(17'-18') Επαναληπτική Τελική Εξέταση | ΗΥ-215 2023

Θέμα 1º

$$x(t) = 4\cos(2\pi 600t - \pi/3) + 2\sin(2\pi 900t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200t)$$

(α') Περίοδος $x(t)$; → Βρίσκουμε τη θεμελιώδη συχνότητα εύκολα γιατί έχουμε άθροισμα ημιτόνων ως:

$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ.}\{600, 900, 1200\}\ Hz = 300\ Hz$, άρα

$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{300}\ s$

(β') Ιδανικό φίλτρο $h(t) = \delta(t) - 600\cos(2\pi 550t)\,\text{sinc}(300t)$ δέχεται ως είσοδο το $x(t)$, και η έξοδος $y(t)$ πολ/ται με το σήμα $z(t) = \delta(t+1)$. Ν.Δ.Ο.: $w(t) = y(t)z(t) = \sqrt{2}\,\delta(t+1)$.

(όπου $w(t)$ η "2η έξοδος").

$\boxed{\gamma}$ Γνωρίζετε 4 είδη ιδανικών φίλτρων. Σε ποια κατηγορία ανήκει το $h(t)$ εδώ;

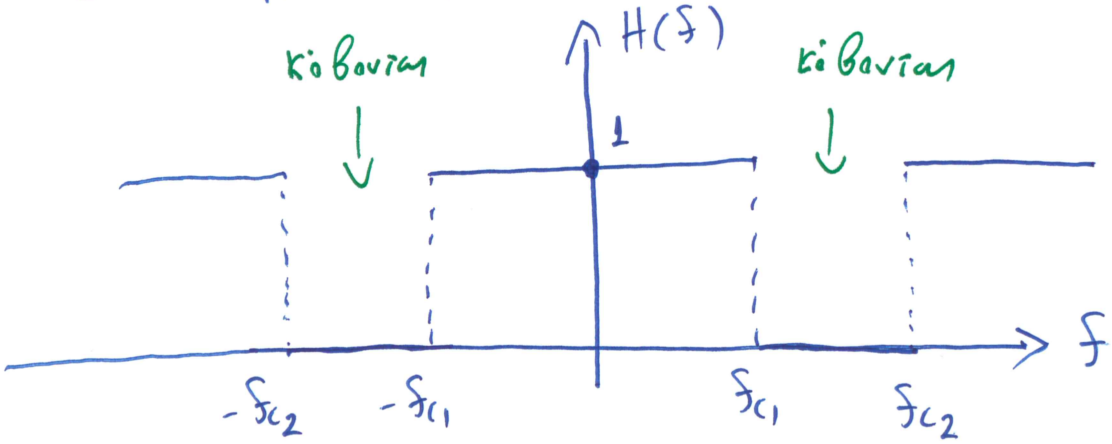
↳ Εάν δείτε τη θεωρία σας, είναι ένα ζωνοφρακτικό (bandstop) ιδανικό φίλτρο, διότι είναι της μορφής:

$$\begin{cases} h_{BS}(t) = \delta(t) - 2(f_{c_2} - f_{c_1})\,\mathrm{sinc}\big((f_{c_2} - f_{c_1})t\big)\cos(2\pi f_c t) \\ h(t) = \delta(t) - 600\,\mathrm{sinc}(300t)\cos(2\pi 550 t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ①,\ 2(f_{c_2} - f_{c_1}) = 600 \Leftrightarrow \underline{f_{c_2} - f_{c_1} = 300} \\ ②,\ f_c = \dfrac{f_{c_1} + f_{c_2}}{2} = 550 \Leftrightarrow \underline{f_{c_1} + f_{c_2} = 1100} \end{array}\right\}$$

$$① + ② \Rightarrow \boxed{f_{c_2} = 700\ Hz},\quad ② \overset{f_{c_2}}{\Rightarrow} \boxed{f_{c_1} = 400\ Hz}$$

↳ Στη συχνότητα, αυτό το φίλτρο (ζωνοφρακτικό):



φιλτράρισμα
‖
συνέλιξη
↓ F
πολ/σμός

Βλέπετε ξεκάθαρα ότι κόβει όσες συχνότητες ανήκουν στα διαστήματα $[f_{c_1}, f_{c_2}]$, $[-f_{c_2}, -f_{c_1}]$, ή $[400, 700]$, $[-700, -400]$ σε Hz.

↳ Άρα, από το $x(t)$ θα κοπεί μόνο το πρώτο ημίτονο, και έτσι η έξοδος θα είναι:

$$y(t) = 2\sin(2\pi 900 t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200 t)$$

↳ Άρα, πολ/ντας το $y(t)$ με το $z(t) = \delta(t+1)$:

$$w(t) = y(t)z(t) = \left(2\sin(2\pi 900 t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200 t)\right)\delta(t+1)$$

Ιδιότητα: $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$, με $t_0 = -1$ εδώ.

$$= \left(2\sin(-2\pi 900 + \pi/4) + \sin(-2\pi 1200)\right)\delta(t+1)$$

$\sin(\pm 2\pi k + \varphi) = \sin(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$= \left(2\sin(\pi/4) + \sin(0)\right)\delta(t+1)$$

$$= \left(2\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right)\delta(t+1) = \underline{\sqrt{2}\,\delta(t+1)}$$

□.

μηδενικές αρχικές συνθήκες

Θέμα 2ο

υπόθεση: αιτιατό πάντα εκτός αν λέει διαφορετικά.

ΓΧΑ: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$$

(α') Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$; Γνωστή ιστορία ... ιδιότητα παραγώγισης Laplace:

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s), \quad R \supseteq R_x}$$

$$s^2 Y(s) + 4s\,Y(s) + Y(s) = X(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s)(s^2+4s+5) = X(s) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s^2+4s+5}}$$

Τελειώσαμε; ΟΧΙ! ROC; Ρίζες παρανομαστή:

$$s^2+4s+5 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \underline{s_{1,2} = -2 \pm j}$$

→ Γνωρίζουμε ότι θα είναι αιτιατό, είναι υπόθεση που κάνουμε σε όλες τις διαφορικές που λύνουμε. Από αυτό επάγεται ότι:

$R \supseteq R_1 \cap R_2 \cap \dots$, για το ROC, όπου:

$R_1 = \{Re\{s\} > Re\{s_1\}\}$ (1η ρίζα), $R_2 = \{Re\{s\} > Re\{s_2\}\}$ (2η ρίζα), ... κλπ.

↳ Άρα σε εμάς θα είναι: $\Re e\{s\} > -2$ για το ROC.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$.

↳ Μπορούμε να πειράξουμε το $H(s)$ ώστε να πάρει τη μορφή ενός γνωστού ζεύγους μας Laplace:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{s^2+4s+4+1} = \frac{1}{(s+2)^2+1}, \quad \Re e\{s\} > -2$$

↳ Αυτό είναι γνωστό ζεύγος που στο χρόνο θα είναι: $\mathcal{L}^{-1}$

$$h(t) = e^{-2t}\sin(t)\,u(t)$$

$a = 2$

$\xi_0 = 1$

από το πινακάκι (δωσμένο).

Θέμα 3ο

i. $X(f) = -2e^{-j2\pi f} \cdot \dfrac{j2\pi f - 2}{-j2\pi f + 2}$, Ν.Δ.Ο:

(α') $|X(f)|$ είναι σταθερή συνάρτηση του f:

$\hookrightarrow X(f) = -2e^{-j2\pi f} \cdot \dfrac{j2\pi f - 2}{-j2\pi f + 2} = +2e^{-j2\pi f} \dfrac{j2\pi f - 2}{j2\pi f - 2} = \boxed{+2e^{-j2\pi f}}$

$X(f) = +2e^{-j2\pi f}$

Άρα: $|X(f)| = |2e^{-j2\pi f}| = |2||e^{-j2\pi f}| = 2.$

(β') $\measuredangle X(f)$ είναι γραμμική συνάρτηση του f:

$\measuredangle X(f) = \measuredangle 2e^{-j2\pi f} = \measuredangle 2 + \measuredangle e^{-j2\pi f} = -2\pi f.$

ii. Αν $X(f) \in \mathbb{R}^+$, Ν.Δ.Ο. $|x(t)| \leq x(0)$, όπου

$x(t)$ ο αντίστροφος μτχ. Fourier.

↳ Μπορούμε να βρούμε την απάντηση χωρίς να υπολογίσουμε

πως εμφανίζουμε την ανισότητα;

το $x(t)$ καθεαυτού:

$$|x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f)\, e^{j2\pi f t} \right| df \quad \Big\} \text{ιδιότητα}$$

(|άθροισμα όρων| ≤ άθροισμα ίδιων όρων αλλά ο κάθε ένας είναι θετικός)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|\, df \ , \quad \text{διότι} \quad |e^{j\theta}| = 1, \ \forall \theta,$$

↳ Γνωρίζουμε ότι $X(f) \in \mathbb{R}^+$ από εκφώνηση, άρα

Γνωστό κόλπο για να εμφανίσουμε $x(0)$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df = \left. \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, dt \right|_{t=0} =$$

$$= \left. x(t) \right|_{t=0} = x(0).$$

↳ Άρα δείξαμε ότι $\boxed{|x(t)| \leq x(0)}$.

Θέμα 5ο

Πραγματικό περιοδικό σήμα με σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(2\pi k t)$$

Σήμα $\hat{x}(t)$ προέρχεται από ιδανική δειγματοληψία του $x(t)$, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 2/11\, s$.

(α') Θεμελιώδης συχνότητα f_0 του $x(t)$;

↳ Από τη σειρά βλέπουμε ότι είναι άθροισμα ημιτόνων συχνότητας $1\,Hz$, $2\,Hz$, $3\,Hz$, άρα $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{1,2,3\}\,Hz = 1\,Hz$.

(β') Συμβαίνει aliasing κατά τη δειγματοληψία;

↳ Ελέγχουμε αν $f_s > 2 f_{max}$ (Nyquist-Shannon sampling theorem)

- $f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{11}{2}\,Hz = 5.5\,Hz$
- $2 f_{max} = 2 \cdot 3\,Hz = 6\,Hz$

Δεν ισχύει, άρα έχουμε aliasing.

(lowpass)

(γ') Αν περάσει το $\hat{x}(t)$ από ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχν. αποκοπής $f_c = 3_+ Hz$, ποια θα είναι η έξοδος; (3_+ σημαίνει ότι το 3 συμπεριλαμβάνεται)

↳ Το χαμηλοπερατό θα κρατήσει (μόνο) τις συχνότητες στο $[-3, 3]$ Hz.

↳ Ποιες συχνότητες θα υπάρχουν στο $\hat{x}(t)$ με το aliasing;

↳ Θα προστεθούν οι ακόλουθες: $f_s \pm 1$, $f_s \pm 2$, $f_s \pm 3$, ομοίως και για την $-f_s$ συχνότητα.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5.5 \pm 1 & 5.5 \pm 2 & 5.5 \pm 3 \\ 6.5, 4.5 & , 7.5, 3.5 & , 8.5, 2.5 \end{array} \; Hz$$

αυτή η συχνότητα δε θα αφαιρεθεί από το χαμηλοπερατό φίλτρο.

↳ Άρα θα μείνουν συνολικά οι: $\pm 1, \pm 2, \pm 2.5, \pm 3$ Hz, με πλάτη ομοίως $(1/2)^k$, όπως και στη σειρά:

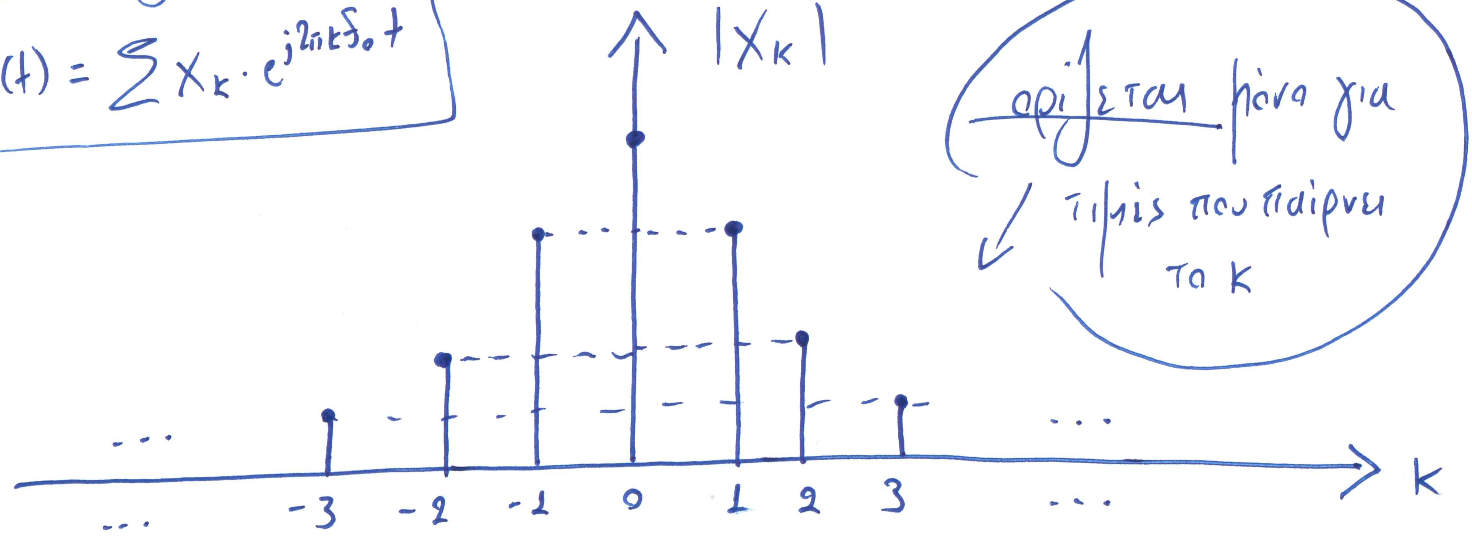
$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi 2t) + \frac{1}{8}\sin(2\pi 2.5t) + \frac{1}{8}\sin(2\pi 3t)$$

(δ') ΜΚΔ $\{1, 2, 2.5, 3\} = 0.5$, άρα $f_0 = 0.5$ Hz, άρα $y(t)$ περιοδικό με περίοδο $1/f_0 = 2s$. (Σωστή δηλαδή)

Παρατήρηση: Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι σχεδίασης διακριτών φασμάτων δηλ. Σειρών Fourier:

1) Χρησιμοποιούμε τα X_k ως ακολουθία, με τον οριζόντιο άξονα να είναι k = ακέραιο πολ/σιο της f_0:

$$\boxed{x(t) = \sum X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}}$$



2) Χρησιμοποιούμε το M.F. της ακολουθίας, με τον οριζόντιο άξονα τώρα να είναι η συχνότητα f:

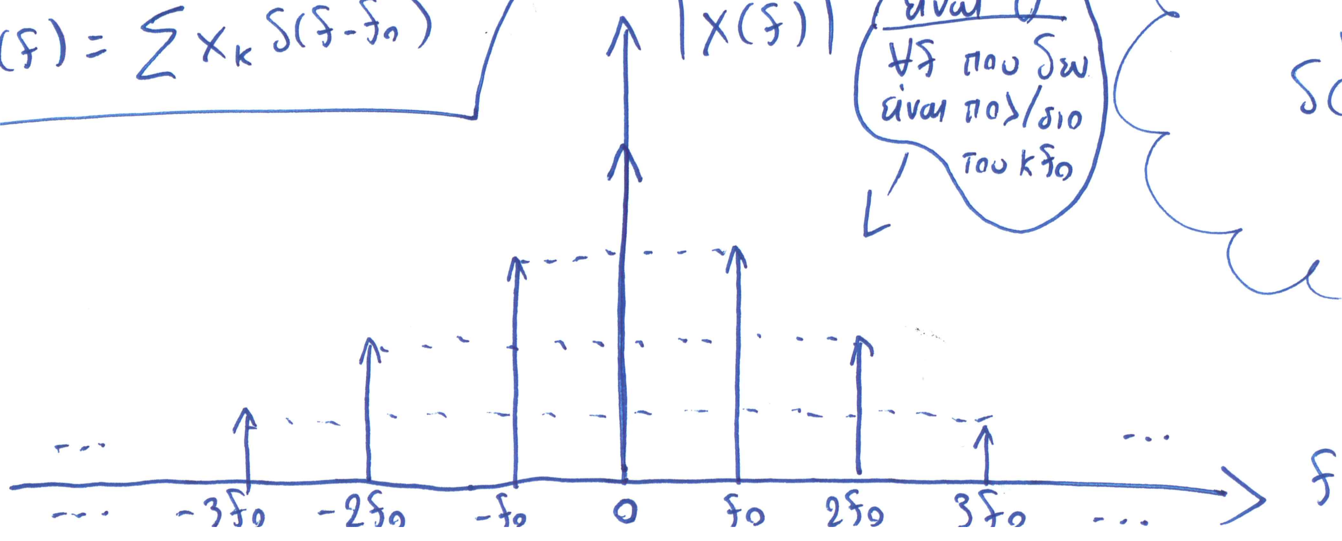
$$\boxed{X(f) = \sum X_k \, \delta(f - f_0)}$$

είναι 0 $\forall f$ που δεν είναι πολ/σιο του kf_0

εκθετικό

$\downarrow F$

$\delta(t - t_0)$



Θέμα 4ο

① Ευσταθές ② Αιτιατό ③ $H(1) = 1/5$

④ Είσοδος $x(t) = u(t)$, έξοδος <u>είναι</u> απολύτως ολοκληρώσιμη

⑤ –//– $x(t) = tu(t)$, — <u>δεν</u> // — // —

⑥ $p(t) = \dfrac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$, πεπερασμένης διάρκειας

⑦ Στο άπειρο, το $H(s)$ έχει ένα ακριβώς μηδενικό.

⑧ $H(s) = A\dfrac{N(s)}{D(s)}$, $A \in \mathbb{R}$, $N(s), D(s)$ πολυώνυμα του s.

→ Ποια η $H(s)$ (και το ROC της);

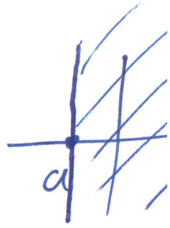
• Από ⑥: $P(s) = s^2H(s) + 2sH(s) + 2H(s) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{P(s)}{s^2+2s+2}$$

• Από ⑧: $\Rightarrow \boxed{H(s) = \dfrac{A\prod_{i=1}^{M}(s-s_i)}{s^2+2s+2}}$

• Από ①, ②, θα έχει ROC τύπου $Re\{s\} > a$, με a ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος ($a<0$).

↳ Άρα οι πόλοι θα είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο και ο φανταστικός άξονας θα συμπεριλαμβάνεται στο ROC.



(4) Είσοδος: $x(t)=u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)=\frac{1}{s}$, $Re\{s\}>0$

- Έξοδος απολύτως ολοκληρώσιμη, η οποία στο Laplace είναι

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{H(s)}{s}=\frac{A\prod_{i=1}^{M}(s-s_i)}{s(s^2+2s+2)}$$

αυτό το s δω θα έπρεπε να υπάρχει εδώ γιατί είναι απολύτως ολοκλ/μη*, άρα το ακυρώνουμε με ένα s στον αριθμητή (αγνώστης τάξης n):

N = τα υπόλοιπα μηδενικά

$$\boxed{H(s)=\frac{A s^n\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)}{s^2+2s+2}}$$

* Δηλ. περιλαμβάνεται ο Im άξονας, άρα δε γίνεται να έχω πόλο στο 0.

(5) Είσοδος $x(t) = tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s^2}$, $Re\{s\} > 0$

Έξοδος δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, η οποία είναι: $Y(s) = \frac{H(s)}{s^2} = \frac{A s^n \prod_{i=1}^{N} (s - s_i)}{s^2 (s^2 + 2s + 2)}$,

δηλ. δεν συμπεριλαμβάνεται ο Im άξονας.

παρομοίως, αυτό το s^2 δεν πρέπει να ακυρώνεται τώρα (αλλιώς θα ήταν απολύτως ολοκληρώσιμη) εξ' ολοκλήρου

Άρα απο αυτα τα δυο στοιχεία (4, 5) θέλουμε:

i. Να ακυρώσουμε s στον παρονομαστη
ii. Να μην ακυρώσουμε το μηδενικό που εισάγει το s^2 στον παρονομαστή

Άρα αναγκαστικα υπάρχει ένα s στον αριθμητη, δηλ. $n = 1$. Οπότε μέχρι τώρα:

$$\boxed{H(s) = \frac{A s \prod_{i=1}^{N} (s - s_i)}{s^2 + 2s + 2}}$$

(7)-Ένα μηδενικό στο $s \to \infty$ σημαίνει ότι deg(αριθμητή) < deg(παρονομαστή), και επειδή deg(παρονομαστή) = 2, τότε στον αριθμητή θα μείνει μόνο το s ώστε να έχει βαθμό 1.

Άρα και με αυτό: $\boxed{H(s) = A \frac{s}{s^2+2s+2}}$

(3) $H(1) = 1/5 \Rightarrow \frac{1}{5} = A \frac{1}{1+2+2} \Leftrightarrow \underline{A = 1}$, οπότε:

$\boxed{H(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}}$, με πόλους στις θέσεις

$s^2+2s+2=0 \Leftrightarrow \underline{s = -1 \pm j}$,

άρα για το ROC του θα είναι $\underline{Re\{s\} > -1}$.

(ευσταθές & αιτιατό)

ΤΕΛΟΣ