

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/3/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 8/4/2025, 16:00
είτε γραπτά στο μάθημα, είτε ηλεκτρονικά

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 σε αυτή τη σειρά.)

Ασκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση ως

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = 6x(t) \quad (1)$$

με $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = -1$ και είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$.

(α') Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής εισόδου.

(β') Υπολογίστε την κρουστική απόκριση.

(γ') Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

(δ') Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.

Απ.: (α) $y_{zi}(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$, (β) $h(t) = (3e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$, (γ) $y_{zs}(t) = (3te^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t}(1 - e^{-2t}))u(t)$

Ασκηση 2 - Συνέλιξη

Υπολογίστε την έξοδο των ΓΧΑ συστημάτων με τα παρακάτω ζεύγη εισόδων-κρουστικών αποκρίσεων. Προτείνεται θερμά να χρησιμοποιήσετε τη γραφική λύση (της συνέλιξης των σημάτων).

(α') $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$, $h(t) = u(t)$

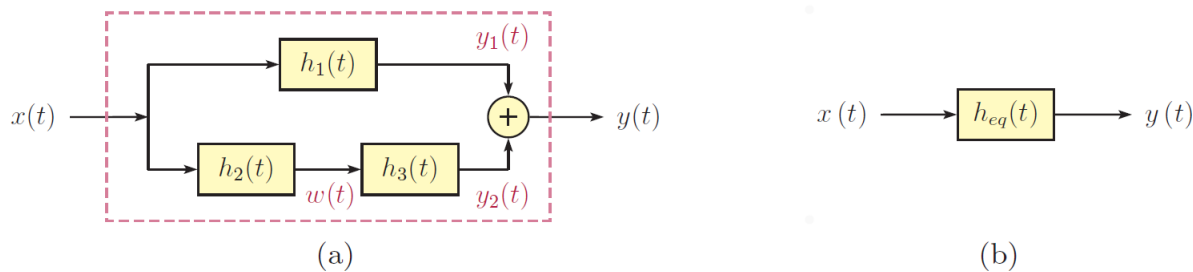
(β') $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-3}{6}\right)$, $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$

$$\text{Απ.: (α) } y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 < t < 4 \\ 4, & t > 4 \end{cases}, \text{ (β) } y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > 10 \\ t, & 0 < t < 4 \\ 4, & 4 < t < 6 \\ 10 - t, & 6 < t < 10 \end{cases}$$

[*] Ασκηση 3 - Διασύνδεση συστημάτων

Πολλές φορές χρειαζόμαστε αρκετά ΓΧΑ συστήματα συνδεδεμένα μεταξύ τους για να επιτύχουμε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα. Στο Σχήμα 1(a) βλέπετε τη διασύνδεση τριών συστημάτων, ενώ στο Σχήμα 1(b) το ισοδύναμο σύστημα, με το καθένα να περιγράφεται από την κρουστική του απόκριση.

(α') Εκφράστε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση $h_{eq}(t)$ με όρους των αποκρίσεων $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$. **Hint:** Περάστε την είσοδο $\delta(t)$ από το σύστημα και υπολογίστε τις επιμέρους εξόδους που βλέπετε στο σχήμα.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 3.

(β') Έστω ότι $h_1(t) = e^{-t}u(t)$, $h_2(t) = \delta(t-2)$, $h_3(t) = e^{-2t}u(t)$. Βρείτε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση $h_{eq}(t)$.

(γ') Αν η είσοδος του συστήματος είναι $x(t) = u(t)$, τότε για τις κρουστικές αποκρίσεις του προηγούμενου ερωτήματος, υπολογίστε τα σήματα $w(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, και $y(t)$.

$$\text{Απ.: (γ)} \quad y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)})u(t-2) + (1 - e^{-t})u(t)$$

Άσκηση 4 - Προσέγγιση σημάτων από σήματα

(α') Έστω δυο σήματα $x(t)$ και $y(t)$ ως

$$x(t) = t, \quad 0 < t < 1 \quad \text{και} \quad y(t) = \sin(2\pi t), \quad 0 < t < 1 \quad (2)$$

Βρείτε τη βέλτιστη σταθερά c για την προσέγγιση $x(t) \approx cy(t)$ έτσι ώστε η ενέργεια σφάλματος να είναι η ελάχιστη.

(β') Βρείτε τη συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ και την ενέργεια της, E_e . Δείξτε ότι η συνάρτηση σφάλματος είναι ορθογώνια με το σήμα $y(t)$.

(γ') Δείξτε ότι

$$E_x = c^2 E_y + E_e \quad (3)$$

$$\text{Απ.: (α)} \quad c = -\frac{1}{\pi}, \quad (\beta), \quad E_e = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}$$

Άσκηση 5 - Σειρές Fourier - I

Αναπτύξτε το παρακάτω σήμα σε εκθετική Σειρά Fourier (δηλ. σε ένα άθροισμα από συζυγή μιγαδικά εκθετικά σήματα του χρόνου με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους και με συντελεστές σε πολική μορφή: think Euler) και σχεδιάστε τα φάσματα πλάτους και φάσης της.

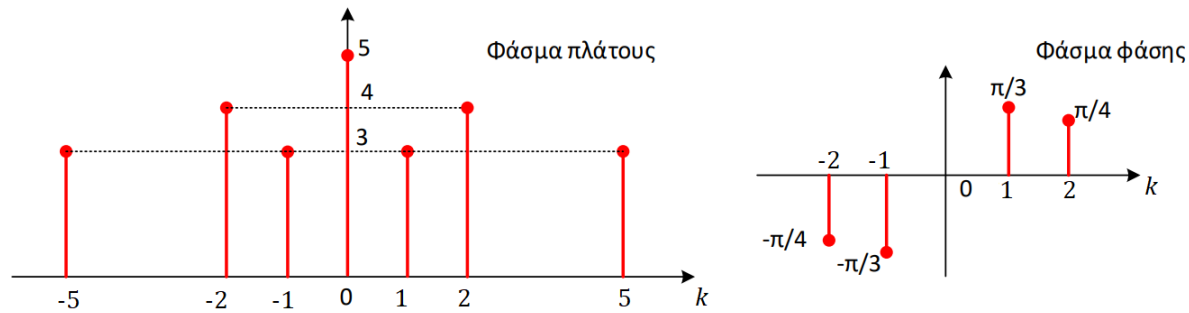
$$x(t) = \cos(2\pi 10t) + 0.8 \cos(2\pi t) \cos(2\pi 10t) \quad (4)$$

Ποιά είναι η περίοδος T_0 και η θεμελιώδης συχνότητα f_0 του περιοδικού σήματος;

Άσκηση 6 - Σειρές Fourier - II

Σας δίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης ενός περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 0.01$ s στο Σχήμα 2. Εκφράστε το περιοδικό σήμα σε εκθετική και τριγωνομετρική Σειρά Fourier.

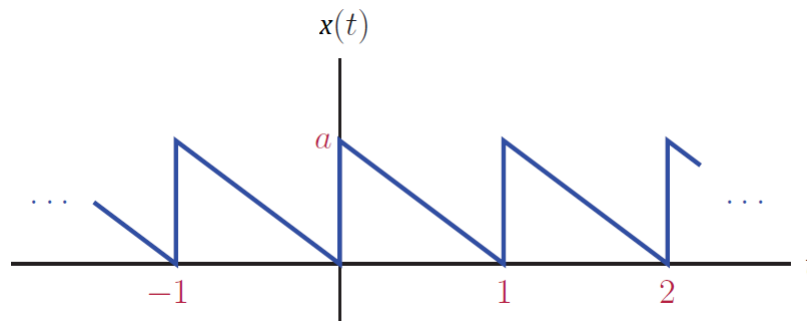
$$\text{Απ.: } x_{\text{trig}}(t) = 5 + 6 \cos(2\pi 100t + \pi/3) + 8 \cos(2\pi 200t + \pi/4) + 6 \cos(2\pi 500t)$$



Σχήμα 2: Φάσματα Άσκησης 6.

Άσκηση 7 - Σειρές Fourier - III

Έστω το περιοδικό σήμα που δίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Περιοδικό σήμα Άσκησης 7.

Αναπτύξτε το σήμα σε εκθετική Σειρά Fourier

(α') με τον ορισμό.

(β') με ιδιότητες, όπως η παραγωγή/ολοκλήρωση στο χρόνο, ή με χρήση γνωστών - από τις διαλέξεις - περιοδικών σημάτων και ιδιοτήτων.

$$\text{Απ.: } X_0 = \frac{a}{2}, X_k = \frac{a}{2\pi k} e^{-j\pi/2}$$

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ΕΝΑ ενιαίο αρχείο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

patsoura@csd.uoc.gr

με τίτλο: [HY215] Παράδοση 3ης σειράς ασκήσεων

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.