ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 7/5/2024 Ημερομηνία Παράδοσης: 31/5/2024, ως τις 16:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/80$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Ο μετασχηματισμός Laplace
Αποδείξτε τα παρακάτω ζεύγη μετασχ. Laplace αποκλειστικά με χρήση ιδιοτήτων και πινάκων ζευγών μετασχηματισμού (ξεκινώντας **πάντα** από το πεδίο του χρόνου):

(α') $3u(t-2) \longleftrightarrow \dfrac{3e^{-2s}}{s},\ \sigma > 0$

(β') $(t-1)^2u(t-1) \longleftrightarrow \dfrac{2e^{-s}}{s^3},\ \sigma > 0$

(γ') $2u(t-6) - 3u(t-8) \longleftrightarrow \dfrac{2e^{-6s} - 3e^{-8s}}{s},\ \sigma > 0$

(δ') $e^{-2(t-3)}u(t-3) \longleftrightarrow e^{-3s}\dfrac{1}{s+2},\ \sigma > -2$

(ε') $\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)u(t) \longleftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1-s}{s^2+1},\ \sigma > 0$

(ϛ') $e^{-2t}u(t-3) \longleftrightarrow e^{-3(s+2)}\dfrac{1}{s+2},\ \sigma > -2$

(ζ') $\cos(t)u\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \longleftrightarrow \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}s}\dfrac{s-\sqrt{3}}{s^2+1},\ \sigma > 0$

Άσκηση 2 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Αποδείξτε τα παρακάτω ζεύγη αντίστροφου μετασχ. Laplace αποκλειστικά με χρήση ιδιοτήτων και πινάκων ζευγών μετασχηματισμού (ξεκινώντας **πάντα** από το πεδίο του μετασχ. Laplace):

(α') $\dfrac{2s+1}{s^2+3s+2},\ \sigma > -1 \longleftrightarrow (-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$

(β') $\dfrac{2s}{(s+2)(s+1)},\ -2 < \sigma < -1 \longleftrightarrow 4e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(-t)$

(γ') $e^{-2s}\dfrac{s}{s^2+1},\ \sigma > 0 \longleftrightarrow \cos(t-2)u(t-2)$

(δ') $\dfrac{3e^{-s}}{s^2+4s+5},\ \sigma > -2 \longleftrightarrow 3e^{-2(t-1)}\sin(t-1)u(t-1)$

(ε') $\dfrac{2s^2+3}{s^2+1},\ \sigma > 0 \longleftrightarrow 2\delta(t) + \sin(t)u(t)$

Άσκηση 3 - Συνέλιξη
Με χρήση μετασχ. Laplace βρείτε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t)$ και $y(t) = u(t-2)$.

Απ.: $c_{xy}(t) = (t-2)u(t-2)$

Άσκηση 4 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα
Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})} \tag{1}$$

(α') Σχεδιάστε επάνω στο μιγαδικό επίπεδο *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι το σύστημα είναι *ευσταθές και αιτιατό.*

Απ.: $h(t) = 3e^{-t/4}u(t) - 2e^{-t/2}u(t)$

(γ') Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier, $H(f)$, του συστήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, εξηγήστε και βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

(δ') Αν στο σύστημα παρουσιαστεί η είσοδος $x(t) = e^{-t}u(t)$, τότε βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Απ.: $y(t) = 4e^{-t/4}u(t) - 4e^{-t/2}u(t)$

(ε') Βρείτε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$.

Απ.: $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + \dfrac{3}{4}\dfrac{d}{dt}y(t) + \dfrac{1}{8}y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) + x(t)$

Άσκηση 5 - Συστήματα Ελάχιστης Φάσης και All-pass
Έστω το ευσταθές και αιτιατό σύστημα

$$H(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+3)(s+4)} \tag{2}$$

(α') Βρείτε το πεδίο σύγκλισης.

(β') Βρείτε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $G(s)$ τέτοιο ώστε

$$|H(f)G(f)| = 1 \tag{3}$$

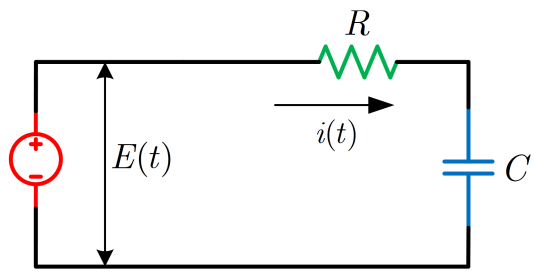
Απ.: $G(s) = \dfrac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)},\ \sigma > -1$

[⋆] Άσκηση 6 - Κυκλώματα και μετασχ. Laplace
Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του μετασχ. Laplace είναι η ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Το κύκλωμα του Σχήματος 1, με $R = 0.25\ \Omega$ και $C = 1$ F, βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, δηλ. αρχικά το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα και ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Εφαρμόζουμε (ως είσοδο) μια ηλεκτρεγερτική δύναμη

$$E(t) = V_0(u(t) - u(t-1)) \tag{4}$$

και μετράμε την ένταση του ρεύματος $i(t)$ (ως έξοδο) που διαρρέει το κύκλωμα. Αν γνωρίζετε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα είναι η

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t) \tag{5}$$



Σχήμα 1: *Κύκλωμα Άσκησης 6.*

τότε δείξτε ότι η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα δίνεται ως

$$i(t) = \begin{cases} 4V_0 e^{-4t}, & 0 < t < 1 \\ 4V_0 (e^{-4t} - e^{-4(t-1)}), & t > 1 \end{cases} \tag{6}$$

Άσκηση 7 - Στα βήματα των Nyquist-Shannon
Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{7}$$

(α΄) Βρείτε το μετασχ. Fourier αυτού, $X(f)$.

(β΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

(γ΄) Βρείτε τη μέγιστη (μη μηδενικούς πλάτους) συχνότητα, f_{max}, του φάσματος πλάτους του σήματος.

(δ΄) Σχεδιάστε το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας του σήματος $x(t)$ στο χώρο της συχνότητας, αν χρησιμοποιήσουμε συχνότητα δειγματοληψίας

   i. $f_s > 2f_{max}$
   ii. $f_s < 2f_{max}$
   iii. $f_s = 2f_{max}$

   Εξηγήστε τι συμβαίνει σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία και Διακριτά Σήματα Ι
Θεωρήστε τα παρακάτω σήματα

$$x_1(t) = \cos(2\pi 40 t) \tag{8}$$
$$x_2(t) = \cos(2\pi 100 t) \tag{9}$$

τα οποία δειγματοληπτούνται με ρυθμό $f_s = 60$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή των διακριτών σημάτων $x_1[n]$, $x_2[n]$. Απλοποιήστε τις εκφράσεις όσο περισσότερο γίνεται, έχοντας υπ' όψη ότι $n \in \mathbb{Z}$. Σχεδιάστε τα ως προς το διακριτό χρόνο n. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 9 - Δειγματοληψία και Διακριτά Σήματα ΙΙ
Θεωρήστε το σήμα

$$x_a(t) = 2\cos(2\pi 1200 t) + 4\sin(2\pi 3000 t) + \cos(2\pi 4000 t) \tag{10}$$

(α΄) Ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το παραπάνω σήμα;

(β΄) Έστω ότι δειγματοληπούμε το σήμα με ρυθμό $f_s = 3500$ Hz. Ποιά είναι η μαθηματική μορφή του διακριτού σήματος $x[n]$ μετά τη δειγματοληψία;

(γ΄) Ποιό είναι το σήμα συνεχούς χρόνου που μπορούμε να ανακατασκευάσουμε από τα δείγματα του $x[n]$; Είναι ίδιο με το $x_a(t)$; Γιατί;