ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α΄) Έχουμε

$$\frac{z}{2} + \frac{1-j}{2+j}z - j = 3 \iff z\Big(\frac{1}{2} + \frac{1-j}{2+j}\Big) = 3 + j \iff z\Big(\frac{1}{2} + \frac{(1-j)(2-j)}{5}\Big) = 3 + j \tag{1}$$

Αν $z = x + jy$, έχουμε

$$(x+jy)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - j\frac{3}{5}\Big) = 3 + j \tag{2}$$

$$(x+jy)\Big(\frac{7}{10} - \frac{3}{5}j\Big) = 3 + j \tag{3}$$

$$\frac{7}{10}x - \frac{3}{5}xj + \frac{7}{10}yj + \frac{3}{5}y = 3 + j \Longrightarrow \begin{cases} \frac{7}{10}x + \frac{3}{5}y & = 3 \\ -\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y & = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε στο $z = x + jy = \frac{30}{17} + \frac{50}{17}j$.

(β΄) Έχουμε

$$\begin{cases} z + w + j(w-z) & = 2j \\ j(z - 2w + 1) & = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z + w + jw - jz & = 2j \\ jz - 2jw + j & = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3w - jw & = 3 + 3j \\ z & = 2w - 2j - 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w & = \frac{(3+3j)(3+j)}{10} \\ z & = 2w - 2j - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} w & = \frac{3}{5} + j\frac{6}{5} \\ z & = 2w - 2j - 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w & = \frac{3}{5} + j\frac{6}{5} \\ z & = \frac{1}{5} + j\frac{2}{5} \end{cases} \tag{7}$$

Ασκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

(α΄) Έχουμε

$$z^2 = 4j \iff z^2 - 4j = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{16j}}{2} = \pm\frac{4j^{1/2}}{2} = \pm 2(e^{j\pi/2})^{1/2} = \pm 2e^{j\pi/4} \tag{8}$$

Άρα οι ρίζες είναι

$$z_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}\ ,\ \ z_2 = -\sqrt{2} - j\sqrt{2} \tag{9}$$

(β΄) Είναι

$$\frac{z}{1-j} + \frac{1+j}{z} = 1 - j \iff \frac{z^2 + (1+j)(1-j)}{z(1-j)} = 1 - j \iff z^2 + 2 = (1-j)^2 z \iff z^2 + 2jz + 2 = 0 \tag{10}$$

Άρα

$$z_{1,2} = \frac{-2j \pm \sqrt{(2j)^2 - 8}}{2} = \frac{-2j \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2j \pm j\sqrt{12}}{2} = -j \pm j\sqrt{3} \tag{11}$$

Άρα οι ρίζες είναι

$$z_1 = j(-1 - \sqrt{3})\ ,\ \ z_2 = j(-1 + \sqrt{3}) \tag{12}$$

Ασκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι

(α') $\Re\{z\} = 5 \iff \Re\{x + jy\} = 5 \iff x = 5$, άρα ο γεωμ. τόπος είναι η κάθετη στον άξονα των πραγματικών ευθεία $x = 5$.

(β') $|z - 2j| = 3 \iff |z - 2j|^2 = 9 \iff |x + jy - 2j|^2 = 9 \iff x^2 + (y - 2)^2 = 9$, άρα ο γεωμ. τόπος είναι κύκλος με κέντρο το $(0, 2)$ και ακτίνα 3.

(γ') $\sphericalangle(z - 1 + j) = \frac{\pi}{4} \iff \sphericalangle(x + jy - 1 + j) = \frac{\pi}{4} \iff \tan^{-1}\frac{y+1}{x-1} = \frac{\pi}{4}$ οπότε

$$\frac{y+1}{x-1} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff y + 1 = x - 1 \iff y = x - 2 \tag{13}$$

Ο μιγαδικός $z - 1 + j = z - (1 - j)$ αναπαριστά ένα διάνυσμα από το σημειο $(1, -1)$ στο σημείο (x, y). Ο γεωμ. τόπος των z είναι μια ημιευθεία από το σημείο $(1, -1)$, υπό γωνία $\pi/4$ με τον οριζόντιο άξονα. Άρα θα πρέπει $x > 1$.

(δ') $|z + 3| = |z - 2 + j| \iff |z + 3|^2 = |z - (2 - j)|^2 \iff (x + 3)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$, οπότε

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \iff 10x + 4 = 2y \iff y = 5x + 2 \tag{14}$$

Έτσι, ο γεωμ. τόπος είναι οι μιγαδικοί που ικανοποιούν την $y = 5x + 2$, δηλ. $z = x + j(5x + 2)$.

[$\star$] **Ασκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ**

(α') $z = 3w + 4 - 3j$ και $|w| = 2$, οπότε

$$z = 3w + 4 - 3j \iff w = \frac{1}{3}(z - 4 + 3j) \implies |w| = 2 \iff |w|^2 = 4 \tag{15}$$

και

$$|w|^2 = \left|\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}jy - \frac{4}{3} + j\right|^2 = \left|\frac{1}{3}(x - 4) + j\left(\frac{1}{3}y + 1\right)\right|^2 = \frac{1}{9}(x - 4)^2 + \left(\frac{1}{3}y + 1\right)^2 \tag{16}$$

που μας δίνει

$$\frac{1}{9}(x^2 - 8x + 16) + \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y + 1 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y + 1 \tag{17}$$

και άρα

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{11}{9} \iff x^2 - 8x + y^2 + 6y = 11 \tag{18}$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 11 + 16 + 9 \iff (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 6^2 = 36 \tag{19}$$

που είναι κύκλος με κέντρο το $(4, -3)$ και ακτίνα 6.

(β') $z = \dfrac{2 + jw^*}{1 - w^*}$ και $|w| = 1$, οπότε

$$z(1 - w^*) = 2 + jw^* \iff z - 2 = jw^* + zw^* \iff w^* = \frac{z - 2}{z + j} \implies |w^*| = |w| = 1 \implies |w^*|^2 = 1 \tag{20}$$

και

$$|w^*|^2 = \left|\frac{z - 2}{z + j}\right|^2 = 1 \iff |z - 2|^2 = |z + j|^2 \tag{21}$$

δηλ. αν $z = x + jy$ τότε

$$(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \iff -4x + 4 = 2y + 1 \iff 2y + 4x = 3 \tag{22}$$

που αποτελεί ευθεία με εξίσωση $y = -2x + \frac{3}{2}$.

Ασκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

Αφού ο μιγαδικός αποτελεί ρίζα της εξίσωσης πρέπει να την επαληθεύει, οπότε

$$z^2 - 7z = \lambda \iff z(z-7) = \lambda \iff \Big(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\Big)\Big(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j - 7\Big) = \lambda \tag{23}$$

δηλ.

$$\Big(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\Big)\Big(-\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\Big) = \lambda \iff -\frac{49}{4} - \frac{7\sqrt{3}}{4}j + \frac{7\sqrt{3}}{4}j - \frac{3}{4} = \lambda \iff -\frac{52}{4} = \lambda \iff \lambda = -13 \tag{24}$$

Η άλλη ρίζα της εξίσωσης πρέπει να είναι ο συζυγής του $\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$, δηλ. ο $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$, αφού οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι όλοι πραγματικοί αριθμοί, οπότε οι μιγαδικές ρίζες έρχονται σε συζυγή ζεύγη.

Ασκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

(α') $z^3 + 8j = 0 \iff z^3 = -8j \iff |z|^3 e^{j3\theta} = 2^3 e^{j(2\pi k - \pi/2)},\ \ k = 0,1,2$, δηλ.

$$\begin{cases} |z|^3 & = 2^3 \\ 3\theta & = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| & = 2 \\ \theta & = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{6},\ \ k = 0,1,2 \end{cases} \Longrightarrow z = 2e^{j(\frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{6})},\ \ k = 0,1,2. \tag{25}$$

(β') $z^4 + 64 = 0 \iff z^4 = |z|^4 e^{j4\theta} = -64 = 64e^{j(2\pi k + \pi)}$, $k = 0, \cdots, 3$, οπότε

$$\begin{cases} |z|^4 & = 64 \\ 4\theta & = 2\pi k + \pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| & = \sqrt[4]{64} \\ \theta & = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4},\ \ k = 0,\cdots,3 \end{cases} \Longrightarrow z = \sqrt[4]{64}e^{j(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4})},\ \ k = 0,1,2,3 \tag{26}$$

(γ') $z^5 - j = 0 \iff z^5 = |z|^5 e^{j5\theta} = j = e^{j(2\pi k + \pi/2)}$, $k = 0, \cdots, 4$, οπότε

$$\begin{cases} |z|^5 & = 1 \\ 5\theta & = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| & = 1 \\ \theta & = \frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{10},\ \ k = 0,\cdots,4 \end{cases} \Longrightarrow z = e^{j(\frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{10})},\ \ k = 0,1,2,3,4 \tag{27}$$

Ασκηση 7 - Euler και De Moivre

Προσπαθούμε να γράψουμε το μιγαδικό στις παρενθέσεις σε πολική μορφή, άρα

(α') $(1-j)^{12} = (\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^{12} = (\sqrt{2})^{12}e^{-j12\pi/4} = 64e^{-j3\pi} = -64$

(β') $(1+j)^8 = (\sqrt{2}e^{j\pi/4})^8 = (\sqrt{2})^8 e^{j2\pi} = 16$

(γ') Μια πιο απλή λύση - χωρίς πολική μορφή - είναι η

$(1-2j)^4 - j^{200} = [(1-2j)^2]^2 - (j^2)^{100} = [(1-2j)^2]^2 - 1 = ((1-2j)^2 - 1)((1-2j)^2 + 1) = -8 + 24j$

(δ') Μπορούμε να γράψουμε μόνο τον παρονομαστή σε πολική μορφή, δηλ.

$\dfrac{(2-j)^2}{(j-1)^4} = (2-j)^2 \dfrac{1}{(\sqrt{2}e^{j3\pi/4})^4} = (2-j)^2 \dfrac{1}{4e^{j3\pi}} = \dfrac{(3-4j)}{-4} = -\dfrac{3}{4} + j$