ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Δεύτερο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler II

(α΄) Γράψτε σε πολική μορφή $z = |z|e^{j\phi}$ το μιγαδικό

$$z = -1 - j \tag{1}$$

Η φάση του πρέπει να ανήκει στο $(-\pi, \pi]$.

(β΄) Λύστε την εξίσωση

$$\mathrm{Re}\Big\{(-1-j)e^{j2\theta}\Big\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Θα έχουμε

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \tag{3}$$

και

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \tag{4}$$

Οπότε

$$z = \sqrt{2}e^{-j3\pi/4} \tag{5}$$

(β΄) Είναι

$$\mathrm{Re}\Big\{(-1-j)e^{j2\theta}\Big\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\sqrt{2}e^{-j3\pi/4}e^{j2\theta}\Big\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\sqrt{2}e^{j(2\theta-3\pi/4)}\Big\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{8}$$

$$\sqrt{2}\cos(2\theta - 3\pi/4) = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{9}$$

$$\cos(2\theta - 3\pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{10}$$

$$\cos(2\theta - 3\pi/4) = \cos(\pi/6) \tag{11}$$

$$2\theta - \frac{3\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \tag{12}$$

$$2\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \tag{13}$$

$$\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{8} \tag{14}$$

$$= \begin{cases} k\pi + \frac{11\pi}{24} \\ k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler II
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, υπολογίστε το

$$\int_0^\pi \sin(4\theta)\cos(5\theta)d\theta \tag{16}$$

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(4\theta)\cos(5\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\frac{1}{2j}\int_0^\pi (e^{j4\theta}-e^{-j4\theta})(e^{j5\theta}+e^{-j5\theta})d\theta && (17)\\
&= \frac{1}{4j}\int_0^\pi (e^{j9\theta}+e^{-j\theta}-e^{j\theta}-e^{-j9\theta})d\theta && (18)\\
&= \frac{1}{j4}\int_0^\pi (2j\sin(9\theta)-2j\sin(\theta))d\theta && (19)\\
&= \frac{2j}{j4}\int_0^\pi (\sin(9\theta)-\sin(\theta))d\theta && (20)\\
&= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}\cos(9\theta)+\cos(\theta)\Big)\Big]_0^\pi && (21)\\
&= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}\cos(9\pi)+\cos(\pi)\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}\cos(0)+\cos(0)\Big) && (22)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{9}-1\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}+1\Big) = -\frac{8}{9} && (23)
\end{aligned}$$

Άσκηση 3 - Σήματα

(α΄) Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* αν ισχύει ότι

$$x(t) = x(-t) \tag{24}$$

ενώ λέγεται *περιττό* αν

$$x(t) = -x(-t) \tag{25}$$

Είναι το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{26}$$

άρτιο ή περιττό;

(β΄) Οποιοδήποτε σήμα όμως μπορεί να διασπασθεί σε ένα *άρτιο μέρος* και ένα *περιττό μέρος*, ως

$$x_{\text{άρτιο}}(t) = \frac{1}{2}\Big(x(t)+x(-t)\Big) \tag{27}$$

$$x_{\text{περιττό}}(t) = \frac{1}{2}\Big(x(t)-x(-t)\Big) \tag{28}$$

Βρείτε το άρτιο και το περιττό μέρος των σημάτων:

i. $x(t) = \cos(t)+\sin(t)+\sin(t)\cos(t)$

ii. $x(t) = (1+t^3)\cos^3(10t)$

Λύση:

(α΄) Για το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{29}$$

έχουμε ότι

$$x(-t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T \leq -t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \neq x(t) \tag{30}$$

λόγω του ότι $\sin(-x) = -\sin(x)$, ενώ

$$-x(-t) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T \leq -t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = x(t) \tag{31}$$

άρα το σήμα είναι περιττό.

(β') Θα έχουμε

i. Το σήμα $x(-t) = \cos(-t) + \sin(-t) + \sin(-t)\cos(-t) = \cos(t) - \sin(t) - \sin(t)\cos(t)$, οπότε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \tag{32}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t) + \cos(t) - \sin(t) - \sin(t)\cos(t)) \tag{33}$$
$$= \cos(t) \tag{34}$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \tag{35}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t) - \cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t)) \tag{36}$$
$$= \sin(t) + \sin(t)\cos(t) \tag{37}$$
$$= \sin(t)(1 + \cos(t)) \tag{38}$$

ii. Το σήμα $x(-t) = (1 + (-t)^3)\cos^3(-10t) = (1 - t^3)\cos^3(10t)$, οπότε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \tag{39}$$
$$= \frac{1}{2}((1 + t^3)\cos^3(10t) + (1 - t^3)\cos^3(10t)) \tag{40}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t) + \cos^3(10t) - t^3\cos(10t)) \tag{41}$$
$$= \cos^3(10t) \tag{42}$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \tag{43}$$
$$= \frac{1}{2}((1 + t^3)\cos^3(10t) - (1 - t^3)\cos^3(10t)) \tag{44}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t) - \cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t)) \tag{45}$$
$$= t^3\cos^3(10t) \tag{46}$$

Άσκηση 4 - Ενέργεια και Ισχύς

Ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας την πιο πιθανή από τις δυο μετρικές, σύμφωνα με όσα γνωρίζετε από τις διαλέξεις.

(α') $x(t) = 2\cos(\pi t) + \sin(10\pi t), \quad -\infty < t < +\infty$

(β') $x(t) = tu(t)$

(γ') $x(t) = t, \quad -\infty < t < +\infty$

(δ') $x(t) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big)$

Λύση: Έχουμε

(α') Για το $x(t) = 2\cos(\pi t) + \sin(10\pi t), \quad -\infty < t < +\infty$ γνωρίζουμε από τις διαλέξεις ότι

$$\sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \longrightarrow P = \sum_i \frac{A_i^2}{2} \tag{47}$$

οπότε είναι σήμα ισχύος. Δηλ.

$$P_x = \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{5}{2} \tag{48}$$

(β') Το σήμα $x(t) = tu(t)$ απειρίζεται όταν το $t \to +\infty$, οπότε δεν είναι σίγουρα σήμα ενέργειας ούτε ισχύος. Ας το δείξουμε

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t)dt = \int_{0}^{+\infty} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big]_0^{+\infty} = +\infty \tag{49}$$

και

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2u^2(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2u(t)dt && (50)\\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} t^2dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{t^3}{3}\Big]_0^T && (51)\\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\Big(\frac{T^3}{3} - 0\Big) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{T^3}{3} && (52)\\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{T^3}{6T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{T^2}{6} && (53)\\ &= +\infty && (54) \end{aligned}$$

άρα πράγματι δεν είναι ούτε σήμα ισχύος ούτε σήμα ενέργειας.

(γ') Το σήμα $x(t) = t, \quad -\infty < t < +\infty$ απειρίζεται όταν $|t| \to +\infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας ούτε ισχύος. Ας το δείξουμε.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \tag{55}$$

και

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{t^3}{3}\Big]_{-T}^T && (56)\\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\Big(\frac{T^3}{3} - \frac{(-T)^3}{3}\Big) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{2T^3}{3} && (57)\\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{2T^3}{6T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{T^2}{3} && (58)\\ &= +\infty && (59) \end{aligned}$$

(δ') Το σήμα $x(t) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και φραγμένου πλάτους, άρα είναι σίγουρα σήμα ενέργειας. Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\mathrm{rect}^2\Big(\frac{t}{T}\Big)dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 t\Big]_{-T/2}^{T/2} = A^2\Big(\frac{T}{2} - \frac{-T}{2}\Big) = A^2T \tag{60}$$

Άσκηση 5 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

I. Σχεδιάστε τα σήματα

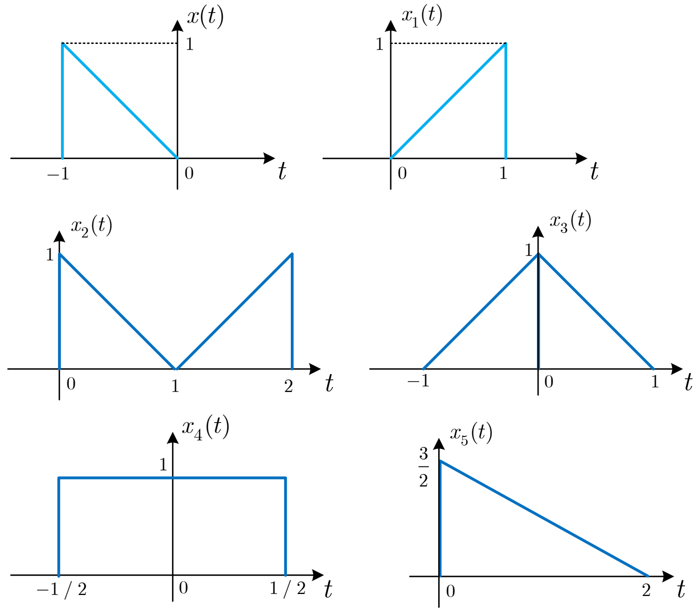
(α') $u(t-5) - u(t-7)$

(β') $u(t-5) + u(t-7)$

(γ') $t^2(u(t-1) - u(t-2))$

(δ') $(t-4)(u(t-2) - u(t-4))$

II. Στο Σχήμα 1, ισχύει ότι $x(-t) = x_1(t)$. Εκφράστε τα σήματα $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ με χρονικά μετατοπισμένους/κλιμακωμένους/αντιστραμμένους όρους των $x(t)$, $x_1(t)$. Για παράδειγμα, έχουμε $x_2(t) = x(t-1) + x_1(t-1)$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Λύση:

I. Τα σήματα

(α') $u(t-5) - u(t-7)$

(β') $u(t-5) + u(t-7)$

(γ') $t^2(u(t-1) - u(t-2))$

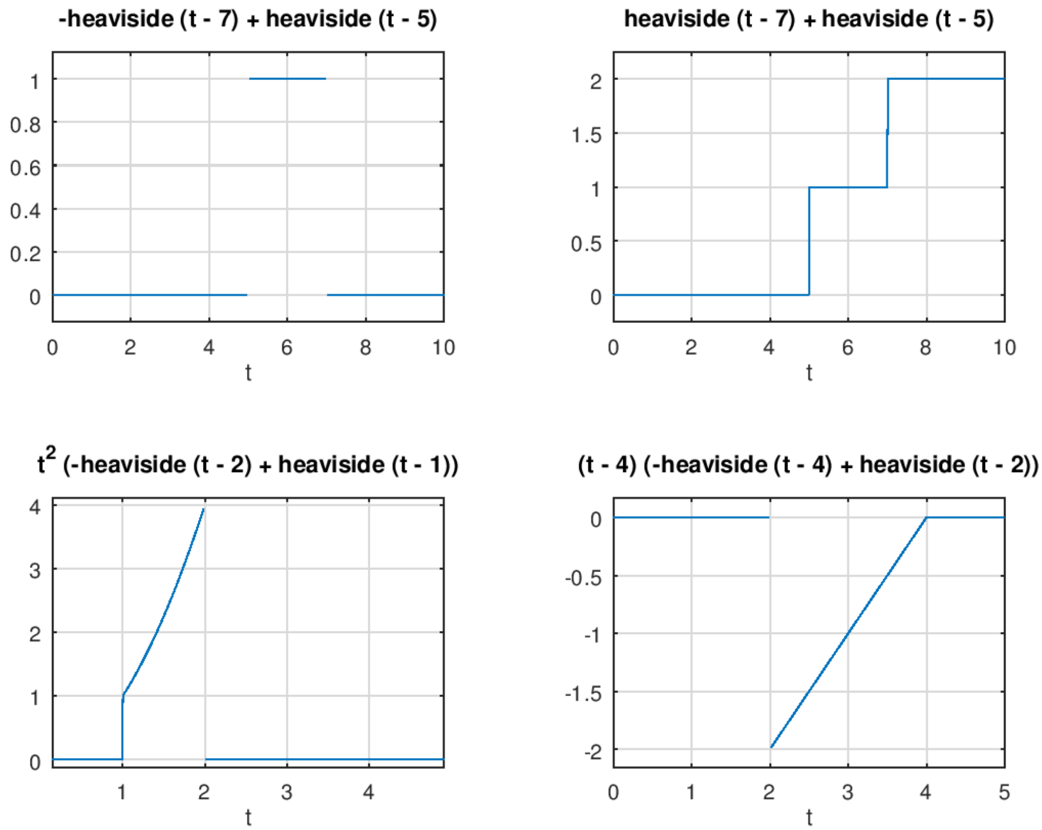
(δ') $(t-4)(u(t-2) - u(t-4))$

φαίνονται στο Σχήμα 2.

II. Μπορούμε να γράψουμε

$$x_2(t) = x(t-1) + x_1(t-1) \tag{61}$$
$$x_3(t) = x(t-1) + x_1(t+1) \tag{62}$$
$$x_4(t) = x(t-0.5) + x_1(t+0.5) \tag{63}$$
$$x_5(t) = \frac{3}{2}x\left(\frac{t}{2} - 1\right) \tag{64}$$

Οι παραπάνω απαντήσεις δεν είναι μοναδικές.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Άσκηση 6 - Συναρτήσεις Δέλτα

Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\Delta}, & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 1, & t > \Delta/2 \\ 0, & t < -\Delta/2 \end{cases} \tag{65}$$

Το σήμα αυτό περνά από ένα σύστημα διαφοριστή, δηλ. η έξοδος του συστήματος είναι απλά η παράγωγος του $x(t)$:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{66}$$

(α') Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$.

(β') Δείξτε ότι η είσοδος $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \frac{t}{\Delta}\left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right)\right] + u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \tag{67}$$

(γ') Δείξτε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \frac{1}{\Delta}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) \tag{68}$$

(δ') Δείξτε ότι

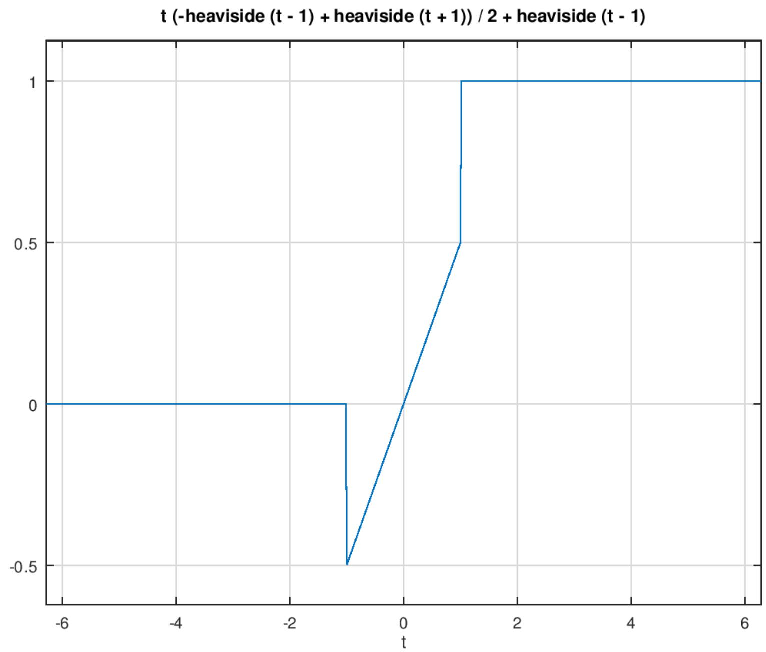
$$\lim_{\Delta \to 0} y(t) = \delta(t) \tag{69}$$

Λύση:

(α') Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\Delta}, & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 1, & t > \Delta/2 \\ 0, & t < -\Delta/2 \end{cases} \tag{70}$$

φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 6 για* $\Delta = 2$.

(β') Το σήμα στο διάστημα $-\Delta/2 < t < \Delta/2$ ουσιαστικά είναι μια πλάγια ευθεία πολλαπλασιασμένη με ένα τετραγωνικό παλμό με κέντρο το $t = 0$ και διάρκειας Δ. Άρα

$$x_1(t) = \frac{t}{\Delta}\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{\Delta}\Big) \tag{71}$$

Όμως ξέρουμε ότι ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών. Οπότε

$$x_1(t) = \frac{t}{\Delta}(u(t+\Delta/2) - u(t-\Delta/2)) \tag{72}$$

Το σήμα είναι μηδενικό για $t < -\Delta/2$, οπότε το υπόλοιπο σήμα για $t > \Delta/2$ που είναι μοναδιαίο, μπορεί να γραφεί ως

$$x_2(t) = u(t-\Delta/2) \tag{73}$$

Συνολικά

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{t}{\Delta}\Big[u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big)\Big] + u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{74}$$

(γ') Παραγωγίζοντας το σήμα $x(t)$ όπως το βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}\Big[u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big)\Big] + \frac{d}{dt}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{75}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{d}{dt}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{76}$$

$$= \Big(\frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}\Big)u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{t}{\Delta}\Big(\frac{d}{dt}u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big)\Big) - \Big(\frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}\Big)u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{t}{\Delta}\Big(\frac{d}{dt}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big)\Big) + \frac{d}{dt}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{77}$$

$$= \frac{1}{\Delta}u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{t}{\Delta}\delta\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{t}{\Delta}\delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) + \delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{78}$$

$$= \frac{1}{\Delta}u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}\frac{\Delta}{2}\delta\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}\frac{\Delta}{2}\delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) + \delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{\Delta}u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) + \delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{\Delta}u\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{1}{2}\delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{81}$$

Οι δυο πρώτοι όροι αποτελούν ένα τετραγωνικό παλμό διάρκειας Δ με κέντρο το $t = 0$ και πλάτος $1/\Delta$. Οπότε

$$y(t) = \frac{1}{\Delta}\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{\Delta}\Big) + \frac{1}{2}\delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big) \tag{82}$$

(δ΄) Όταν $\Delta \to 0$, ο τετραγωνικός παλμός γίνεται απειροστά στενός και αποκτά απείρως μεγάλο πλάτος, με επιφάνεια $\Delta \times 1/\Delta = 1$, άρα προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Οπότε

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{\Delta}\Big) = \delta(t) \tag{83}$$

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις Δέλτα της εξόδου $y(t)$, έχουμε ότι

$$\lim_{\Delta\to 0}\Big(\frac{1}{2}\delta\Big(t-\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t+\frac{\Delta}{2}\Big)\Big) = 0 \tag{84}$$

γιατί οι δυο συναρτήσεις Δέλτα πλησιάζουν στη χρονική στιγμή $t = 0$, η μια από το 0^+ και η άλλη από το 0^-, κι επειδή οι επιφάνειές τους είναι $\pm\frac{1}{2}$, η μια ακυρώνει την άλλη. Άρα συνολικά

$$\lim_{\Delta\to 0} y(t) = \delta(t) \tag{85}$$