

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/3/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 18/3/2025, 16:00
είτε γραπτά, είτε ηλεκτρονικά

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 σε αυτή τη σειρά.)

Ασκηση 1 - Σήματα

(α) Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* αν ισχύει ότι

$$x(t) = x(-t) \quad (1)$$

ενώ λέγεται *περιττό* αν

$$x(t) = -x(-t) \quad (2)$$

Είναι το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T < t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3)$$

άρτιο ή περιττό;

(β) Οποιοδήποτε σήμα όμως μπορεί να διασπασθεί μοναδικά σε ένα *άρτιο μέρος* και ένα *περιττό μέρος*, ως

$$x_{\text{άρτιο}}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad , \quad x_{\text{περιττό}}(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \quad (4)$$

Βρείτε και σχεδιάστε το άρτιο και το περιττό μέρος των σημάτων:

i. $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right)$

ii. $x(t) = u(t)$

Απ.: (i) άρτιο, $\begin{cases} \frac{1}{2}, & -3 < t < -1 \text{ και } 1 < t < 3 \\ 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, περιττό: $\begin{cases} -\frac{1}{2}, & -3 < t < -1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$,
(ii) άρτιο: $\frac{1}{2}$, περιττό: $\begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0 \\ -\frac{1}{2}, & t < 0 \end{cases}$

Ασκηση 2 - Ενέργεια και Ισχύς

Ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας την πιο πιθανή από τις δυο μετρικές, σύμφωνα με όσα γνωρίζετε από τις διαλέξεις. Δικαιολογήστε την επιλογή της μετρικής πριν κάνετε τις πράξεις ή πριν εφαρμόσετε αποτελέσματα από τις διαλέξεις.

(α) $x(t) = tu(-t)$

(γ) $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$

(β) $x(t) = 3 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

(δ) $x(t) = e^{-4|t|}$

Απ.: (α) -, (β) $\frac{25}{2}$, (γ) 1, (δ) $\frac{1}{4}$

Ασκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Σχεδιάστε τα σήματα

(α) $u(t-1) - u(t-2)$

(γ) $t(u(t+1) - u(t+2))$

(β) $u(t-3) + u(t-4)$

(δ) $\cos(\pi t/4)(u(t-2) - u(t-4))$

Ασκηση 4 - Συναρτήσεις Δέλτα

Υπολογίστε τις εκφράσεις

(α) $(t^2 + 3t - 2)\delta(t-8)$

(ε) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} \delta(t-1) dt$

(ζ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi t) \delta(t-1) dt$

(β) $\cos(2\pi 100t)\delta(t-1)$

(γ) $(t-x)\delta(t-1)$

(ς) $\int_{10}^{+\infty} e^{-2t^2} \delta(t-1) dt$

(η) $\int_{-\infty}^0 (t-1)^2 \delta(t-2) dt$

(δ) $\left(\frac{d}{dt} t^2\right) \delta(t+1)$

Ασκηση 5 - Συναρτήσεις Δέλτα και Βηματικές

Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = tu(t) \quad (5)$$

το οποίο ονομάζεται και “σήμα ράμπας”, για προφανείς - όταν το σχεδιάσετε - λόγους. :-) Το σήμα αυτό περνά από ένα σύστημα διαφοριστή, δηλ. η έξοδος του συστήματος είναι απλά η παράγωγος του $x(t)$:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (6)$$

(α) Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$.(β) Δείξτε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = u(t) \quad (7)$$

(γ) Δείξτε ότι αν περάσουμε την παραπάνω έξοδο $y(t)$ ξανά από το σύστημα (δηλ. τη θεωρήσουμε ως είσοδο $x_1(t)$), η νέα έξοδος θα είναι

$$y_1(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) = \delta(t) \quad (8)$$

(δ) Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi t) [u(t) - u(t-1)] \quad (9)$$

Βρείτε την παράγωγο του παραπάνω σήματος.

$$\text{Απ.: (δ) } x'(t) = -2\pi \sin(2\pi t) [u(t) - u(t-1)] + \delta(t) - \delta(t-1)$$

Ασκηση 6 - Συστήματα

Ελέγξτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, αιτιατά, και δυναμικά.

(α) $y(t) = |x(t)|$

(β) $y(t) = e^{x(t)}$

(γ) $y(t) = t \sin(|x(t+1)|)$

	Γρ.	Χ.Α.	Ευστ.	Αιτ.	Δυν.
Απ: (α)	✗	✓	✓	✓	✗
(β)	✗	✓	✓	✓	✗
(γ)	✗	✗	✗	✗	✓

[*] Ασκηση 7 - Γραμμικότητα

Ένα σύστημα S είναι γραμμικό, και αναπαρίσται από το ζεύγος εισόδου-εξόδου $x(t) \rightarrow y(t)$. Αν

$$x(t) = e^{j2t} \rightarrow y(t) = e^{j3t} \quad (10)$$

$$x(t) = e^{-j2t} \rightarrow y(t) = e^{-j3t} \quad (11)$$

τότε

(α) αν $x_1(t) = \cos(2t)$, βρείτε την έξοδο $y_1(t)$.

(β) αν $x_2(t) = \cos\left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$, βρείτε την έξοδο $y_2(t)$.

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ΕΝΑ ενιαίο αρχείο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

csd5176@csd.uoc.gr

με τίτλο: [HY215] Παράδοση 2ης σειράς ασκήσεων

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.