ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

1ο Φροντιστήριο

Ασκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για $z = x + jy$.

(α΄) $z^* = j(z-1)$

(β΄) $z^2 z^* = z$

(γ΄) $|z+3j| = 3|z|$

<u>Λύσεις:</u>

(α΄) Θα έχουμε

$$z^* = j(z-1) = \begin{cases} z^* - j(z-1) & = 0 \\ z = x + jy & \Longrightarrow z^* = x - jy \end{cases} \tag{1}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε

$$x - jy - j(x + jy - 1) = 0 \tag{2}$$
$$x - jy - jx + y - j = 0 \tag{3}$$
$$x + y + j(-x - y - 1) = 0 \tag{4}$$
$$x + y + j(-x - y - 1) = 0 + 0j \tag{5}$$

και εξισώνοντας το πραγματικό μέρος του αριστερού μέλους με το πραγματικό μέρος (μηδέν) του δεξιού μέλους της εξίσωσης - και όμοια για το φανταστικό - θα έχουμε

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ -x - y - 1 & = 0 \end{cases} = \begin{cases} x & = -y \\ -x + x - 1 & = 0 \end{cases} = \begin{cases} x & = -y \\ -11 & = 0, \text{ αδύνατο} \end{cases} \tag{6}$$

’ρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(β΄) Θέτοντας $z = x + jy$ θα έχουμε

$$z^2 z^* = z \tag{7}$$
$$z^2 z^* - z = 0 \tag{8}$$
$$z(zz^* - 1) = 0 \tag{9}$$
$$z(|z|^2 - 1) = 0 \tag{10}$$
$$z = 0 \text{ ή } |z|^2 = 1 \tag{11}$$

δηλ.

$$z = 0 \text{ ή } \{z : |z| = 1\} \tag{12}$$

που αποτελεί το μηδέν και όλους τους μιγαδικούς σε κύκλο ακτίνας 1 και κέντρο το μηδέν.

(γ') Υψώνοντας στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας $z = x + jy$ παίρνουμε

$$|z + 3j| = 3|z| \tag{13}$$
$$|z + 3j|^2 = 3|z|^2 \tag{14}$$
$$|x + jy + 3j|^2 = 3|x + jy|^2 \tag{15}$$
$$x^2 + (y + 3)^2 = 9(x^2 + y^2) \tag{16}$$
$$8x^2 + 8y^2 - 6y - 9 = 0 \tag{17}$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y = \frac{9}{8} \tag{18}$$
$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{8} \tag{19}$$
$$x^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \tag{20}$$
$$x^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \tag{21}$$

που αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(0, 3/8)$ και ακτίνα $9/8$. Μπορεί κανείς να γράψει

$$\left|x + j\left(y - \frac{3}{8}\right)\right| = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \tag{22}$$
$$\left|z - \frac{3}{8}j\right| = \frac{9}{8} \tag{23}$$

Ασκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις II

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για $z = x + jy$.

(α')
$$\Re\{z(1 + j)\} + zz^* = 0 \tag{24}$$

(β')
$$\Re\{z^2\} + j\Im\{z^*(1 + 2j)\} = -3 \tag{25}$$

(γ')
$$\Im\{(2 - j)z\} = 1 \tag{26}$$

Λύσεις:

(α') Θέτοντας $z = x + jy$, έχουμε

$$\mathrm{Re}\{z(1 + j)\} + zz^* = 0 \tag{27}$$
$$\mathrm{Re}\{(x + jy)(1 + j)\} + |z|^2 = 0 \tag{28}$$
$$\mathrm{Re}\{x + jy + jx - y\} + x^2 + y^2 = 0 \tag{29}$$
$$\mathrm{Re}\{x - y + j(x + y)\} + x^2 + y^2 = 0 \tag{30}$$
$$x - y + x^2 + y^2 = 0 \tag{31}$$
$$x^2 + x + y^2 - y = 0 \tag{32}$$

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{33}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \tag{34}$$

που αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(-1/2, 1/2)$ και ακτίνα $\sqrt{2}/2$.

(β') Θέτονας $z = x + jy$, θα εχουμε

$$\mathrm{Re}\{z^2\} + j\mathrm{Im}\{z^*(1+2j)\} = -3 \tag{35}$$

$$\mathrm{Re}\{(x+jy)^2\} + j\mathrm{Im}\{(x-jy)(1+2j)\} = -3 \tag{36}$$

$$\mathrm{Re}\{x^2 + j2xy - y^2\} + j\mathrm{Im}\{x + j2x - jy + 2y\} = -3 \tag{37}$$

$$x^2 - y^2 + j(2x - y) = -3 \tag{38}$$

$$x^2 - y^2 + j(2x - y) = -3 + 0j \tag{39}$$

Εξισώνοντας το πραγματικό μέρος αριστερά με το πραγματικό μέρος στα δεξιά (-3) και αντίστοιχα για το φανταστικό μέρος, παίρνουμε

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 & = -3 \\ 2x - y & = 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 & = -3 \\ y & = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} x^2 - (2x)^2 & = -3 \\ y & = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} x^2 - 4x^2 & = -3 \\ y & = 2x \end{array}\right. \tag{40}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} -3x^2 & = -3 \\ y & = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} x^2 & = 1 \\ y & = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} x & = \pm 1 \\ y & = \pm 2 \end{array}\right. \tag{41}$$

Έτσι έχουμε δυο λύσεις

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 1 + 2j \\ z & = -1 - 2j \end{array}\right. \tag{42}$$

(γ') Θέτοντας $z = x + jy$ παίρνουμε

$$\mathrm{Im}\{(2-j)z\} = 1 \tag{43}$$

$$\mathrm{Im}\{(2-j)(x+jy)\} = 1 \tag{44}$$

$$\mathrm{Im}\{2x + j2y - jx + y\} = 1 \tag{45}$$

$$2y - x = 1 \tag{46}$$

$$y = \frac{x+1}{2} \tag{47}$$

δηλ. οι λύσεις είναι οι μιγαδικοί $z = x + j(x+1)/2$.

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι

Βρείτε και περιγράψτε τους γεωμετρικούς τόπους του $z = x + jy$ αν

(α') $\Re\{z\} < -1$

(β') $|z + j| = 2$

(γ') $\Im\{z^2\} < \Re\{z\}$

Λύσεις:

(α') Αν $z = x + jy$, τότε

$$\mathrm{Re}\{z\} < -1 \iff x < -1 \tag{48}$$

που περιγράφει το ημιεπίπεδο $x < -1$, δηλ. όλους τους μιγαδικούς αριθμούς με πραγματικό μέρος μικρότερο του -1.

(β') Αν $z = x + jy$, τότε

$$|z + j| = 2 \tag{49}$$
$$|z + j|^2 = 4 \tag{50}$$
$$|x + jy + j|^2 = 4 \tag{51}$$
$$|x + j(y + 1)|^2 = 4 \tag{52}$$
$$x^2 + (y + 1)^2 = 4 \tag{53}$$

δηλ. αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(0, -1)$ και ακτίνα 2.

(γ') Αν $z = x + jy$, τότε

$$\mathrm{Im}\{z^2\} = \mathrm{Re}\{z\} \tag{54}$$
$$\mathrm{Im}\{(x + jy)^2\} = \mathrm{Re}\{x + jy\} \tag{55}$$
$$\mathrm{Im}\{x^2 + j2xy - y^2\} = \mathrm{Re}\{x + jy\} \tag{56}$$
$$2xy < x \tag{57}$$
$$x - 2xy > 0 \tag{58}$$
$$x(1 - 2y) > 0 \tag{59}$$

Αυτή η σχέση σημαίνει ότι πρέπει και οι δυο όροι του γινομένου να είναι θετικοί ή και οι δυο αρνητικοί. Οπότε

$$z = x + jy, \text{ με } x > 0, y < \frac{1}{2} \tag{60}$$

ή

$$z = x + jy, \text{ με } x < 0, y > \frac{1}{2} \tag{61}$$

Άσκηση 4 - Ρίζες πολυωνύμων Ι

(α') Βρείτε τις ρίζες του

$$z^2 + z + 1 = 0 \tag{62}$$

(β') Βρείτε τις ρίζες του

$$z^2 + 2z^* + 1 = 0 \tag{63}$$

Απ.: (α) $z = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$, (β) $z = -1$, $z = 1 \pm 2j$

Λύσεις:

(α') Για την εξίσωση

$$z^2 + z + 1 = 0 \tag{64}$$

έχουμε διακρίνουσα

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \tag{65}$$

κι άρα

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \tag{66}$$

(β′) Αν $z = x + jy$, τότε

$$z^2 + 2z^* + 1 = 0 \tag{67}$$
$$(x + jy)^2 + 2(x - jy) + 1 = 0 \tag{68}$$
$$x^2 + j2xy - y^2 + 2x - j2y + 1 = 0 \tag{69}$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 + j(2xy - 2y) = 0 \tag{70}$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 + j(2xy - 2y) = 0 + 0j \tag{71}$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη των δυο μελών, έχουμε

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 & \text{και } 2xy - 2y = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 & \text{και } y(x-1) = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases} \tag{72}$$

Αν $y = 0$, τότε

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Longrightarrow x = -1 \tag{73}$$

Αν $x = 1$, τότε

$$1 - y^2 + 2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2 \tag{74}$$

’ρα $z = -1$ και $z = 1 \pm 2j$.

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων ΙΙ

Αν γνωρίζετε ότι το $z = 1 + j$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$z^5 - 2z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2 \tag{75}$$

βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες.

Απ.: $z = 1, z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j, z = 1 \pm j$

Λύση:

Αφού το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, οι όποιες μιγαδικές ρίζες του θα είναι σε συζυγή ζεύγη. Έτσι, το $z = 1 + j$ είναι ρίζα, οπότε και το $z^* = 1 - j$ είναι ρίζα. Επίσης

$$(z - (1+j))\,(z - (1-j)) = z^2 - (1-j)z - (1+j)z + |1+j|^2 \tag{76}$$
$$= z^2 - z(1 + j + 1 - j) + 2 \tag{77}$$
$$= z^2 - 2z + 2 \tag{78}$$

Παρατηρούμε ότι το $z = 1$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου γιατί το επαληθεύει στην εξίσωση. Οπότε

$$(z - 1)(z - 2z + 2) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2 \tag{79}$$

Απομένουν δυο ρίζες. Διαιρώντας τα πολυώνυμα

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & z^5 & - & 2z^4 & + & 2z^3 & - & z^2 & + & 2z & - & 2 & z^3 - 3z^2 + 4z - 2 \\
- & (z^5 & - & 3z^4 & + & 4z^3 & - & 2z^2 & & & &) & z^2 + z + 1 \\
\hline
 & & & z^4 & - & 2z^3 & + & z^2 & + & 2z & - & 2 & \\
 & & - & (z^4 & - & 3z^3 & + & 4z^2 & - & 2z & &) & \\
\hline
 & & & & & z^3 & - & 3z^2 & + & 4z & - & 2 & \\
 & & & & - & (z^3 & - & 3z^2 & + & 4z & - & 2) & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Οπότε το άγνωστο πολυώνυμο που περιέχει τις δυο άγνωστες ρίζες είναι το z^2+z+1, του οποίου τις ρίζες έχουμε ήδη βρει στην άσκηση 4.α. και είναι οι

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \tag{80}$$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α΄) $z^8 = -1$

(β΄) $z^4 + 32 = 4$

(γ΄) $z^3 - (1+j) = 0$

Λύσεις:

(α΄) Έχουμε

$$z^8 = -1 \Longleftrightarrow z^8 = e^{j(\pi+2\pi k)} \Longleftrightarrow |z|^8 e^{j8\theta} = 1 \cdot e^{j(\pi+2\pi k)} \tag{81}$$

Οπότε

$$\begin{cases} |z|^8 & = 1 \\ 8\theta & = 2\pi k + \pi,\ k = 0, 1, \cdots, 7 \end{cases} = \begin{cases} |z| & = 1 \\ \theta & = \frac{2\pi k + \pi}{8},\ k = 0, 1, \cdots, 7 \end{cases} \tag{82}$$

Έτσι, λύσεις είναι

$$z = 1 \cdot e^{j(\frac{2\pi k + \pi}{8})},\ \ k = 0, 1, \cdots, 7 \tag{83}$$

(β΄) Έχουμε

$$z^4 + 32 = 4 \Longleftrightarrow z^4 = -28 \Longleftrightarrow |z|^4 e^{j4\theta} = 28 \cdot e^{j(\pi+2\pi k)},\ k = 0, 1, 2, 3 \tag{84}$$

και τότε

$$\begin{cases} |z|^4 & = 28 \\ 4\theta & = 2\pi k + \pi,\ k = 0, 1, \cdots, 3 \end{cases} = \begin{cases} |z| & = \sqrt[4]{28} \\ \theta & = \frac{2\pi k + \pi}{4},\ k = 0, 1, \cdots, 3 \end{cases} \tag{85}$$

Τότε λύσεις είναι

$$z = \sqrt[4]{28} \cdot e^{j(\frac{2\pi k + \pi}{4})},\ \ k = 0, 1, \cdots, 3 \tag{86}$$

(γ΄) Έχουμε

$$z^3 - (1+j) = 0 \Longleftrightarrow z^3 = 1 + j \Longleftrightarrow |z|^3 e^{j3\theta} = \sqrt{2} e^{j(2\pi k + \frac{\pi}{4})},\ k = 0, 1, 2 \tag{87}$$

Έτσι

$$\begin{cases} |z|^3 & = \sqrt{2} \\ 3\theta & = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \end{cases} = \begin{cases} |z| & = 2^{1/6} \\ \theta & = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{3},\ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \tag{88}$$

Οι λύσεις λοιπόν θα είναι

$$z = 2^{1/6} e^{\frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{3}},\ \ k = 0, 1, 2 \tag{89}$$

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre

Υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α') $(1+\sqrt{3}j)^{107}$

(β') $(1-j)^{-76}$

<u>Λύσεις:</u>

(α') Για $z = 1+\sqrt{3}j$, έχουμε

$$\left(1+\sqrt{3}j\right)^{107} = z^{107} \tag{90}$$

Γράφοντάς τον σε πολική μορφή, θα είναι

$$|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ και } \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \tag{91}$$

Οπότε

$$z = 2e^{j\pi/3} \tag{92}$$

και τότε

$$z^{107} = \left(2e^{j\pi/3}\right)^{107} = 2^{107}e^{j\frac{107\pi}{3}} \tag{93}$$

Μπορούμε να γράψουμε το $107\pi/3$ ως $108\pi/3 - \pi/3 = 36\pi - \pi/3$, οπότε

$$z^{107} = 2^{107}e^{j36\pi}e^{-j\pi/3} = 2^{107}\cdot 1\cdot e^{-j\pi/3} = 2^{107}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{106} - j2^{106}\sqrt{3} \tag{94}$$

(β') Είναι

$$(1-j)^{-76} = z^{-76}, \quad \text{με } z = 1-j \tag{95}$$

Σε πολική μορφή θα έχουμε

$$|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \text{ και } \theta = \tan^{-1}(-1/1) = -\frac{\pi}{4} \tag{96}$$

Έτσι

$$z = \sqrt{2}e^{-j\pi/4} \tag{97}$$

Οπότε

$$z^{-76} = \left(\sqrt{2}e^{-j\pi/4}\right)^{-76} = (\sqrt{2})^{-76}e^{j76\pi/4} \tag{98}$$

Μπορούμε να γράψουμε το $76\pi/4$ ως $80\pi/4 - 4\pi/4 = 20\pi - \pi$, οπότε

$$z^{-76} = (\sqrt{2})^{-76}e^{j(20\pi-\pi)} = (\sqrt{2})^{-76}e^{-j\pi}e^{j20\pi} = (\sqrt{2})^{-76}\cdot(-1)\cdot 1 = -\left(2^{1/2}\right)^{-76} = -2^{-38} = -\frac{1}{2^{38}} \tag{99}$$