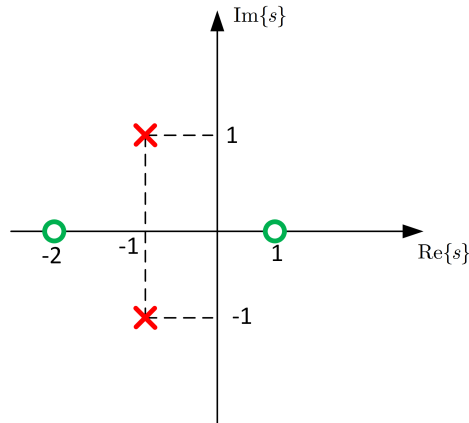


ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Έκτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace

(α) Έστω το διάγραμμα πόλων-μηδενικών μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$. Πόσα πιθανά πεδία σύγκλισης υπάρχουν;



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

(β) Ποιά από αυτά αντιστοιχούν σε

- i. αιτιατό
- ii. ευσταθές
- iii. μη αιτιατό (ή αμφίπλευρης κρουστικής απόκρισης)
- iv. αντι-αιτιατό

σύστημα;

(γ) Αν ορίσουμε το **αντίστροφο σύστημα** ως το σύστημα

$$H_{inv} = \frac{1}{H(s)}, \quad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset \quad (1)$$

δηλ. το σύστημα που έχει πόλους τα μηδενικά του $H(s)$ και μηδενικά τους πόλους του $H(s)$, τότε είναι το αντίστροφο σύστημα $H_{inv}(s)$ μοναδικό, όταν το $H(s)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές και αιτιατό σύστημα;

Λύση:

α) Υπάρχουν δυο πιθανά πεδία σύγκλισης, $\sigma > -1$ και $\sigma < -1$, αφού οι δυο πόλοι είναι συζυγείς και έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος.

β) i. Για να είναι το σύστημα αιτιατό θα πρέπει να έχει "δεξιόπλευρο" πεδίο σύγκλισης. Άρα $\sigma > -1$.

- ii. Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Άρα $\sigma > -1$.
- iii. Δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να αντιστοιχεί σε μη αιτιατό σύστημα, γιατί μόνο "λωριδοειδή" πεδία σύγκλισης δίνουν κρουστική απόκριση μη αιτιατή.
- iv. Για να είναι το σύστημα αντι-αιτιατό, θα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να είναι "αριστερόπλευρο". Άρα $\sigma < -1$.
- γ) Για ευσταθές και αιτιατό σύστημα είδαμε ότι $\sigma > -1$. Το αντίστροφο σύστημα θα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1$, $\sigma = -2$. Χρειάζεται να επιλέξουμε πεδίο σύγκλισης τέτοιο ώστε

$$R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset \quad (2)$$

Έχουμε επιλογές $\sigma > 1$, $\sigma < -2$, $-2 < \sigma < 1$ για το αντίστροφο σύστημα. Παρατηρούμε ότι για δυο από αυτά, τα $\sigma > 1$, $-2 < \sigma < 1$ έχουν μη κενή τομή με το αρχικό σύστημα. Άρα το αντίστοιχο σύστημα δεν είναι μοναδικό.

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace II

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{-s^2 - s - 2}{s^2 + 2s + 2} \quad (3)$$

ενός ΓΧΑ συστήματος, με $\sigma > -1$. Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$, καθώς και μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

Λύση:

Δεν μπορούμε να κάνουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα γιατί ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή δεν είναι γνήσια μικρότερος του παρονομαστή. Θα πρέπει να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα. Η διαίρεση θα μας δώσει

$$H(s) = -1 + \frac{s}{s^2 + 2s + 2} = -1 + \frac{s}{(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))} = -1 + \frac{A}{s + 1 - j} + \frac{B}{s + 1 + j} \quad (4)$$

με

$$A = \frac{1}{2}(1 + j) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4} \quad (5)$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4} \quad (6)$$

και άρα

$$H(s) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4} \frac{1}{s + 1 - j} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4} \frac{1}{s + 1 + j} \quad (7)$$

και αφού $\sigma > -1$, στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε

$$h(t) = -\delta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}e^{(-1+j)t}u(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}e^{(-1-j)t}u(t) \quad (8)$$

$$= -\delta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}e^{-t}e^{jt}u(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}e^{-t}e^{-jt}u(t) \quad (9)$$

$$= -\delta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j(t+\pi/4)}e^{-t}u(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j(t+\pi/4)}e^{-t}u(t) \quad (10)$$

$$= -\delta(t) + \sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)u(t) \quad (11)$$

Μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα θα είναι

$$H(s) = \frac{-s^2 - s - 2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{Y(s)}{X(s)} \iff (s^2 + 2s + 2)Y(s) = (-s^2 - s - 2)X(s) \quad (12)$$

και γυρίζοντας στο πεδίο του χρόνου, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = -\frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \quad (13)$$

Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής: μετά τη διαίρεση πήραμε

$$H(s) = -1 + \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \quad (14)$$

Αν δούμε το τυπολόγιο με τα έτοιμα ζεύγη μετασχ. Laplace θα δούμε τα ζεύγη

$$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}, \quad \sigma > -a \quad (15)$$

$$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) u(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}, \quad \sigma > -a \quad (16)$$

τα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε στο κλάσμα που έχουμε ως δεύτερο όρο. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στον παρονομαστή και τον όρο που λείπει στον αριθμητή,

$$H(s) = -1 + \frac{s+1-1}{s^2 + 2s + 1 + 1} = -1 + \frac{s+1}{s^2 + 2s + 1 + 1} - \frac{1}{s^2 + 2s + 1 + 1} \quad (17)$$

δηλ.

$$H(s) = -1 + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1^2}, \quad \sigma > -1 \quad (18)$$

και από τα παραπάνω ζεύγη,

$$h(t) = -\delta(t) + e^{-t} \cos(t) u(t) - e^{-t} \sin(t) u(t) = -\delta(t) + e^{-t} (\cos(t) - \sin(t)) u(t) \quad (19)$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace III

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s - 3} \quad (20)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, χαρακτηρίστε την με βάση την ευστάθεια και την πλευρικότητα, και γράψτε μια διαφορική εξίσωση που τα περιγράφει.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίσος με του παρονομαστή, άρα πρέπει να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα πριν τα αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα. Διαιρώντας, παίρνουμε

$$H(s) = 1 + \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-1} \quad (21)$$

με τα A, B να δίνονται από τους γνωστούς τύπους ως $A = -17/4$, $B = 1/4$. Άρα

$$H(s) = 1 - \frac{17}{4} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{4} \frac{1}{s-1} \quad (22)$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης τα

- $\sigma > 1$
- $\sigma < -3$

- $-3 < \sigma < 1$

Από τις ιδιότητες των πεδίων σύγκλισης, αναμένουμε ότι

- η κρουστική απόκριση θα είναι δεξιόπλευρο σήμα και ασταθές, αφού δεν περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα
- η κρουστική απόκριση θα είναι αριστερόπλευρο σήμα και ασταθές, αφού δεν περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα
- η κρουστική απόκριση θα είναι αμφίπλευρο σήμα και ευσταθές, αφού περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα

αντίστοιχα. Με βάση τα πεδία σύγκλισης, η κρουστική απόκριση θα είναι

- $$h(t) = \delta(t) - \frac{17}{4}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{4}e^t u(t) \quad (23)$$

- $$h(t) = \delta(t) + \frac{17}{4}e^{-3t}u(-t) - \frac{1}{4}e^t u(-t) \quad (24)$$

- $$h(t) = \delta(t) - \frac{17}{4}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{4}e^t u(-t) \quad (25)$$

αντίστοιχα.

Τέλος, από τη συνάρτηση μεταφοράς έχουμε

$$\frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s - 3} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (26)$$

$$Y(s)(s^2 + 2s - 3) = X(s)(s^2 - 2s + 2) \quad (27)$$

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) - 3Y(s) = s^2 X(s) - 2s X(s) + 2X(s) \quad (28)$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης, επιστρέφουμε στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) - 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 2\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \quad (29)$$

Σημείωση: Στις ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, η πλευρικότητα ταυτίζεται με την αιτιατότητα, δηλ. μια συνάρτηση μεταφοράς με πεδίο σύγκλισης $\sigma > \sigma_0$, οδηγεί σε αιτιατή κρουστική απόκριση (κι όχι απλά δεξιόπλευρη), ενώ μια συνάρτηση μεταφοράς με πεδίο σύγκλισης $\sigma < \sigma_0$ οδηγεί σε μια αντι-αιτιατή κρουστική απόκριση (και όχι απλά αριστερόπλευρη). Τέλος, η αμφιπλευρικότητα ταυτίζεται με τη μη-αιτιατότητα.