Μετασχηματισμός Fourier για σήματα ισχύος

Οπως ήδη έχουμε δει, τα σήματα ισχύος έχουν άπειρη ενέργεια. Δηλ. δεν πληρούν το κριτήριο σύγκλισης του Μετασχηματισμού Fourier (Μ.Φ.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \ < \ \infty$$

Επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. αυτών των σημάτων σύμφωνα με όσα έχουμε δει μέχρι τώρα. Επιπλέον δε, αυτά τα σήματα δεν υπάρχουν στην πράξη. Η καλύτερα, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα ισχύος γιατί ένα τέτοιο σήμα θα πρέπει να έχει άπειρη ενέργεια. Ωραία... ούτε πληρούν το κριτήριο σύγκλισης (shame on them!) ούτε μπορούμε να τα δημιουργήσουμε. Μήπως ήδη είπαμε πολλά για αυτά τα σήματα; Να τελειώσουμε εδώ την παραγράφο να δούμε και κάτι άλλο;

Επιτρέψτε μου να μη συμφωνήσω (may I?) Πράγματι αυτά τα σήματα δεν υπάρχουν. Ομως και οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν αλλά τόσα μαθήματα και τόσα βιβλία υπάρχουν γι αυτούς. Και εμείς τους έχουμε χρησιμοποιήσει αρκετά. Ομοια θα δείξουμε πόσο σημαντικά είναι τα σήματα ισχύος για τη μελέτη των περιοδικών και των τυχαίων σημάτων. Είναι επίσης χρήσιμα για τη μελέτη σημάτων που εμφανίζονται πολύ συχνά όταν μελετάμε συστήματα. Για παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = 5, \quad \forall t$$

είναι σήμα ισχύος και είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη συστημάτων. Σε προηγούμενες σημειώσεις είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier αυτού του σήματος είναι

$$X(f) = 5\delta(f)$$

Γενικά για κάθε σήμα το οποίο είναι μια σταθερά

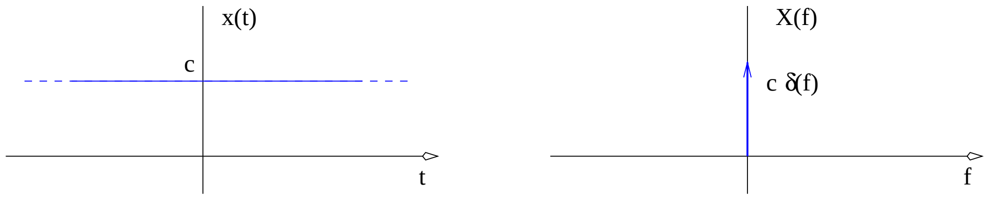
$$x(t) = c, \quad \forall t$$

ο Μ.Φ. είναι μια δέλτα συνάρτηση στη συχνότητα ανάλογη της σταθεράς αυτής (Σχήμα 1).

$$X(f) = c\delta(f)$$

Για να φτάσουμε σε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση $\delta(t)$.

Τα σήματα ισχύος δεν μπορούν να μελετηθούν με τον κλασσικό ορισμό του Μετασχηματισμού Fourier. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έννοιες όπως αυτή της συνάρτησης δέλτα. Και



Σχήμα 1: Μ.Φ. ενός σήματος σταθεράς.

πάλι όμως δεν είναι σίγουρο ότι ένα σήμα ισχύος θα έχει Μετασχηματισμό Fourier. Αυτό προφανώς θέτει προβλήματα όταν εμείς θέλουμε να μελετήσουμε το φασματικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων ή αν θέλουμε να μελετήσουμε την έξοδο από ένα σύστημα όταν ένα σήμα ισχύος παρουσιάζεται στην είσοδό του. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να καταφύγουμε σε άλλο τρόπο υπολογισμού π.χ. του φασματικού περιεχομένου. Και αυτός δεν είναι παρά ο Μετασχηματισμός Fourier όχι του σήματος αλλά της αυτοσυσχέτισης του σήματος.

Κάθε σήμα ισχύος, $x(t)$, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός όρου που έχει μηδενική μέση τιμή, $x_o(t)$, και της μέσης τιμής του σήματος, $\bar{x}$:

$$x(t) = x_o(t) + \bar{x} \tag{1}$$

όπου $\hat{x}$ ορίζεται ως:

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η παράγωγος του σηματος $x(t)$ είναι:

$$x^{'}(t) = x_o^{'}(t)$$

όποια και να είναι η σταθερά $\bar{x}$. Σε περίπτωση που υπάρχει ο Μετασχηματισμός Fourier, $X_o(f)$, του σήματος $x_o(t)$, τότε ο Μ.Φ. του σήματος ισχύος θα είναι:

$$X(f) = X_o(f) + \bar{x}\delta(f) \tag{2}$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης του Μ.Φ. Επομένως:

$$F\{x_o^{'}(t)\} = j2\pi f X_o(f)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην εξίσωση (2), έχουμε:

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} F\{x_o^{'}(t)\} + \bar{x}\delta(f) \tag{3}$$

Παραδείγματα :

1. Το σταθερό σήμα

$$x(t) = C$$

είναι σήμα ισχύος με $x_o(t) = 0$ μέση τιμή C. Αρα εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση

$$X(f) = C\delta(f)$$

2. Το σήμα προσήμου $sgn(t)$ έχει μέση τιμή μηδέν και $x_o^{'}(t) = 2\delta(t)$. Επομένως

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}2 + 0\delta(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

3. Το σήμα μοναδιαίου βήματος

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2}sgn(t) + \frac{1}{2}$$

όπου $x_o(t) = 1/2sgn(t)$ και $\hat{x} = 1/2$, έχει Μ.Φ.

$$F\{\epsilon(t)\} = F\{\frac{1}{2}sgn(t)\} + F\{\frac{1}{2}\}$$

και από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$F\{\epsilon(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων ισχύος ορίζεται ως το όριο

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt \tag{4}$$

ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως

$$\phi_{x}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{5}$$

Ο Μ.Φ. της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης ονομάζεται Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος (Inter-Spectral Power Density) (και όχι ενέργειας!! μην ξεχνάτε ότι αναλύουμε σήματα ισχύος!)

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\}$$

ενώ ο Μ.Φ. της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ονομάζεται Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ή απλά Φάσμα Ισχύος (Power Spectral Density)

$$\Phi_{x}(f) = F\{\phi_{x}(\tau)\}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η σημαντική σχέση ότι ο Α.Μ.Φ. της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος δίνει τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Για $\tau = 0$ έχουμε το θεώρημα του Parseval για σήματα ισχύος, όπου ΟΜΩΣ τώρα η ΙΣΧΥ και όχι η ενέργεια ισούται με την αυτοσυσχέτιση του σήματος για $\tau = 0$

$$P_x = \phi_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df$$

Από τη σχέση Parseval καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση $\Phi_x(f)$ μας δείχνει πως κατανέμεται η ισχύ ενός σήματος σε κάθε συχνότητα. Ως κατανομή λοιπόν θα πρέπει να είναι θετική για κάθε f:

$$\Phi_x(f) \geq 0 \quad \forall f$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι σε Volts, (V), τότε η $\phi_x(t)$ είναι σε V^2 και η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος σε V^2/Hz.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των σημάτων ενέργειας και των σημάτων ισχύος είναι ότι στην περίπτωση των σημάτων ισχύος η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ΔΕΝ (όλοι μαζί: ΔΕΝ ΔΕΝ (δίς)) είναι ίση με την απόλυτη τιμή του Μ.Φ. του σήματος στο τετράγωνο όπως έχουμε δείξει για τα σήματα ενέργειας. Για σήματα ενέργειας επαναλαμβάνουμε τη σχέση εδώ για σύγκριση:

<u>Σήματα ενέργειας:</u>

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Για σήματα ισχύος μπορούμε να δείξουμε ότι:

<u>Σήματα ισχύος:</u>

$$\Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2 \tag{6}$$

όπου $X(f,T)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t,T) = x(t) rect(t/T)$$

όπου $x(t)$ είναι το σήμα ισχύος ενώ το $x(t,T)$ είναι αυτό που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το σήμα ισχύος με ένα παράθυρο μήκους T. Δηλαδή το $x(t,T)$ είναι σήμα περιορισμένης ενέργειας (ή απλά ενέργειας).

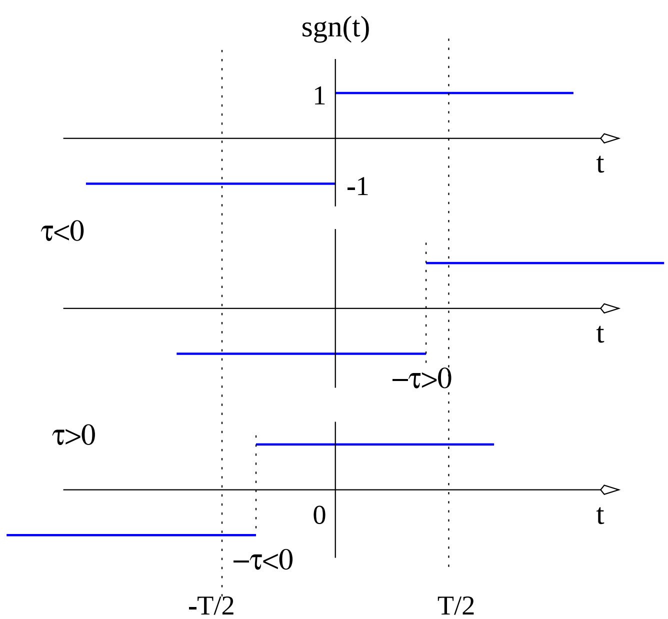
Το όλο πρόβλημα με τα σήματα ισχύος είναι ακριβώς η σχέση (6). Το όριο αυτό μπορεί να υπάρχει μπορεί και να ΜΗΝ υπάρχει. ΕΠΟΜΕΝΩΣ ο σίγουρος δρόμος για να μελετήσουμε φασματικά τέτοιου είδους σήματα είναι ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης (ή της ετεροσυσχέτισης, ανάλογα το πρόβλημα που μελετάμε), δηλ. ο υπολογισμός της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος.

Παραδείγματα:

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος των σημάτων προσήμου και βηματικής συνάρτησης θα έχουμε πρόβλημα αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (6). Για το πρώτο σήμα το όριο δεν υπάρχει ενώ για την δεύτερη συνάρτηση υπάρχει. Στην περίπτωση που υπάρχει το όριο προφανώς φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα όποιον δρόμο και αν ξεκινήσουμε. Στα δύο επόμενα παραδείγματα θα βρούμε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος και των ΔΥΟ αυτών σημάτων μέσω του Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισής τους.

1. Σήμα προσήμου

   Από το Σχήμα.2 μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε περίπτωση στον υπολογισμό της



Σχήμα 2: Σήμα προσήμου και θέσεις μετατόπισής του για $\tau < 0$ και για $\tau > 0$.

αυτοσυσχέτισης. Για $\tau < 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[\int_{-T/2}^{0} dt - \int_{0}^{-\tau} dt + \int_{-\tau}^{T/2} dt] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[\frac{T}{2} + \tau + \frac{T}{2} + \tau] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[T + 2\tau] \\
&= 1 + 2\lim_{T\to\infty}\frac{\tau}{T} \\
&= 1 + 2\ \cdot 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

(πιο αναλυτικά δε γίνεται!! :))

Για $\tau > 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[\int_{-T/2}^{-\tau} dt - \int_{-\tau}^{0} dt + \int_{0}^{T/2} dt] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[-\tau + \frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}] \\
&= 1 - 2\lim_{T\to\infty}\frac{\tau}{T} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε τ

$$\phi_x(\tau) = 1$$

Αρα για το σήμα προσήμου

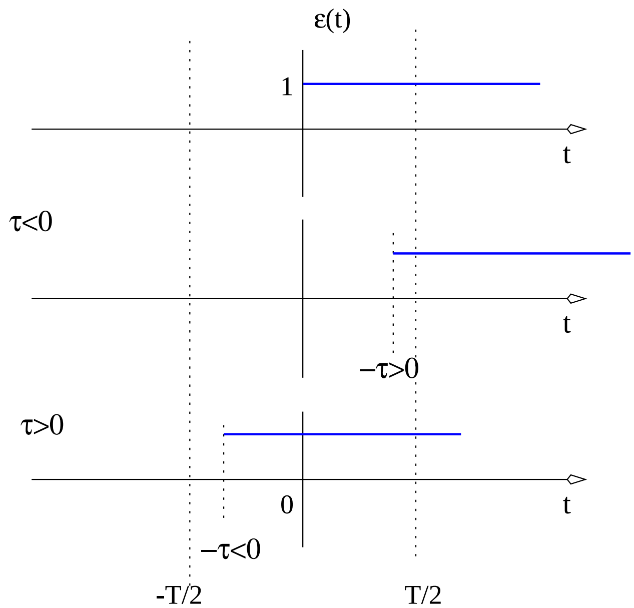
$$\Phi_x(f) = F\{1\} = \delta(f)$$

2. Σήμα βηματικής συνάρτησης

Από το Σχήμα.3 μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε περίπτωση στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης του σήματος βηματικής συνάρτησης.

Για $\tau < 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T/2} dt \\
&= 1/2
\end{aligned}$$



Σχήμα 3: Σήμα βηματικής συνάρτησης και θέσεις μετατόπισής του για $\tau < 0$ και για $\tau > 0$.

Για $\tau > 0$:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} dt \\ &= 1/2\end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε τ

$$\phi_x(\tau) = 1/2$$

Αρα για το σήμα βηματικής συνάρτησης

$$\Phi_x(f) = F\{1/2\} = \frac{1}{2}\delta(f)$$

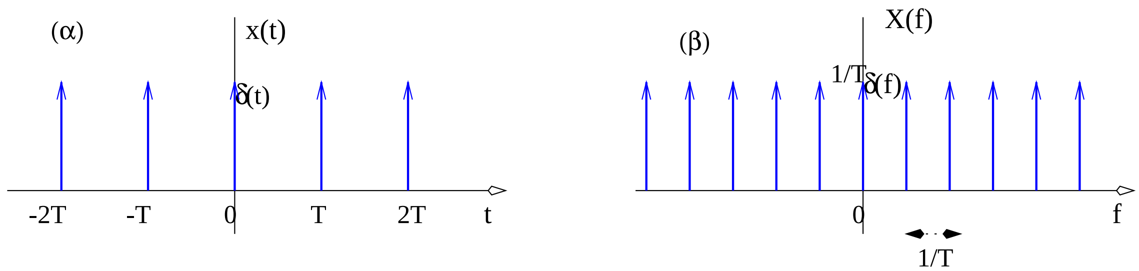
Μια ειδική κατηγορία σημάτων ισχύος είναι τα περιοδικά σήματα. Είναι σημαντικό να τα δούμε ξεχωριστά μιας και με περιοδικά ή σχεδόν περιοδικά σήματα περιγράφονται πολλά πραγματικά σήματα όπως το σήμα της φωνής, της μουσικής, των ψηφιακών τηλεπικοινωνιών, των περιοδικών χρονοσειρών που περιγράφουν περιοδικά φαινόμενα (όπως καιρός, αριθμός χρηστών που ζητούν πρόσβαση σε βάσεις δεδομένων) κ.λ.π.

Μετασχηματισμός Fourier για περιοδικά σήματα.

Ενα βασικό περιοδικό σήμα είναι η σειρά παλμών Dirac που φαίνεται στο Σχήμα.4(α) και που περιγράφεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Σημείωση: Εδώ χρησιμοποιούμε το σύμβολο T για να δηλώσουμε την περίοδο. Σε άλλα μέρη



Σχήμα 4: (α): σειρά παλμών Dirac στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T και (β) σειρά παλμών Dirac στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο 1/T. Στο (β) δείχνουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του (α).

των σημειώσεων το έχουμε συμβολίσει με T_0.

Οπως ήδη γνωρίζουμε μπορούμε να αναπτύξουμε ένα περιοδικό σήμα σε μιγαδικές σειρές Fourier (ή και σε πραγματικές σειρές Fourier) :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \tag{7}$$

όπου Δ_k υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του συντελεστή Fourier, Δ_k στην Εξίσωση (7) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του Μ.Φ.

$$e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \leftrightarrow \delta(f - f_k)$$

όπου $f_k = k/T$, ο Μ.Φ. του περιοδικού σήματος της σειρά παλμών Dirac είναι

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_k) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$$

Ο Μ.Φ. της σειράς παλμών Dirac φαίνεται στο Σχήμα.4(β). Οπως φαίνεται και από το σχήμα ο Μ.Φ. είναι ΠΑΛΙ μια σειρά από παλμούς Dirac αλλά στη συχνότητα με περίοδο $1/T$ και πλάτος $1/T$.

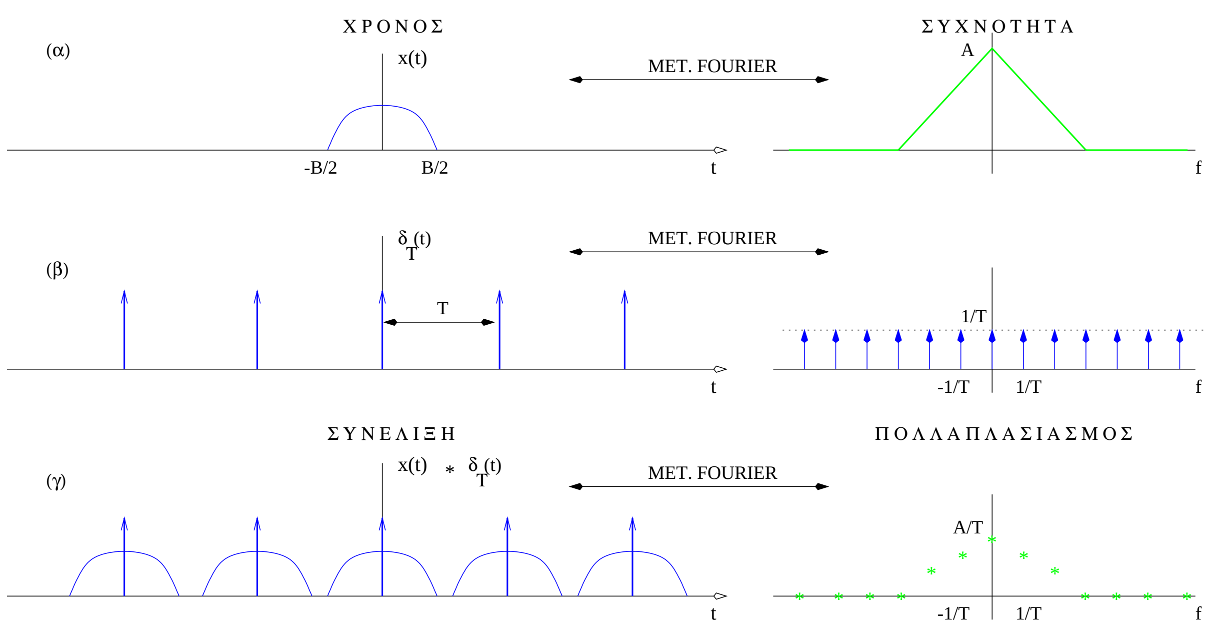
Είναι ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ να δούμε ποιό είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης ενός σήματος περιορισμένης ενέργειας (περιορισμένης διάρκειας στο χρόνο) με τη σειρά παλμών Dirac, $\delta_T(t)$. Από τον ορισμό της συνέλιξης είναι φανερό ότι για την συνέλιξη ισχύει η ιδιότητα της αντιμετάθεσης, η προσεταιριστική ιδιότητα καθώς και η επιμεριστική ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα και θεωρώντας ένα σήμα ενέργειας $x(t)$ διάρκειας $B < T$, η συνέλιξη των δύο σημάτων θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) \star \delta_T(t) &= x(t) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \star \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της κατανομής δέλτα

$$x(t) \star \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης φαίνεται στο Σχήμα.5. Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του σήματος με τη σειρά παλμών Dirac με περίοδο T έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T.



Σχήμα 5: Αριστερή κολώνα: (α): Σήμα ενέργειας διάρκειας B. (β) σειρά παλμών Dirac με περίοδο T και (γ) το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δύο παραπάνω σημάτων. Δεξιά κολώνα: Οι μετ. Fourier των αντίστοιχων σημάτων.

Επομένως έχουμε έτσι έναν δεύτερο τρόπο να παριστάνουμε ένα περιοδικό σήμα:

$$x(t+mT) = x(t,T) \star \delta_T(t)$$

όπου $x(t,T)$ είναι η βασική περίοδος του σήματος και m ακέραιος. Από την παραπάνω εξίσωση και γνωρίζοντας ότι ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. περιοδικών σημάτων. Πράγματι ο Μ.Φ. του περιοδικού σήματος, $x(t+mT)$, είναι

$$F\{x(t+mT)\} = F\{x(t,T)\}\ F\{\delta_T(t)\} = X(f,T)\frac{1}{T}\delta_{1/T}(f)$$

όπου $X(f,T)$ είναι ο Μ.Φ. του σήματος ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ $x(t,T)$. Μην ξεχνάμε ή μη μπερδευόμαστε ... το $x(t,T)$ έχει μόνο διάρκεια T, έξω από αυτό το διάστημα είναι παντού μηδέν, άρα είναι σήμα ενέργειας (άσχετα αν το περιοδικό σήμα είναι σήμα ισχύος).

Το μέγεθος

$$\left\{\frac{1}{T}X(f,T)\right\}$$

είναι ΣΥΝΕΧΕΣ ως προς τη συχνότητα και ονομάζεται <u>φασματική περιβάλλουσα</u>. Ο Μ.Φ. του περιοδικού σήματος $x(t+mT)$ φαίνεται ενδεικτικά στο Σχήμα.5 δεξιά επάνω. Παρατηρούμε ότι είναι συνεχές το φάσμα ως προς τη συχνότητα. Οταν το συνεχές αυτό φάσμα πολλαπλασιαστεί με τη σειρά των παλμών Dirac, $\delta_{1/T}(f)$ (δεξιά κολώνα, δεύτερο σχήμα) θα έχει ως αποτέλεσμα ένα διακριτό φάσμα (δεξιά κολώνα, τρίτο σχήμα). Με εξισώσεις το παραπάνω περιγράφεται ως εξής:

$$F\{x(t+mT)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}X(\frac{k}{T},T)\delta(f-\frac{k}{T}) \tag{8}$$

το οποίο επαναλαμβάνουμε ότι είναι διακριτό φάσμα σε αντίθεση με το συνεχές φάσμα του σήματος ενέργειας (δηλ. του σήματος της βασικής περιόδου).

Παραπάνω αναφερθήκαμε στο δεύτερο τρόπο να αναπαραστούμε περιοδικά σήματα. Ποιος είναι (ή ήταν) ο πρώτος που έχουμε μάθει; Η σειρά Fourier. Γράφοντας το περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Fourier μπορούμε να βρούμε ένα σύνδεσμο μεταξύ του διακριτού φάσματος που μόλις είδαμε και των συντελεστών του αναπτύγματος του περιοδικού σήματος σε σειρά Fourier. Εχουμε δει ότι το μιγαδικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι

$$x(t) = x(t+mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}dt$$

Ο Μ.Φ. του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} F\{x(t+mT)\} = X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k F\{e^{j2\pi\frac{k}{T}t}\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(f-f_k) \end{aligned} \tag{9}$$

όπου $f_k = k/T$. Συγκρίνοντας τις Εξισώσεις (8) και (9) είναι εύκολο να δούμε ότι

$$a_k = \frac{1}{T}X(\frac{k}{T},T) \tag{10}$$

Δηλαδή το διακριτό φάσμα δεν είναι τίποτα άλλο από τους συντελεστές Fourier.

Επομένως:

Για να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος, υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε ΜΙΑ περίοδο του σήματος (σαν να ήταν (που είναι) σήμα ενέργειας) και μετά δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: k/T όπου T η περίοδος του σήματος σε δευτερόλεπτα. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει επίσης τους συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier του σήματος.

Η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος ορίζεται ως εξής

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{11}$$

όπου T είναι η περίοδος του σήματος. Αν θεωρήσουμε μόνο μια περίοδο του σήματος $x(t)$, δηλ. $x(t,T)$, τότε μπορούμε να αλλάξουμε τα όρια στο ολοκλήρωμα

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t,T)x(t+\tau)dt \tag{12}$$

Εχουμε προηγούμενα δείξει ότι η αυτοσυσχέτιση σημάτων ενέργειας (όπου τα όρια στην ολοκλήρωση είναι από $-\infty$ έως $+\infty$) σχετίζεται με τη συνέλιξη με την παρακάτω σχέση:

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) \star x(\tau)$$

Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση στην Εξίσωση (12) μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T}x^*(-\tau,T) \star x(\tau)$$

Το σήμα $x(\tau)$ όμως είναι περιοδικό και μπορούμε να το εκφράσουμε ως συνέλιξη της βασικής περιόδου, $x(\tau, T)$, με σειρά παλμών Dirac

$$x(\tau) = x(\tau, T) \star \delta_T(t)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \frac{1}{T} x^*(-\tau, T) \star [x(\tau, T) \star \delta_T(t)] \\
&= \frac{1}{T} \underbrace{[x^*(-\tau, T) \star x(\tau, T)]}_{\phi_x(\tau,T)} \star \delta_T(t) \\
&= \frac{1}{T} \phi_x(\tau, T) \star \delta_T(t)
\end{aligned}$$

όπου $\phi_x(\tau, T)$ είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της βασικής περιόδου του σήματος (δηλ. σήματος ενέργειας). Η παραπάνω σχέση είναι ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ: Μας λέει ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός περιοδικού σήματος (η οποία μπορεί να αποβεί πονοκέφαλος όταν προσπαθήσουμε να την προσδιορίσουμε κατευθείαν από τον ορισμό - Εξίσωση.(11)) είναι ισοδύναμη με το να (σε βήματα):

1. υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση σε ΜΙΑ περίοδο του σήματος

2. να επαναλάβουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε σε πολλαπλάσια της περιόδου, δηλ. συνέλιξη με την συνάρτηση $\delta_T(t)$

Επομένως επαναλαμβάνουμε εδώ το αποτέλεσμα

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T} \phi_x(\tau, T) \star \delta_T(t) \tag{13}$$

Οταν μαθαίναμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος είχαμε δείξει ότι η αυτοσυσχέτιση είναι και αυτή περιοδική συνάρτηση, η οποία αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{j2\pi \frac{k}{T} \tau} \tag{14}$$

όπου a_k είναι οι συντελεστές αναπτύγματος σε σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος είναι ο Μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης. Αν ακολουθήσουμε την εξίσωση (13) τότε

$$\begin{aligned}
\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} &= \frac{1}{T} \underbrace{F\{\phi_x(\tau, T)\}}_{\Phi_x(f,T)} \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f) \\
&= \frac{1}{T^2} \Phi_x(f, T) \delta_{1/T}(f) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2} \Phi_x(\frac{k}{T}, T) \delta(f - \frac{k}{T})
\end{aligned}$$

όπου $\Phi_x(f,T) = |X(f,T)|^2$ και $X(f,T)$ ο μετ. Fourier του σήματος της βασικής περιόδου (το οποίο είναι σήμα ενέργειας -βαρεθήκατε να το επαναλαμβάνω;).

Αν ακολουθήσουμε την εξίσωση (14), τότε

$$\begin{aligned}
\Phi_x(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 F\{e^{j2\pi\frac{k}{T}\tau}\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T})
\end{aligned}$$

Αν συγκρίνουμε τις δύο αυτές εκφράσεις της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος βλέπουμε ότι η δειγματοληψία της συνεχούς ως προς f συνάρτησης

$$\frac{1}{T^2}\Phi_x(f,T)$$

σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής περιόδου: $k\ 1/T$, μας προμηθεύει με τους συντελεστές $|a_k|^2$

$$|a_k|^2 = \frac{1}{T^2}\Phi_x(\frac{k}{T},T) \tag{15}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (10) και (15) παρατηρούμε ότι η δειγματοληψία της φασματικής περιβάλλουσας έχει την πληροφορία της φάσης του σήματος. Πράγματι, εκεί υπολογίζουμε τους συντελεστές a_k και όχι μόνο το μέτρο τους όπως στην (15). Οταν υπολογίζουμε το μέτρο ενός μιγαδικού προφανώς η πληροφορία της φάσης του έχει χαθεί.

Χρησιμοποιώντας τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, μπορούμε να δείξουμε ξανά το θεώρημα του Parseval για την κατανομή της ισχύος (και όχι ενέργειας, αφού μιλάμε για σήματα ισχύος) του σήματος στις διάφορες συχνότητες

$$\begin{aligned}
P_x &= \phi_x(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) df \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2
\end{aligned}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Θα δούμε όλα τα παραπάνω για ένα περιοδικό σήμα που όλοι πλέον γνωρίζουμε καλά

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t - a)$$

όπου $T_0 = 1/f_0$ είναι η περίοδος του σήματος.

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$
\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi f_0 t - a)\cos(2\pi f_0(t+\tau) - a)dt \\
&= \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau - 2a)dt + \\
&\quad \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2}\cos(-2\pi f_0\tau)dt \\
&= \frac{A^2}{2T_0}\cos(2\pi f_0\tau)\int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt \\
&= \frac{A^2}{2T_0}\cos(2\pi f_0\tau)T_0 \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ταυτότητα

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος:

$$
\begin{aligned}
\Phi_x(f) &= F\{\phi_x(\tau)\} = F\{\frac{A^2}{2}\,\frac{e^{j2\pi f_0\tau} + e^{-j2\pi f_0\tau}}{2}\} \\
&= \frac{A^2}{4}F\{e^{j2\pi f_0\tau}\} + \frac{A^2}{4}F\{e^{-j2\pi f_0\tau}\} \\
&= \frac{A^2}{4}\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)
\end{aligned}
$$

Ισχύ του σήματος:

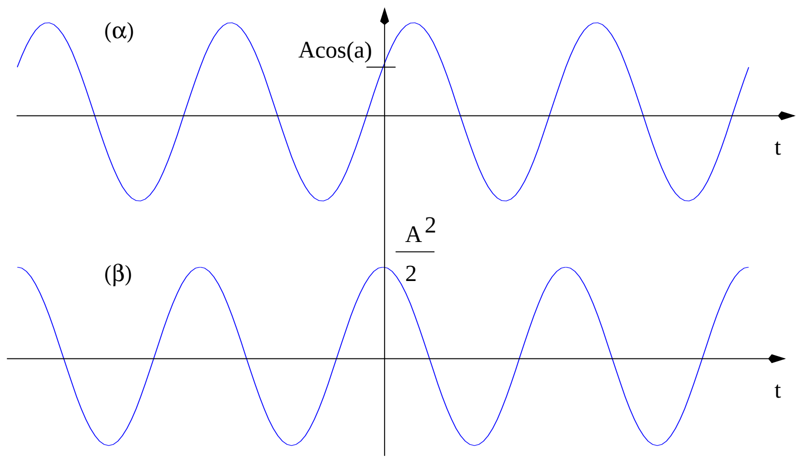
$$P_x = \phi_x(0) = \frac{1}{2}A^2$$

Λογικά θα πρέπει να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα αν προσθέσουμε την ισχύ που έχει κατανεμηθεί σε κάθε συχνότητα.

$$
\begin{aligned}
P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)df \\
&= \frac{A^2}{4}[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-f_0)df + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f+f_0)df] \\
&= \frac{A^2}{4}(1+1) \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}
$$

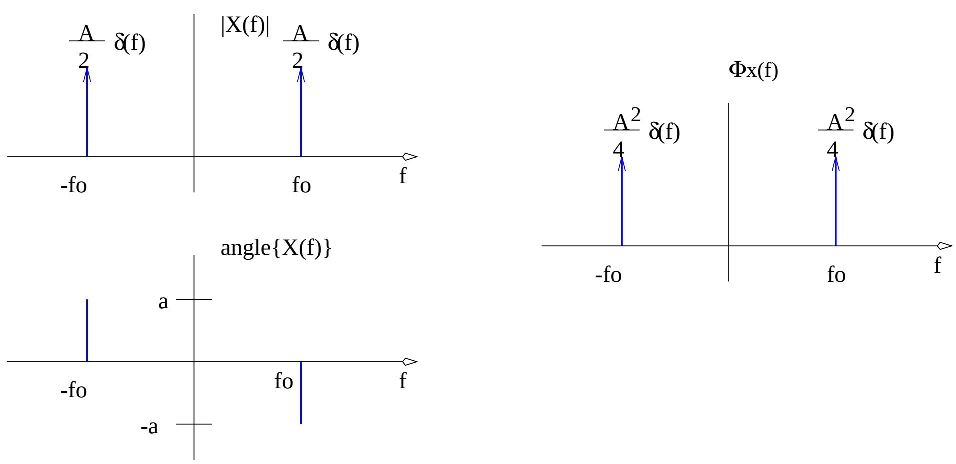
Σωστά! συμφωνούν τα αποτελέσματά μας.

Στο Σχήμα.6(α) φαίνεται το σήμα για κάποια φάση μετατόπισης, $a \neq 0$, ενώ στο Σχήμα.6(β) βλέπουμε την αυτοσυσχέτιση του σήματος. Παρατηρείστε ότι ενώ το αρχικό σήμα έχει μετατοπιστεί λόγω της φάσης μετατόπισης, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητη αυτής της μετατόπισης. Στο Σχήμα.7 έχουμε σχεδιάσει αριστερά το φάσμα πλάτους του σήματος και το



Σχήμα 6: (α): Ημιτονοειδές σήμα με φάση μετατόπισης $a = \pi/3$ και (β): η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος.

φάσμα φάσης ενώ στη δεξιά κολώνα το φάσμα ισχύος (φασματική πυκνότητα ισχύος). Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης της πυκνότητας ισχύος είναι μηδέν για κάθε συχνότητα (για αυτό το λόγο δεν το σχεδιάσαμε).



Σχήμα 7: Αριστερά: φάσμα πλάτους (πάνω) και φάσμα φάσης (κάτω). Δεξιά φασματική πυκνότητα ισχύος.

Τα παραπάνω αναπτύσσονται ανάλογα και για τη Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος $\Phi_{xy}(f)$. Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης, $\phi_{xy}(\tau)$, δύο περιοδικών σημάτων, $x(t)$ και $y(t)$, που έχουν την ίδια περίοδο T, είναι και αυτή μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο ίση με αυτή των σημάτων. Αρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier κατά τα γνωστά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* b_k e^{j2\pi k/T\,\tau}$$

όπου a_k και b_k είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα. Επίσης μπορεί η συνάρτηση της ετεροσυσχέτισης να γραφτεί και σαν συνέλιξη της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης των σημάτων υπολογισμένη σε μία βασική περίοδο $\phi_{xy}(\tau, T)$, με τη σειρά Dirac, $\delta_T(t)$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\phi_{xy}(\tau, T) \star \delta_T(t)$$

Από την πρώτη σχέση η Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος υπολογίζεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* b_k \delta(f - k/T)$$

ενώ από τη δεύτερη σχέση

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T^2}\Phi_{xy}(f, T)\ \delta_{1/T}(f)$$

όπου $\Phi_{xy}(f, T)$ είναι η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας

$$\Phi_{xy}(f, T) = X^*(f, T)Y(f, T)$$

με $X(f, T)$ τον Μ.Φ. του σήματος $x(t, T)$ (δηλ. σε μία περίοδο του σήματος $x(t)$) και $Y(f, T)$ ο αντίστοιχος Μ.Φ. του σήματος $y(t)$.

Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} a_k^* &= \frac{1}{T}X^*(k/T, T) \\ b_k &= \frac{1}{T}Y(k/T, T) \end{aligned}$$

Σχεδόν περιοδικά σήματα

Μια άλλη πολύ σημαντική κατηγορία σημάτων ισχύος είναι τα σήματα που είναι σχεδόν περιοδικά (quasi-periodic)

$$x(t) = \sum_k A_k \sin(2\pi f_k t + a_k)$$

όπου $f_{k+1} = \lambda f_k$ και λ άρρητος.

Θα δείξουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(2\pi f_k \tau)$$

επομένως η Φασματική πυκνότητα ισχύος είναι:

$$\Phi_x(f) = \sum_k \frac{A_k^2}{4}[\delta(f+f_k)+\delta(f-f_k)]$$

και η συνολική ισχύ

$$P_x = \phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \sum_k \frac{A_k^2}{4}$$

Σημείωση: Εδώ χρησιμοποιώ τον ορισμό της αυτοσυσχέτισης για σήματα ισχύος. Το σήμα δεν είναι περιοδικό. Είναι σχεδόν περιοδικό. Ετσι τα όρια που θα χρησιμοποιήσω δεν έχουν τίποτα να κάνουν με περίοδο (αφού δεν υπάρχει). Με λίγα λόγια: το σύμβολο T εδώ συμβολίζει μια τυχαία διάρκεια.

<u>Απόδειξη:</u>

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_k\sum_l A_kA_l\sin(2\pi f_kt+a_k)\sin(2\pi f_l(t+\tau)+a_l)dt \\
&= \sum_k\sum_l A_kA_lI_{kl}
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
I_{kl} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(2\pi f_kt+a_k)\sin(2\pi f_l(t+\tau)+a_l)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi(f_k-f_l)t-2\pi f_l\tau+a_k-a_l)dt- \\
&\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi(f_k+f_l)t+2\pi f_l\tau+a_k+a_l)dt \\
&= \begin{cases} 0 & \text{για } \ k\neq l \\ \frac{1}{2}\cos(2\pi f_k\tau) & \text{για } \ k=l \end{cases}
\end{aligned}$$

Γιατί γενικά (για κάθε ω και a)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega t+a)dt}_{<\infty} = 0$$