Φροντιστήριο 10
HY-215b

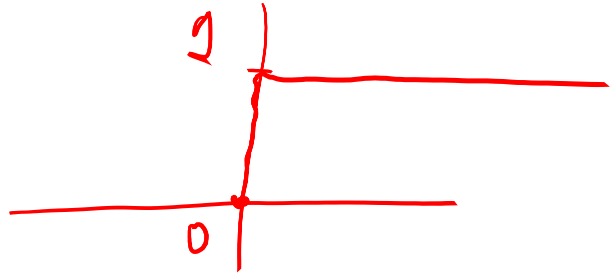
Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

23/5/2024

Άσκηση 1 - Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) \tag{1}$$



(α΄) στο πεδίο του χρόνου

(β΄) στο πεδίο της συχνότητας. Σας δίνεται ότι

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)} \tag{2}$$

(γ΄) από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-2t}u^2(t)\,dt = 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u^2(t)\,dt =$

$= 4\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\cdot 1^2\,dt = 4\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\,dt = 4\left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_{0}^{+\infty} =$

$= 4\left(-\cancel{\lim_{t\to+\infty}}\frac{e^{-2t}}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 + 2 = \boxed{2}$

(β) Parseval ⇝ $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df \overset{①}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+4\pi^2 f^2}\,df =$

$x(t) = 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f}$ ①

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+4\pi^2 f^2}\, df = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}\, df = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1^2+(2\pi f)^2}\, df =$$

$$x = 2\pi f \Rightarrow dx = 2\pi\, df \qquad x_1 = -\infty,\; x_2 = +\infty$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1^2+x^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{4}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1^2+x^2}\, dx = \frac{4}{2\pi}\left[\frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{4}{2\pi}\left(\tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(-\infty)\right) = \frac{4}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{2\cancel{\pi}}\cancel{\pi} = \boxed{2}$$

(γ) $$\boxed{\phi_x(\tau)} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} \boxed{2e^{-|\tau|} = \phi_x(\tau)}$$

$$E_x = \phi_x(0) = 2e^{-|0|} = 2e^0 = \boxed{2}$$

Άσκηση 3 - Δειγματοληψία I

Τα ημιτονοειδή σήματα

$$x_1(t) = \cos(4\pi t) \tag{6}$$
$$x_2(t) = \cos(12\pi t) \tag{7}$$
$$x_3(t) = \cos(20\pi t) \tag{8}$$

δειγματοληπτούνται ιδανικά με ρυθμό $f_s = 8$ Hz. Δείξτε ότι τα τρια σήματα διακριτού χρόνου $x_i[n], i = 1, 2, 3$ που λαμβάνουμε είναι τα ίδια.

$$t = nT_s = n \cdot \frac{1}{f_s} = \frac{n}{8}$$

$$x_1[n] = \underline{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{12\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi n - 4\pi n}{8}\right) = \cos\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right) = \underline{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{20\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi n + 4\pi n}{8}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi n}{2}\right) = \underline{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

Άσκηση 4 - Δειγματοληψία ΙΙ

Δυο ημίτονα, ένα στα 40 κι ένα στα 150 Hz συνδυάζονται για να παράξουν ένα μόνο σήμα $x(t)$.

(α') Αν προστεθούν αυτά τα ημίτονα μεταξύ τους, ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x(t)$;

(β') Αν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους, ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x(t)$;

(α) $x(t) = A\cos(2\pi 40 t) + B\cos(2\pi 150 t)$

συχνότητα Nyquist $= f_{max}$

ρυθμός » $= 2f_{max}$

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f-40) + \frac{A}{2}\delta(f+40) + \frac{B}{2}\delta(f-150) + \frac{B}{2}\delta(f+150)$$

$f_{max} = 150\,Hz \longrightarrow$ Nyquist rate $= 300\,Hz$

(β) $x(t) = A\cos(2\pi 40 t)\cdot B\cos(2\pi 150 t)$

$$X(f) = \left(\frac{A}{2}\delta(f+40) + \frac{A}{2}\delta(f-40)\right) * \left(\frac{B}{2}\delta(f+150) + \frac{B}{2}\delta(f-150)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{A}{2}\delta(f+40) * \frac{B}{2}\delta(f+150)} + \boxed{\frac{A}{2}\delta(f-40) * \frac{B}{2}\delta(f+150)} + \boxed{\frac{A}{2}\delta(f+40) * \frac{B}{2}\delta(f-150)} + \boxed{\frac{A}{2}\delta(f-40) * \frac{B}{2}\delta(f-150)} =$$

$$\frac{AB}{4}\delta(f+190)+\frac{AB}{4}\delta(f+110)+\frac{AB}{4}\delta(f-110)+\frac{AB}{4}\delta(f-190)$$

$f_{max} = 190\,Hz \rightarrow \boxed{\text{Nyquist rate} = 380\,Hz}$

Άσκηση 5 - Δειγματοληψία III

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου περιγράφεται ως

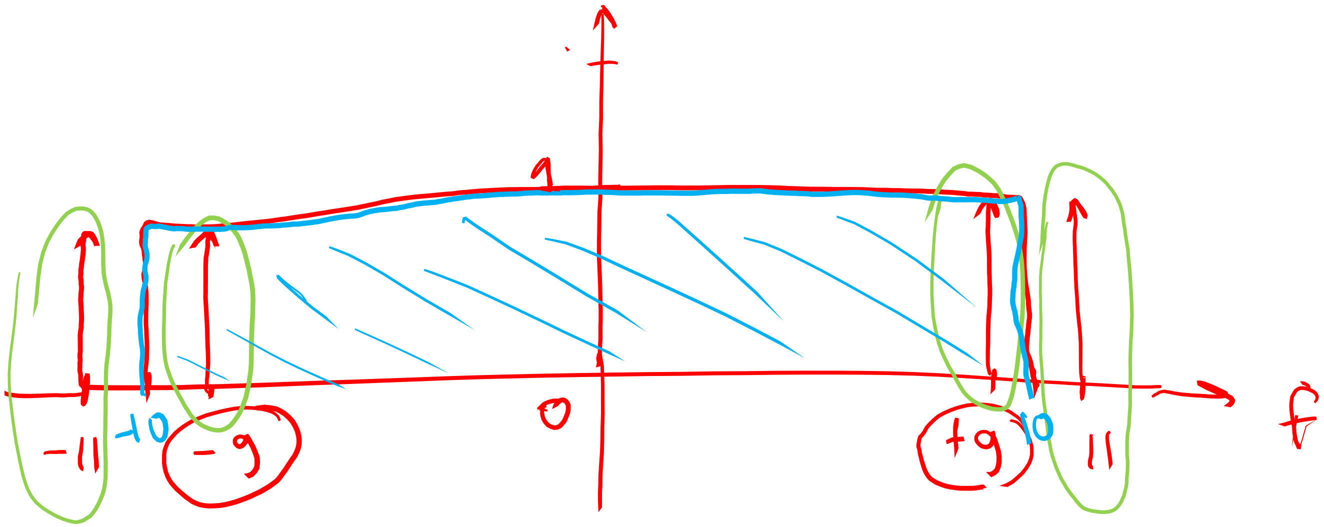
$$\boxed{x(t) = 4\cos(2\pi t)\sin(20\pi t)} \tag{9}$$

Αν το σήμα αυτό περάσει μέσα από ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο μοναδιαίου πλάτους για $f \in [-10, 10]$ Hz, η έξοδος είναι ένα ημιτονοειδές. Ποιά είναι η συχνότητα και το πλάτος του ημιτονοειδούς αυτού;

Απ.: $f_0 = 9$ Hz, $A = 2$

$$x(t) = 4\cos(2\pi t)\sin(20\pi t) = 2\sin(22\pi t) + 2\sin(18\pi t) =$$

$$= \boxed{2\sin(2\pi 11 t)} + \boxed{2\sin(2\pi 9 t)}$$



$$y(t) = 2\boxed{\sin(2\pi 9 t)}$$

$$\underset{\downarrow\, 20\pi t}{\sin a} \cdot \underset{\downarrow\, 2\pi t}{\cos b} = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$