

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πέμπτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες I

Σας δίνεται το ζεύγος μετασχ. Laplace

$$x(t) \longleftrightarrow \frac{2s}{s^2 + 2} \quad (1)$$

με $x(t) = 0$, $t < 0$. Βρείτε τον μετασχ. Laplace των παρακάτω σημάτων:

(α) $x(3t)$

(β) $x(t - 2)$

(γ) $x(t) * \frac{d}{dt}x(t)$

(δ) $e^{-t}x(t)$

(ε) $2tx(t)$

(ς) $\int_0^t x(3u)du$

Λύση:

Από εκφώνηση, το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό, άρα δεξιόπλευρο. Το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του θα είναι ένα ημιεπίπεδο δεξιότερα από κάποια κατακόρυφη ευθεία που ορίζει ένας πόλος του μετασχηματισμού. Ο μετασχηματισμός $X(s)$ έχει δυο πόλους στις θέσεις $\pm j\sqrt{2}$, επάνω στο φανταστικό άξονα, άρα έχει πεδίο σύγκλισης $R_x = \{\Re\{s\} > 0\}$, λόγω της πλευρικότητας του σήματος στο χρόνο.

α)

$$x(3t) \xrightarrow{L} \frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\frac{2}{3}s}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{s}{\frac{s^2}{9} + 2} \quad (2)$$

με $\Re\{s\} > 0$.

β)

$$x(t - 2) \xrightarrow{L} X(s)e^{-2s} = \frac{2s}{s^2 + 2}e^{-2s} \quad (3)$$

με $\Re\{s\} > 0$.

γ)

$$x(t) * \frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{L} X(s) \cdot sX(s) = sX^2(s) = s\left(\frac{2s}{s^2 + 2}\right)^2 = \frac{4s^3}{(s^2 + 2)^2} \quad (4)$$

με $\Re\{s\} > 0$.

δ)

$$e^{-t}x(t) \xleftrightarrow{L} X(s+1) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2} \quad (5)$$

με $\Re\{s\} > -1$.

ε)

$$2tx(t) \xleftrightarrow{L} -2\frac{d}{ds}X(s) = -4\frac{d}{ds} \cdot \frac{s}{s^2+2} = -4\frac{s^2+2-2s \cdot s}{(s^2+2)^2} \quad (6)$$

$$= -4\frac{s^2+2-2s^2}{(s^2+2)^2} = -4\frac{-s^2+2}{(s^2+2)^2} \quad (7)$$

$$= 4\frac{s^2-2}{(s^2+2)^2} \quad (8)$$

με $\Re\{s\} > 0$.

ς)

$$\int_0^t x(3u)du \xleftrightarrow{L} \frac{1}{3} \cdot \frac{X\left(\frac{s}{3}\right)}{s} = \frac{1}{3s} \cdot \frac{\frac{2}{3}s}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2} = \frac{2}{9s} \cdot \frac{s}{\frac{s^2}{9}+2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{9}+2} \quad (9)$$

με $\Re\{s\} > 0$.**Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες II**Έστω το σήμα $y(t)$ που σχετίζεται με δυο σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ως

$$y(t) = x_1(t-2) * \frac{d}{dt}x_2(t-1) \quad (10)$$

με

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad (11)$$

$$x_2(t) = e^{-3t}u(t) \quad (12)$$

Χρησιμοποιήστε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες του μετασχ. Laplace για να βρείτε το μετασχ. Laplace $Y(s)$ του σήματος $y(t)$. Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!Λύση:

Από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο, καθώς και τις ιδιότητες της παραγώγισης και χρονικής μετατόπισης, είναι

$$y(t) = x_1(t-2) * \frac{d}{dt}x_2(t-1) \longleftrightarrow Y(s) = X_1(s)e^{-2s}sX_2(s)e^{-s} = sX_1(s)X_2(s)e^{-3s} \quad (13)$$

$$= s\frac{1}{s+2}\frac{1}{s+3}e^{-3s} = \frac{s}{(s+2)(s+3)}e^{-3s} \quad (14)$$

με $\{ \Re\{s\} > -2 \} \cap \{ \Re\{s\} > -3 \} = \{ \Re\{s\} > -2 \}$.**Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες - III**Έστω ότι για ένα σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και άρτιο

- ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει τέσσερις πόλους και κανένα μηδενικό στο s -επίπεδο.
- ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει έναν εκ των πόλων του στο $s = (1/2)e^{j\pi/4}$.
- ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 4$$

Βρείτε το μετασχηματισμό $X(s)$ και το πεδίο σύγκλισής του.

Λύση:

Αφού $x(t) \in \mathcal{R}$ και $x(t) = x(-t)$ συνεπάγεται ότι $X(s) = X^*(s^*) = X(-s)$. Η σχέση αυτή μας λέει ότι αν s_p ένας πόλος του $X(s)$, δηλ. $X(s_p) \rightarrow \infty$, τότε και ο s_p^* είναι πόλος του $X(s)$, όπως επίσης και ο $-s_p$ αλλά και ο $-s_p^*$. Άρα για τον πόλο $s_p = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ θα έχουμε υποχρεωτικά και τους πόλους $\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$, $-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$, $-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$. Άρα

$$X(s) = \frac{A}{(s - \frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s - \frac{1}{2}e^{j\pi/4})(s + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s + \frac{1}{2}e^{j\pi/4})} \quad (15)$$

Από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \Big|_{s=0} = X(0) = 4 \quad (16)$$

Οπότε θέτοντας $s = 0$ στη Σχέση (15), παίρνουμε $A = 1/4$. Μετά από απλές πράξεις στο παρονομαστή, παίρνουμε

$$X(s) = \frac{4}{16s^4 + 1} \quad (17)$$

Οι πόλοι είναι ήδη γνωστοί, και βρίσκονται όλοι (ανά ζεύγος συζυγών) στις κατακόρυφες ευθείες

$$\sigma_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/4} \right\} = \frac{1}{2} \cos(\pm\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

και

$$\sigma_2 = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/4} \right\} = -\frac{1}{2} \cos(\pm\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα

- $\sigma > \sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\sigma < \sigma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, και
- $\sigma_2 < \sigma < \sigma_1 \iff -\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4}$

Εφόσον το σήμα στο χρόνο είναι άρτιο, είναι αμφίπλευρο (δεν μπορεί να είναι κάτι άλλο - θα μπορούσε να είναι άρτιο και πεπερασμένης διάρκειας αλλά τότε δε θα είναι πόλους στο μιγαδικό επίπεδο). Άρα το πεδίο σύγκλισης θα είναι μια “λωρίδα”, δηλ.

$$R_X = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} \quad (18)$$

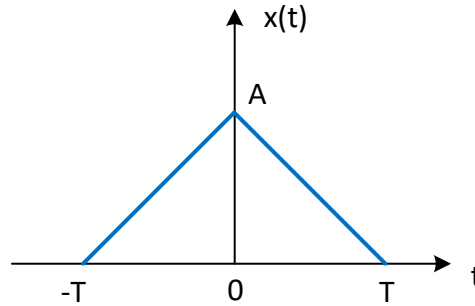
Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες - IV

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)$ (το γνωστό τριγωνικό παλμό) που φαίνεται στο Σχήμα 1, με δυο τρόπους:

(α) με τον ορισμό. Δίνεται ότι $\int te^{st}dt = \frac{e^{st}}{s} \left(t - \frac{1}{s} \right)$

(β) με χρήση ιδιοτήτων (όποιες νομίζετε εσείς κατάλληλες).

Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού;

Σχήμα 1: Σήμα $x(t)$ Άσκησης 4.Λύση:

α) Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A \right) e^{-st} dt + \int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A \right) e^{-st} dt \quad (19)$$

$$= \int_{-T}^0 \frac{A}{T}te^{-st} dt + \int_{-T}^0 Ae^{-st} dt - \int_0^T \frac{A}{T}te^{-st} + \int_0^T e^{-st} dt \quad (20)$$

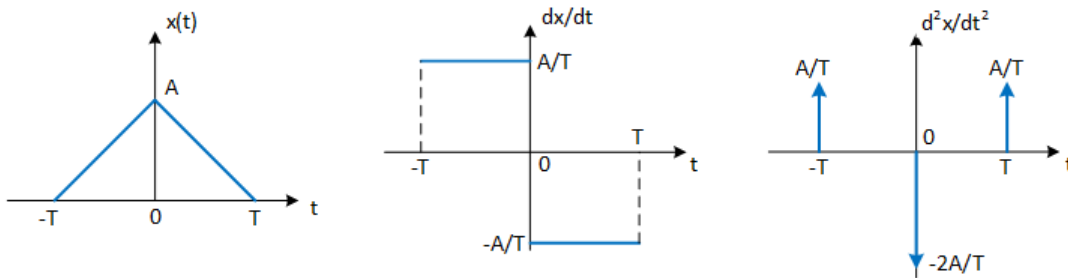
$$= \frac{A}{T} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \left(t + \frac{1}{s} \right) \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{s} e^{-st} \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{T} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \left(t + \frac{1}{s} \right) \Big|_0^T - \frac{A}{s} e^{-st} \Big|_0^T \quad (21)$$

$$= -\frac{A}{T} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{A}{T} \cdot \frac{e^{sT}}{s} \left(\frac{1}{s} - T \right) - \frac{A}{s} + \frac{A}{s} e^{sT} + \frac{A}{T} \cdot \frac{e^{-sT}}{s} \left(T + \frac{1}{s} \right) - \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{A}{s} e^{-sT} + \frac{A}{s} \quad (22)$$

$$= -\frac{A}{Ts^2} + \frac{A}{Ts^2} e^{sT} - \frac{A}{s} e^{sT} + \frac{A}{s} e^{sT} + \frac{A}{s} e^{-sT} + \frac{A}{Ts^2} e^{-sT} - \frac{A}{Ts^2} - \frac{A}{s} e^{-sT} \quad (23)$$

$$= \frac{A}{Ts^2} (e^{sT} + e^{-sT}) - \frac{2A}{Ts^2} = \frac{A}{T} \left(\frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2} \right) \quad (24)$$

β) Δείτε το Σχήμα 2. Θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης δυο φορές (μπορεί να λυθεί και μια φορά παραγώγιση).



Σχήμα 2: Σχήματα Άσκησης 4.

Το $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ γράφεται ως:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{A}{T} \delta(t+T) - \frac{2A}{T} \delta(t) + \frac{A}{T} \delta(t-T) \quad (25)$$

και έχει Μετασχ. Laplace

$$L\left\{ \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right\} = \frac{A}{T} e^{sT} - \frac{2A}{T} + \frac{A}{T} e^{-sT}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης, έχουμε:

$$L\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = \frac{A}{T}(e^{sT} + e^{-sT} - 2) = s^2 X(s) \iff X(s) = \frac{A}{T} \cdot \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2} \quad (26)$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s -επίπεδο, γιατί το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας. Μη σας παρασύρει η μορφή του αποτελέσματος, γιατί

$$\frac{A}{T} \cdot \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2} = \frac{A}{T} \cdot \frac{(e^{sT/2} - e^{-sT/2})^2}{s^2} \quad (27)$$

που στο $s = 0$ μηδενίζεται τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής.