(b-a)/2}^{(a+b)/2} \frac{1}{b-a} d\tau = \frac{1}{b-a} \tau \Big|_{t-(b-a)/2}^{(a+b)/2} = \frac{-t+b}{b-a} \quad (25)$$

για  $t - (b-a)/2 < (a+b)/2$  και  $t + (b-a)/2 > (a+b)/2$ , δηλ.  $a < t < b$ .

Άρα συνολικά

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -b \\ (t+b)/(b-a), & -b < t < -a \\ 1, & -a < t < a \\ (-t+b)/(b-a), & a < t < b \\ 0, & t > b \end{cases} \quad (26)$$

#### Άσκηση 4 - Μετασχ. Fourier και σειρά Fourier

(α) Επιλέγουμε την περίοδο  $[0, T_0) = [0, 1)$ . Το σήμα μας γράφεται ως

$$x(t, T_0) = -at + a, \quad 0 < t < 1 \quad (27)$$

Η παράγωγός του θα είναι ίση με

$$\frac{d}{dt}x(t, T_0) = a\delta(t) - \text{arect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{1}\right) \quad (28)$$

με τη συνάρτηση Δέλτα να προκύπτει ως παράγωγος της ασυνέχειας του σήματος στο  $t = 0$ . Από γνωστά ζεύγη ο μετασχ. Fourier της παραγώγου του σήματος θα είναι

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t, T_0)\right\} = F\left\{a\delta(t) - \operatorname{arect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{1}\right)\right\} = a - a\operatorname{sinc}(f)e^{-j2\pi f \frac{1}{2}} = a - a\operatorname{sinc}(f)e^{-j\pi f} \quad (29)$$

Όμως από την ιδιότητα της παραγώγισης

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t, T_0)\right\} = j2\pi f X(f, T_0) \quad (30)$$

Εξισώνοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις

$$j2\pi f X(f, T_0) = a - a\operatorname{sinc}(f)e^{-j\pi f} \iff X(f, T_0) = \frac{a}{j2\pi f}(1 - \operatorname{sinc}(f)e^{-j\pi f}) \quad (31)$$

(β) Δειγματοληπώντας το μετασχ. Fourier που βρήκαμε (και χρησιμοποιώντας ότι  $T_0 = 1$ ), μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=k/T_0} \quad (32)$$

$$= \frac{1}{1} X(f, 1) \Big|_{f=k/1} \quad (33)$$

$$= X(f, 1) \Big|_{f=k} \quad (34)$$

$$= \frac{a}{j2\pi k}(1 - \operatorname{sinc}(k)e^{-j\pi k}) \quad (35)$$

Αφού  $\operatorname{sinc}(k) = 0$ ,  $k \neq 0$ , τότε

$$X_k = \frac{a}{j2\pi k} = \frac{a}{2\pi k}e^{-j\pi/2} \quad (36)$$

### Ασκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II

Ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{4}{(j2\pi f)^2 + j18\pi f + 20} \quad (37)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$X(f) = \frac{4}{(j2\pi f)^2 + 9j2\pi f + 20} = \frac{4}{u^2 + 9u + 20} \Big|_{u=j2\pi f} \quad (38)$$

θέτοντας για ευκολία  $u = j2\pi f$ . Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u+5} \quad (39)$$

με

$$A = \frac{4}{(u+4)(u+5)}(u+4) \Big|_{u=-4} = \frac{4}{u+5} \Big|_{u=-4} = 4 \quad (40)$$

$$B = \frac{4}{(u+4)(u+5)}(u+5) \Big|_{u=-5} = \frac{4}{u+4} \Big|_{u=-5} = -4 \quad (41)$$

οπότε

$$X(f) = \frac{4}{u+4} \Big|_{u=j2\pi f} - \frac{4}{u+5} \Big|_{u=j2\pi f} \quad (42)$$

και θέτοντας ξανά  $u = j2\pi f$ , με αντίστροφο μετασχ. Fourier να είναι, από γνωστά ζεύγη, ως

$$x(t) = 4e^{-4t}u(t) - 4e^{-5t}u(t) \quad (43)$$

### Ασκηση 6 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier III

Το σήμα

$$X(f) = \begin{cases} j2\pi f, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (44)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$X(f) = j2\pi f \text{rect}(f/2) \quad (45)$$

Ο όρος  $j2\pi f$  θυμίζει την ιδιότητα

$$\frac{d}{dt}z(t) \longleftrightarrow j2\pi fZ(f) \quad (46)$$

οπότε αρκεί να βρούμε το  $z(t)$ , τον αντίστρ. μετασχ. Fourier του  $Z(f) = \text{rect}(f/2)$  που είναι

$$Z(f) = \text{rect}(f/2) \longleftrightarrow z(t) = 2\text{sinc}(2t) \quad (47)$$

οπότε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί στο δοθέντα μετασχηματισμό είναι

$$x(t) = \frac{d}{dt}2\text{sinc}(2t) = 2\frac{d}{dt}\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} = 2\frac{2\pi(2\pi t)\cos(2\pi t) - 2\pi\sin(2\pi t)}{(2\pi t)^2} = \frac{2}{t}\cos(2\pi t) - \frac{1}{\pi t^2}\sin(2\pi t) \quad (48)$$

Λύσεις με άλλες ιδιότητες ή τον ορισμό θεωρούνται σωστές.

### Ασκηση 7 - ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις

(α') Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης θα έχουμε

$$(j2\pi f)^2Y(f) + 4j2\pi fY(f) + 104Y(f) = 2X(f) + j2\pi fX(f) \quad (49)$$

(β') Παραγοντοποιώντας

$$Y(f)((j2\pi f)^2 + 4j2\pi f + 104) = X(f)(2 + j2\pi f) \quad (50)$$

(γ') Το παραπάνω γράφεται ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2 + j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + 4j2\pi f + 104} \quad (51)$$

(δ') Ελέγχοντας το δοθέν ζεύγος, δηλ. το

$$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow \frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2} \quad (52)$$

μπορούμε να γράψουμε την απόκριση σε συχνότητα ως

$$H(f) = \frac{2 + j2\pi f}{((j2\pi f)^2 + 4j2\pi f + 4) + 100} = \frac{2 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)^2 + 10^2} \quad (53)$$

οπότε έχουμε  $a = 2$  και  $2\pi f_0 = 10$ . Άρα

$$h(t) = e^{-2t}\cos(10t)u(t) \quad (54)$$