ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Ο μετασχηματισμός Laplace

(α΄) Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$L\{x(t)\} = 3e^{-2s}L\{u(t)\} = 3e^{-2s}\frac{1}{s},\ \sigma > 0 \tag{1}$$

(β΄) Το ζητούμενο σήμα προέρχεται από χρονική μετατόπιση του σήματος $t^2u(t)$. Από πίνακες γνωρίζουμε ότι

$$L\{t^2u(t)\} = \frac{2}{s^3} \tag{2}$$

και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$L\{x(t)\} = e^{-s}L\{t^2u(t)\} = e^{-s}\frac{2}{s^3},\ \sigma > 0 \tag{3}$$

(γ΄) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$L\{x(t)\} = 2\frac{e^{-6s}}{s} - 3\frac{e^{-8s}}{s} = \frac{2e^{-6s} - 3e^{-8s}}{s},\ \sigma > 0 \tag{4}$$

(δ΄) Ξανά από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης και από το γνωστό ζεύγος

$$e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2},\ \sigma > -2 \tag{5}$$

έχουμε

$$L\{x(t)\} = e^{-3s}\frac{1}{s+2},\ \sigma > 0 \tag{6}$$

(ε΄) Από τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\sin(t-\pi/4)u(t) = \Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)\Big]u(t) \tag{7}$$

Εφαρμόζοντας μετασχ. Laplace στην παραπάνω διαφορά και παρατηρώντας τους πίνακές μας, έχουμε

$$L\{x(t)\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s}{s^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-s}{(s^2+1)} \tag{8}$$

(ϛ΄) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το e^6 θα έχουμε

$$e^{-6}e^{6}e^{-2t}u(t-3) = e^{-6}e^{-2t+6}u(t-3) = e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3) \tag{9}$$

Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, έχουμε

$$L\{x(t)\} = e^{-6}e^{-3s}\frac{1}{s+2} = e^{-3s-6}\frac{1}{s+2} = e^{-3(s+2)}\frac{1}{s+2},\ \sigma > -2 \tag{10}$$

(ζ) Μπορούμε να γράψουμε

$$\cos(t)u(t-\pi/3) = \cos(t-\pi/3+\pi/3)u(t-\pi/3) = \Big[\frac{1}{2}\cos(t-\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t-\pi/3)\Big]u(t-\pi/3) \tag{11}$$

Από τους πίνακες βλέπουμε ότι

$$L\{\cos(at)u(t)\} = \frac{s}{s^2+a^2}.\ \sigma > 0 \tag{12}$$

$$L\{\sin(at)u(t)\} = \frac{a}{s^2+a^2},\ \ \sigma > 0 \tag{13}$$

και σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, έχουμε

$$L\{x(t)\} = \frac{1}{2}e^{-\pi s/3}\frac{s}{s^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\pi s/3}\frac{1}{s^2+1},\ \ \sigma > 0 \tag{14}$$

Άσκηση 2 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

(α΄) Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$X(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \tag{15}$$

με $A = -1$, $B = 3$. Αφού το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο, οι πίνακες μας δίνουν

$$x(t) = -e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) \tag{16}$$

(β΄) Όμοια με πριν

$$X(s) = \frac{2s}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \tag{17}$$

με $A = 2$ και $B = 4$. Το πεδίο σύγκλισης είναι λωρίδα, οπότε θα πρέπει να είναι η τομή ενός αριστερόπλευρου και ενός δεξιόπλευρου σήματος. Το πεδίο γράφεται ως

$$-2 < \sigma < -1 \Longleftrightarrow \{\sigma > -2\} \cap \{\sigma < -1\} \tag{18}$$

οπότε από πίνακες έχουμε

$$x(t) = 2e^{-t}u(-t) + 4e^{-2t}u(t) \tag{19}$$

(γ΄) Ο όρος $s/(s^2+1),\ \ \sigma > 0$ έχει αντίστροφο μετασχ. Laplace ως $\cos(t)u(t)$. Ο όρος e^{-2s} προκύπτει από χρονική μετατόπιση προς τα δεξιά κατά $t_0 = 2$. Οπότε

$$x(t) = \cos(t-2)u(t-2) \tag{20}$$

(δ΄) Όμοια με πριν, θεωρούμε τον όρο e^{-s} ως αποτέλεσμα χρονικής μετατόπισης προς τα δεξιά κατά $t_0 = 1$. Ο υπόλοιπος όρος αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα

$$\frac{3}{s^2+4s+5} = \frac{3}{(s+2-j)(s+2+j)} \tag{21}$$

Μπορούμε να παρακάμψουμε τις πολλές πράξεις που θα προκύψουν αν συνεχίσουμε το ανάπτυγμα, παρατηρώντας ότι

$$s^2+4s+5 = s^2+4s+4+1 = (s+2)^2+1 \tag{22}$$

οπότε ο όρος

$$\frac{3}{(s+2)^2+1},\ \ \sigma > -2 \longleftrightarrow 3e^{-2t}\sin(t)u(t) \tag{23}$$

και από τον όρο της χρονικής μετατόπισης

$$x(t) = 3e^{-2(t-1)}\sin(t-1)u(t-1) \tag{24}$$

(ε΄) Διαιρώντας τα πολυώνυμα παίρνουμε

$$\frac{2s^2+3}{s^2+1} = 2 + \frac{1}{s^2+1},\ \ \sigma > 0 \tag{25}$$

και εφαρμόζοντας τα γνωστά ζεύγη, έχουμε

$$x(t) = 2\delta(t) + \sin(t)u(t) \tag{26}$$

Άσκηση 3 - Συνέλιξη

Η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace, οπότε

$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}e^{-2s} = \frac{1}{s^2}e^{-2s},\ \ \sigma > 0 \tag{27}$$

Απο πίνακες ξέρουμε ότι

$$tu(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2},\ \ \sigma > 0 \tag{28}$$

οπότε

$$C_{xy}(s) = \frac{1}{s^2}e^{-2s} \longleftrightarrow (t-2)u(t-2) = c_{xy}(t) \tag{29}$$

με χρήση και της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης.

Άσκηση 4 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα

(α΄) Υπάρχουν δυο πόλοι στις θέσεις $s = -1/2$, $s = -1/4$ και δυο μηδενικά, ένα στο $s = -1$ και ένα στο άπειρο.

(β΄) Για να είναι ευσταθές και αιτιατό πρέπει το πεδίο σύγκλισης να περιέχει το φανταστικό άξονα και να είναι δεξιόπλευρο. Από τους διαθέσιμους πόλους, το πεδίο που ικανοποιεί τις προδιαγραφές είναι το $\sigma > -1/4$. Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$H(s) = \frac{A}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B}{s+\frac{1}{4}} = \frac{-2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{3}{s+\frac{1}{4}} \longleftrightarrow h(t) = 3e^{-t/4}u(t) - 2e^{-t/2}u(t) \tag{30}$$

(γ΄) Ναι, μπορούμε, γιατί το πεδίο συγκλισης περιέχει το φανταστικό άξονα. Θέτουμε $s = j2\pi f$ και έχουμε

$$H(f) = \frac{j2\pi f + 1}{(j2\pi f + \frac{1}{2})(j2\pi f + \frac{1}{4})} \tag{31}$$

(δ΄) Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace ως

$$X(s) = \frac{1}{s+1},\ \ \sigma > -1 \tag{32}$$

και η έξοδος

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})} \tag{33}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα καταλήγουμε στο

$$Y(s) = 4\frac{1}{s+\frac{1}{4}} - 4\frac{1}{s+\frac{1}{2}},\ \ \sigma > -1/4 \tag{34}$$

οπότε

$$y(t) = 4e^{-t/4}u(t) - 4e^{-t/2}u(t) \tag{35}$$

(ε΄) Από τη σχέση

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})} \tag{36}$$

έχουμε

$$Y(s)(s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{8}) = X(s)(s+1) \Longleftrightarrow s^2Y(s) + \frac{3}{4}sY(s) + \frac{1}{8}Y(s) = sX(s) + X(s) \tag{37}$$

και γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{4}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{8}y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t) \tag{38}$$

Άσκηση 5 - Συστήματα Ελάχιστης Φάσης και All-pass

(α΄) Ως ευσταθές και αιτιατό θα πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα και να είναι δεξιόπλευρο. Οι πόλοι του βρίσκονται στις θέσεις $s=-3$, $s=-4$, οπότε το πεδίο σύγκλισης θα είναι $\sigma > -3$.

(β΄) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε ότι

$$|G(f)| = \frac{1}{|H(f)|} \tag{39}$$

άρα χρειαζόμαστε το αντίστροφο του $H(f)$. Αυτό όμως δεν είναι ευσταθές και αιτιατό, αφού έχει πόλους στο $s=1$, $s=2$. Μπορούμε όμως να βρούμε ένα άλλο σύστημα με ίδια απόκριση πλάτους με το $H(f)$, κι αυτό είναι το σύστημα ελάχιστης φάσης του $H(f)$, το οποίο έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο. Το σύστημα αυτό είναι το

$$H_{min}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)},\ \ \sigma > -3 \tag{40}$$

του οποίου το αντίστροφο είναι το

$$\frac{1}{H_{min}(s)} = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)},\ \ \sigma > -1 \tag{41}$$

'ρα το $G(s)$ που ζητείται είναι το παραπάνω.

[$\star$] Άσκηση 6 - Κυκλώματα και μετασχ. Laplace

Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$E(t) = V_0(u(t) - u(t-1)) \longleftrightarrow E(s) = V_0\Big(\frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s}\Big) = V_0\frac{1-e^{-s}}{s},\ \ \sigma > 0 \tag{42}$$

Η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται ως

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t) \longleftrightarrow RI(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} = E(s) \Longleftrightarrow \frac{1}{4}I(s) + \frac{I(s)}{s} = V_0\frac{1-e^{-s}}{s} \tag{43}$$

οπότε

$$(s+4)I(s) = 4V_0(1-e^{-s}) \Longleftrightarrow I(s) = 4V_0\frac{1-e^{-s}}{s+4} = \frac{4V_0}{s+4} - e^{-s}\frac{4V_0}{s+4} \tag{44}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο έχουμε

$$i(t) = 4V_0e^{-4t}u(t) - 4V_0e^{-4(t-1)}u(t-1) \tag{45}$$

η οποία γράφεται ως

$$i(t) = \begin{cases} 4V_0e^{-4t}, & 0 < t < 1 \\ 4V_0(e^{-4t} - e^{-4(t-1)}), & t > 1 \end{cases} \tag{46}$$

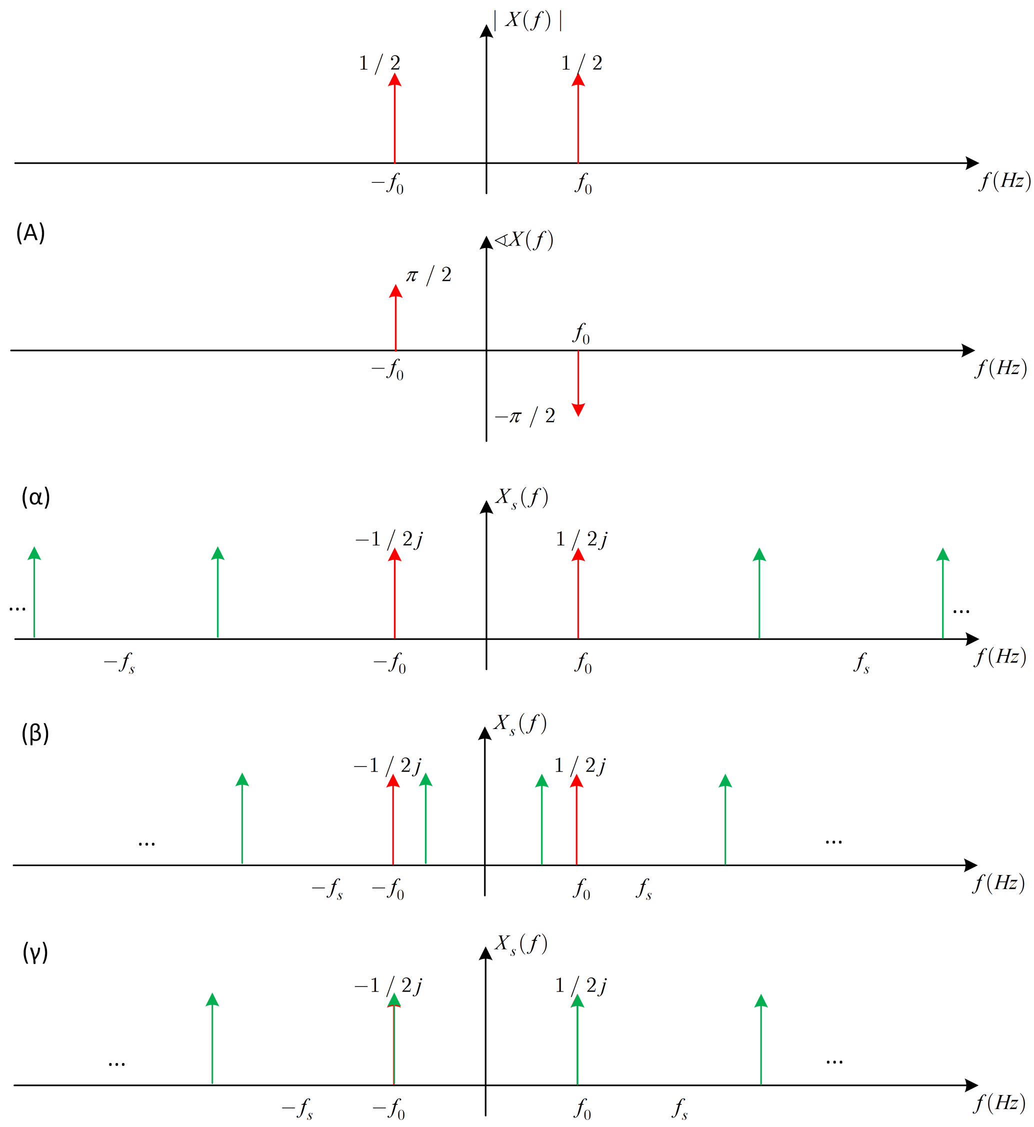
Άσκηση 7 - Στα βήματα των Nyquist-Shannon

(α') Είναι $X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$ που γράφεται ως

$$X(f) = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0) \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0) \tag{48}$$

(β') Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 1(A).



Σχήμα 1: *Φάσματα Άσκησης 7.*

(γ') Προφανώς $f_{max} = f_0$.

(δ') Τα αποτελέσματα της δειγματοληψίας σε κάθε περίπτωση φαίνονται στο Σχήμα 1(α-γ).

Στην πρώτη περίπτωση ικανοποιείται το θεώρημα του Shannon και το σήμα μπορεί να ανακτηθεί με χαμηλοπερατό φίλτρο. Στη δεύτερη περίπτωση, όχι. Στην τρίτη περίπτωση, η δειγματοληψία είναι οριακή.

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία και Διακριτά Σήματα Ι

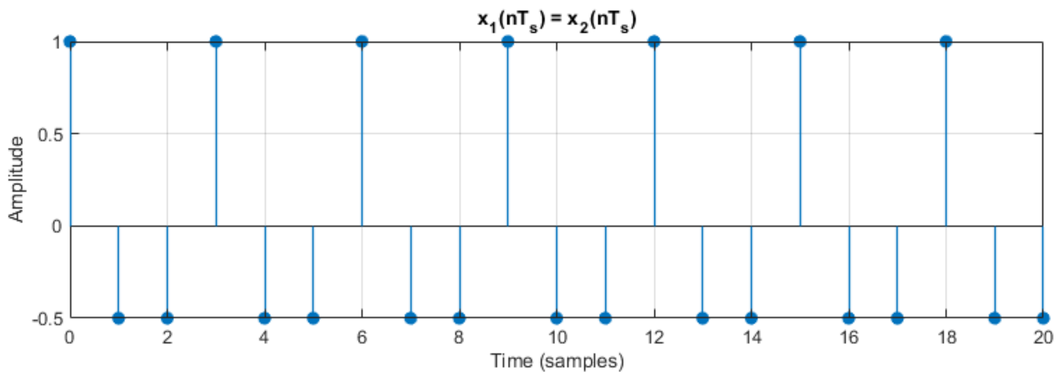
Θέτουμε $t = nT_s$ και έχουμε

$$x_1(nTs) = \cos(2\pi 40nT_s) = \cos(2\pi 40\frac{n}{60}) = \cos(\frac{4\pi n}{3}) = \cos(\frac{2\pi n}{3}) \tag{49}$$

$$x_2(nTs) = \cos(2\pi 100nT_s) = \cos(2\pi 100\frac{n}{60}) = \cos(\frac{10\pi n}{3}) \tag{50}$$

$$= \cos(\frac{6\pi n + 4\pi n}{3}) = \cos(\frac{4\pi n}{3} + 2\pi n) = \cos(\frac{4\pi n}{3}) = \cos(\frac{2\pi n}{3}) \tag{51}$$

Παρατηρούμε πως $x_1(nTs) = x_2(nTs)$, όπως στο Σχήμα 2. Αυτό συμβαίνει γιατί το $x_2(t)$ δειγματοληπτείται με



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 8.*

συχνότητα μικρότερη της $2f_{max}$ και εμφανίζεται το φαινόμενο του aliasing.

Άσκηση 9 - Δειγματοληψία και Διακριτά Σήματα ΙΙ

(α΄) Ο ρυθμός Nyquist είναι $2f_{max}$, δηλαδή $2 \times 4000 = 8000Hz$

(β΄) Θέτουμε $t = nT_s = \frac{n}{3500}$ και τότε:

$$x_a(nT_s) = 2\cos\left(2\pi 1200\frac{n}{3500}\right) + 4\sin\left(2\pi 3000\frac{n}{3500}\right) + \cos\left(2\pi 4000\frac{n}{3500}\right) \tag{52}$$

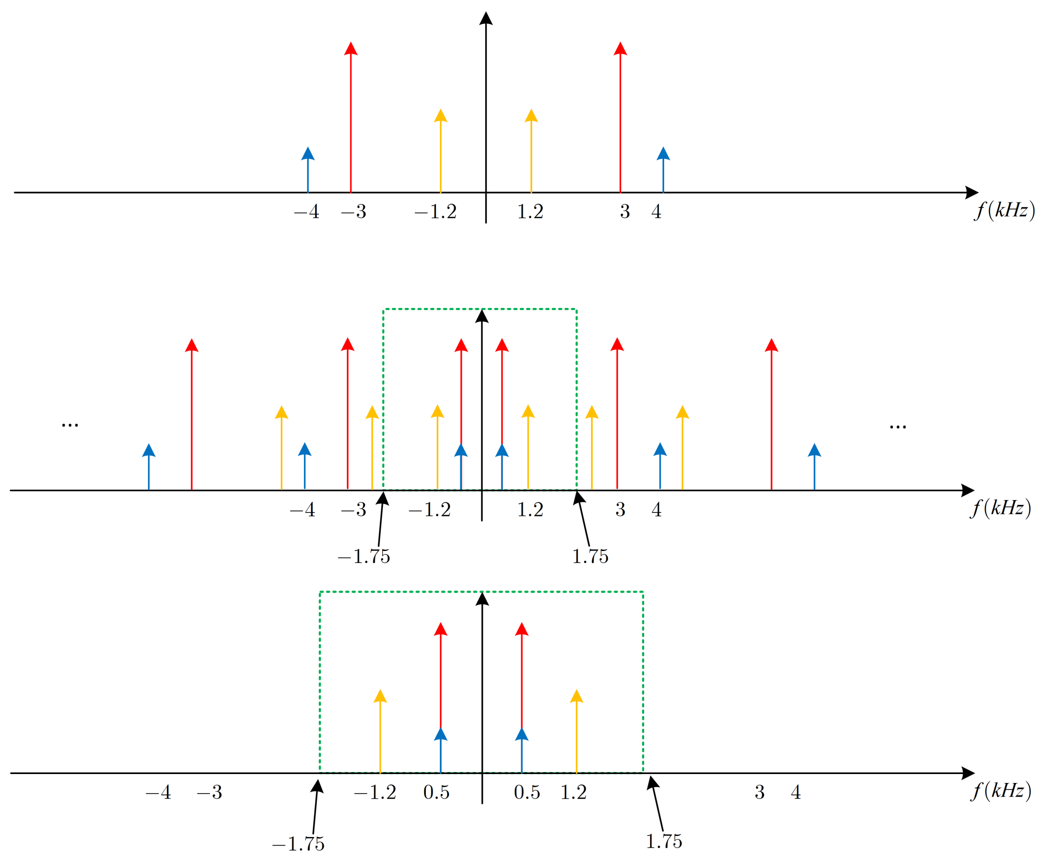
$$= 2\cos\left(\frac{24\pi n}{35}\right) + 4\sin\left(\frac{12\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{16\pi n}{7}\right) \tag{53}$$

$$= 2\cos\left(\frac{24\pi n}{35}\right) + 4\sin\left(\frac{(14-2)\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{(14+2)\pi n}{7}\right) \tag{54}$$

$$= 2\cos\left(\frac{24\pi n}{35}\right) - 4\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) \tag{55}$$

$$= x[n] \tag{56}$$

(γ΄) Αφού $f_s < 2f_{max}$, τότε δεν μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το $x_a(t)$ από το $x[n]$. Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα είναι όπως στο Σχήμα 3(β). Άρα το σήμα που ανακτούμε είναι το $x_r(t) = 2\cos(2\pi 1200t) + 4\sin(2\pi 500t) + \cos(2\pi 500t)$, που δεν ειναι το ίδιο με το αρχικό.



Σχήμα 3: *Φάσματα Άσκησης 9.*