

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τρίτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις I

Λύστε την ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0 \quad (1)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1, y'(0^-) = -1$.

Λύση:

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης αντιστοιχεί στην περίφημη απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι της μορφής

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 \quad (2)$$

με ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = 1 \pm j \quad (3)$$

Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{(1+j)t} + c_2 e^{(1-j)t}, \quad t > 0 \quad (4)$$

με παράγωγο

$$\frac{d}{dt}y_{zi}(t) = (1+j)c_1 e^{(1+j)t} + (1-j)c_2 e^{(1-j)t}, \quad t > 0 \quad (5)$$

Από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \iff c_1 + c_2 = 1 \quad (6)$$

και

$$y'_{zi}(0^-) = -1 \iff (1+j)c_1 + (1-j)c_2 = -1 \quad (7)$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} + j \quad (8)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - j \quad (9)$$

Έτσι

$$y_{zi}(t) = \left(\frac{1}{2} + j\right) e^{(1+j)t} + \left(\frac{1}{2} - j\right) e^{(1-j)t}, \quad t > 0 \quad (10)$$

Η απάντηση αυτή θεωρείται πλήρης αλλά ας δούμε πως μπορούμε να την κάνουμε πιο κομψή. Οι συντελεστες c_1, c_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί και γράφονται σε πολική μορφή ως

$$z_1 = \frac{1}{2} + j = |z_1| e^{j\phi} \quad (11)$$

με

$$|z_1| = \sqrt{(1/2)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (12)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1}{1/2} = \tan^{-1}(2) = 63.4^\circ \quad (13)$$

Οι δυο συντελεστές c_1, c_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα ο $z_2 = \frac{1}{2} - j = z_1^*$, και έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φάση με αυτές που βρήκαμε για τον z_1 . Άρα

$$y_{zi}(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{j63.4^\circ} e^t e^{jt} + \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j63.4^\circ} e^t e^{-jt}, t > 0 \quad (14)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} e^t \left(e^{j(t+63.4^\circ)} + e^{-j(t+63.4^\circ)} \right), t > 0 \quad (15)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} e^t 2 \cos(t + 63.4^\circ), t > 0 \quad (16)$$

$$= \sqrt{5} e^t \cos(t + 63.4^\circ), t > 0 \quad (17)$$

Άσκηση 2 - Διαφορικές Εξισώσεις II

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$S : \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \frac{d}{dt} y(t) + 8y(t) = x(t) + \frac{d}{dt} x(t) \quad (18)$$

Λύση:

Θεωρούμε το απλούστερο σύστημα S_0

$$S_0 : \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \frac{d}{dt} y(t) + 8y(t) = x(t) \quad (19)$$

για το οποίο θεωρούμε ότι περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h_0(t)$ και "ψευδο"-αρχικές συνθήκες

$$h(0^+) = 0 \quad (20)$$

$$h'(0^+) = 1 \quad (21)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι το

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 \quad (22)$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4 \quad (23)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος S_0 είναι

$$h_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, t > 0 \quad (24)$$

με παράγωγο

$$h'_0(t) = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t}, t > 0 \quad (25)$$

Από τις "ψευδο"-αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$h_0(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \quad (26)$$

$$h'_0(0^+) = -2c_1 - 4c_2 = 1 \quad (27)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \quad (28)$$

Άρα

$$h_0(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t) \quad (29)$$

Επιστρέφοντας στο σύστημα S , η κρουστική του απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_0(t) + \frac{d}{dt}h_0(t) \quad (30)$$

και άρα

$$h(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t) \quad (31)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t) + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right)' u(t) + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u'(t) \quad (32)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t) - e^{-2t}u(t) + 2e^{-4t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}\delta(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}\delta(t) \quad (33)$$

Επειδή

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (34)$$

τελικά

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}u(t) - e^{-2t}u(t) + 2e^{-4t}u(t) + \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t) \quad (35)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{3}{2}e^{-4t}u(t) \quad (36)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-4t} \right) u(t) \quad (37)$$