

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις

(α') Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y_{zi}(t) + 4\frac{d}{dt}y_{zi}(t) + 3y_{zi}(t) = 0 \quad (1)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = -1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 \quad (2)$$

και ρίζες

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3 \quad (3)$$

Η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}, \quad t > 0 \quad (4)$$

με

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 0 \quad (5)$$

$$y'_{zi}(0^-) = -c_1 - 3c_2 = -1 \quad (6)$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

$$y_{zi}(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) u(t) \quad (7)$$

(β') Θεωρούμε το απλό σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t) \quad (8)$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$, και με είσοδο $x(t) = \delta(t)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}h_o(t) + 4\frac{d}{dt}h_o(t) + 3h_o(t) = \delta(t) \quad (9)$$

η οποία μπορεί να λυθεί θεωρώντας την ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}h_o(t) + 4\frac{d}{dt}h_o(t) + 3h_o(t) = 0 \quad (10)$$

με αρχικές συνθήκες $h_o(0^+) = 0$, $h'_o(0^+) = 1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 \quad (11)$$

και ρίζες

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3 \quad (12)$$

Η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}, \quad t > 0 \quad (13)$$

με

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \quad (14)$$

$$h_o(0^+) = -c_1 - 3c_2 = 1 \quad (15)$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

$$h_o(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right) u(t) \quad (16)$$

Για το αρχικό σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$, θα έχουμε

$$h(t) = 6h_o(t) = 3(e^{-t} - e^{-3t})u(t) \quad (17)$$

(γ') Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης, δηλ.

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (18)$$

$$= 3 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\tau} - e^{-3\tau})u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (19)$$

$$= 3 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\tau} - e^{-3\tau})e^{-(t-\tau)}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (20)$$

Αφού

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1, \quad 0 < \tau < t \quad (21)$$

θα έχουμε

$$y_{zs}(t) = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\tau} - e^{-3\tau})e^{-(t-\tau)}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (22)$$

$$= 3 \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-3\tau})e^{-(t-\tau)}d\tau \quad (23)$$

$$= 3 \int_0^t (e^{-\tau}e^{-t+\tau} - e^{-3\tau}e^{-t+\tau})d\tau \quad (24)$$

$$= 3e^{-t} \int_0^t d\tau - 3e^{-t} \int_0^t e^{-2\tau}d\tau \quad (25)$$

$$= 3e^{-t}(t-0) - 3e^{-t} \left(-\frac{1}{2}e^{-2\tau} \right) \Big|_0^t \quad (26)$$

$$= 3te^{-t} - 3e^{-t} \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \right) \quad (27)$$

$$= 3te^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t}(1 - e^{-2t}) \quad (28)$$

$$(29)$$

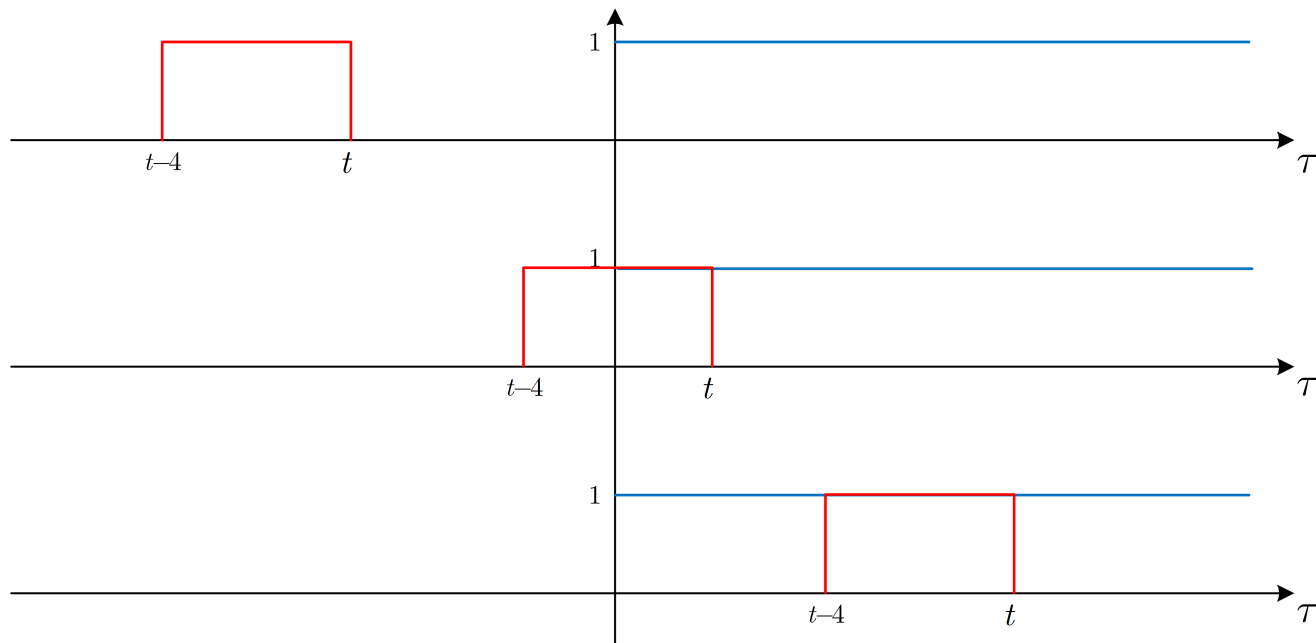
για $t > 0$, άρα

$$y_{zs}(t) = \left(3te^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t}(1 - e^{-2t}) \right) u(t) \quad (30)$$

(δ') Είναι ευσταθές καθώς όλες οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι αρνητικές.

Ασκηση 2 - Συνέλιξη

(α') $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$, $h(t) = u(t)$: Δείτε το Σχήμα 1. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις του σχήματος κι έχουμε:



Σχήμα 1: Σχήμα 1 - Άσκηση 2.

- Είναι

$$c_{xy}(t) = 0, \quad t < 0 \quad (31)$$

- Είναι

$$c_{xy}(t) = \int_0^t d\tau = \tau \Big|_0^t = t \quad (32)$$

για $t - 4 < 0$ και $t > 0$, δηλ. $0 < t < 4$.

- Είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^t d\tau = \tau \Big|_{t-4}^t = t - (t - 4) = 4 \quad (33)$$

για $t - 4 > 0$, δηλ. $t > 4$.

(β') $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-3}{6}\right)$, $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$: Δείτε το Σχήμα 2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις του σχήματος κι έχουμε:

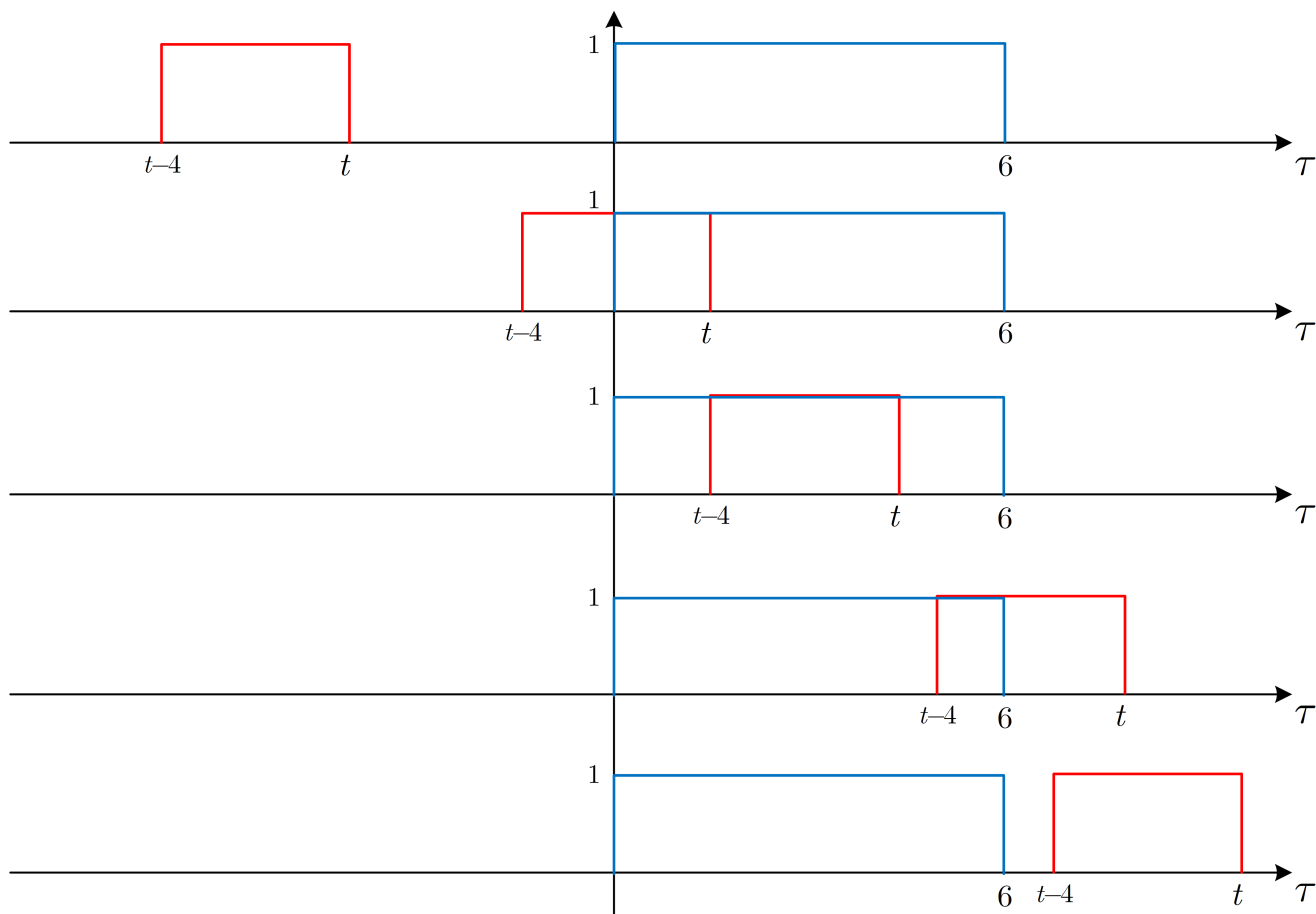
- Είναι

$$c_{xy}(t) = 0, \quad t < 0, \quad t > 10 \quad (34)$$

- Είναι

$$c_{xy}(t) = \int_0^t d\tau = \tau \Big|_0^t = t \quad (35)$$

για $t - 4 < 0$ και $t > 0$, δηλ. $0 < t < 4$.



Σχήμα 2: Σχήμα 2 - Άσκηση 2.

- Είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^t d\tau = \tau \Big|_{t-4}^t = t - (t - 4) = 4 \quad (36)$$

για $t - 4 > 0$ και $t < 6$, δηλ. $4 < t < 6$.

- Είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^6 d\tau = \tau \Big|_{t-4}^6 = 6 - (t - 4) = 10 - t \quad (37)$$

για $t - 4 < 6$ και $t > 6$, δηλ. $6 < t < 10$.

[*] Άσκηση 3 - Διασύνδεση συστημάτων

(α') Από το σχήμα, αν $x(t) = \delta(t)$, τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$y_1(t) = h_1(t) * \delta(t) = h_1(t) \quad (38)$$

$$w(t) = h_2(t) * \delta(t) = h_2(t) \quad (39)$$

$$y_2(t) = w(t) * h_3(t) = h_2(t) * h_3(t) \quad (40)$$

$$y(t) = h_{eq}(t) = y_1(t) + y_2(t) = h_1(t) + (h_2(t) * h_3(t)) \quad (41)$$

οπότε τελικά

$$h_{eq}(t) = h_1(t) + (h_2(t) * h_3(t)) \quad (42)$$

(β') Είναι

$$h_{eq}(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) * \delta(t-2) = e^{-t}u(t) + e^{-2(t-2)}u(t-2) \quad (43)$$

από γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.

(γ') Η έξοδος θα είναι

$$y(t) = h_{eq}(t) * x(t) = (e^{-t}u(t) + e^{-2(t-2)}u(t-2)) * u(t) \quad (44)$$

$$= e^{-t}u(t) * u(t) + e^{-2(t-2)}u(t-2) * u(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau + \int_2^t e^{-2(\tau-2)} d\tau \quad (45)$$

$$= -e^{-\tau} \Big|_0^t - e^{-2\tau} \Big|_2^t = -(e^{-t} - 1) - \frac{1}{2}e^{-2t+4} + \frac{1}{2} \quad (46)$$

με $t > 0$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και $t > 2$ στο δεύτερο. Οπότε

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)})u(t-2) + (1 - e^{-t})u(t) \quad (47)$$

Ασκηση 4 - Προσέγγιση σημάτων από σήματα

(α') Θα είναι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_0^1 x(t)y(t)dt \quad (48)$$

με

$$E_y = \int_0^1 \sin^2(2\pi t)dt = \frac{1}{2} \quad (49)$$

οπότε

$$c = \frac{1}{E_y} \int_0^1 x(t)y(t)dt = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi t)dt \quad (50)$$

$$= -\frac{2}{2\pi} t \cos(2\pi t) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sin(2\pi t)dt \quad (51)$$

$$= -\frac{1}{\pi} + 2 \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) \Big|_0^1 \quad (52)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \quad (53)$$

Τελικά $c = -1/\pi$.

(β') Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e(t) = t + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \quad (54)$$

και η ενέργεια της είναι

$$E_e = \int_0^1 e^2(t)dt = \int_0^1 \left(t + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 + \frac{2t}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{1}{\pi^2} \sin^2(2\pi t) \right) dt \quad (55)$$

και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο

$$E_e = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \quad (56)$$

Η συνάρτηση σφάλματος είναι ορθογώνια με το $y(t)$ γιατί

$$\int_0^1 \sin(2\pi t) \left(t + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \right) dt = 0 \quad (57)$$

πράγμα που αποδεικνύεται εύκολα από πράξεις.

(γ') Από τα παραπάνω εύκολα προκύπτει ότι

$$E_x = c^2 E_y + E_e \quad (58)$$

αφού

$$E_x = \frac{1}{3} \quad (59)$$

και

$$c^2 E_y + E_e = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2} = \frac{1}{3} \quad (60)$$

Ασκηση 5 - Σειρές Fourier - I

Το σήμα γράφεται ως

$$x(t) = \cos(2\pi 10t) + 0.8 \cos(2\pi t) \cos(2\pi 10t) \quad (61)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 10t} + 0.8 \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 10t} \right) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 10t} + 0.8 \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi 11t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 9t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 9t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 11t} \right) \quad (63)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 10t} + \frac{2}{5} e^{j2\pi 11t} + \frac{2}{5} e^{-j2\pi 9t} + \frac{2}{5} e^{j2\pi 9t} + \frac{2}{5} e^{-j2\pi 11t} \quad (64)$$

Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 θα είναι $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{9, 10, 11\} = 1 \text{ Hz}$ και άρα η περίοδος θα είναι $T_0 = 1 \text{ s}$.

Ασκηση 6 - Σειρές Fourier - II

Κατασκευάζοντας τα αντίστοιχα μιγαδικά εκθετικά $X_k = |X_k| e^{j\phi_k}$ από τις φασματικές γραμμές, θα είναι

$$x(t) = 5 + 3e^{j\pi/3} e^{j2\pi f_0 t} + 3e^{-j\pi/3} e^{-j2\pi f_0 t} + 4e^{j\pi/4} e^{j2\pi 2f_0 t} + 4e^{-j\pi/4} e^{-j2\pi 2f_0 t} + 3e^{j2\pi 5f_0 t} + 3e^{-j2\pi 5f_0 t} \quad (65)$$

με $f_0 = 1/T_0 = 1/0.01 = 100 \text{ Hz}$. Οπότε

$$x(t) = 5 + 3e^{j\pi/3} e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j\pi/3} e^{-j2\pi 100t} + 4e^{j\pi/4} e^{j2\pi 200t} + 4e^{-j\pi/4} e^{-j2\pi 200t} + 3e^{j2\pi 500t} + 3e^{-j2\pi 500t} \quad (66)$$

και από τις σχέσεις του Euler, έχουμε

$$x_{\text{trig}}(t) = 5 + 6 \cos(2\pi 100t + \pi/3) + 8 \cos(2\pi 200t + \pi/4) + 6 \cos(2\pi 500t) \quad (67)$$

Ασκηση 7 - Σειρές Fourier - III

Παρατηρούμε ότι ο όρος X_0 μπορεί να υπολογιστεί ως

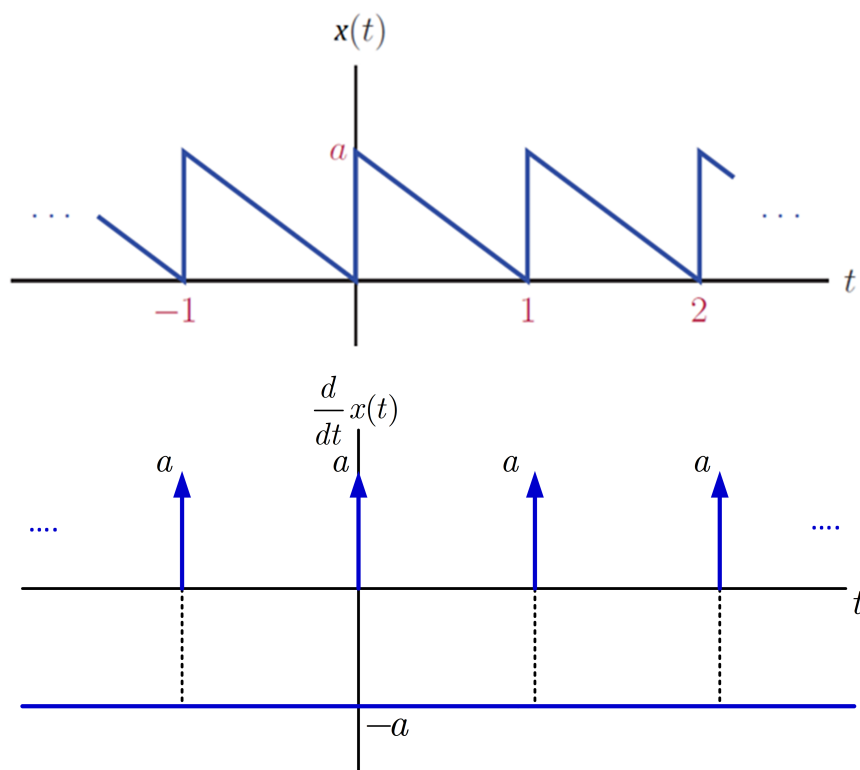
$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{a}{2} \quad (68)$$

Επιλέγουμε μια περίοδο, έστω την $[0, 1)$. Η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος στο διάστημα αυτό είναι $\lambda = -a$, οπότε αν παραγωγίσουμε το σήμα μιας περιόδου έχουμε

$$\frac{d}{dt} x(t, T_0) = -a \text{rect}(t - 1/2) + a \delta(t) \quad (69)$$

με τη συνάρτηση Δέλτα να προκύπτει λόγω της ασυνέχειας στο $t = 0$. Δείτε το Σχήμα 3. Βλέπουμε ότι η παράγωγος αποτελείται από μια σταθερά, $X_{0,d} = -a$, και από ένα περιοδικό, με περίοδο $T_0 = 1$, άθροισμα από συναρτήσεις Δέλτα. Εύκολα μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier της σειράς από συναρτήσεις Δέλτα που έχουμε στο σχήμα, αφού γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ένα τέτοιο περιοδικό σήμα

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \quad (70)$$



Σχήμα 3: Σχήμα Ασκήσης 7.

έχει συντελεστές Fourier ως

$$X_{k,\delta} = \frac{1}{T_0} \quad (71)$$

Αρα οι συντελεστές Fourier της σειράς από συναρτήσεις Δέλτα που έχουμε στο Σχήμα 3, και η οποία γράφεται ως

$$x_{d,\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a\delta(t - kT_0) = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \quad (72)$$

θα είναι

$$X_{k,d} = a \cdot \frac{1}{T_0} = \frac{a}{1} = a, \quad \forall k \quad (73)$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης/ολοκλήρωσης στο χρόνο έχουμε ότι το αρχικό περιοδικό σήμα $x(t)$ θα έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{X_{k,d}}{j2\pi k f_0} = \frac{a}{j2\pi k} = \frac{a}{2\pi k} e^{-j\pi/2}, \quad k \neq 0 \quad (74)$$

αφού $f_0 = 1/T_0 = 1$ και $1/j = e^{-j\pi/2}$, και συνολικά

$$X_0 = \frac{a}{2}, \quad X_k = \frac{a}{2\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (75)$$

Θα καταλήγατε στο ίδιο αποτέλεσμα με χρήση έτοιμων σειρών και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης και αντιστροφής (μαζί με την προσθήκη μιας σταθεράς).