Αθροισμα N ημιτονοειδών όρων

Η σχέση

$$x(t) = X_0 + \Re\{\sum_{k=1}^{N} X_k\, e^{j2\pi k f_0\, t}\}$$

δηλώνει ότι όταν προσθέτουμε ημιτονοειδή σήματα που σχετίζονται αρμονικά, δηλ. που περιέχουν συχνότητες οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους (βασικής) συχνότητας f_0, προκύπτει ένα σήμα περιοδικό με περίοδο:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \ \ (sec)$$

που δεν περιγράφεται όμως όπως προηγουμένως ως ένα απλό ημίτονο, αλλά ως ένα άθροισμα ημιτονοειδών όρων.

Παράδειγμα: Εστω:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(2\pi 200 t) \\ x_2(t) &= A_2 \cos(2\pi 400 t) \end{aligned}$$

τότε το σήμα

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

θα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{200}\ sec$ (Σχ. 1). Πράγματι τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ έχουν συχνότητες $f_1 = 200\,Hz$ και $f_2 = 400\,Hz$ αντίστοιχα, που είναι αρμονικά συσχετισμένες, δηλ. είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας: $f_1 = 1\,f_0$, $f_2 = 2\,f_0$, όπου $f_0 = 200\,Hz$. Αν στα παραπάνω

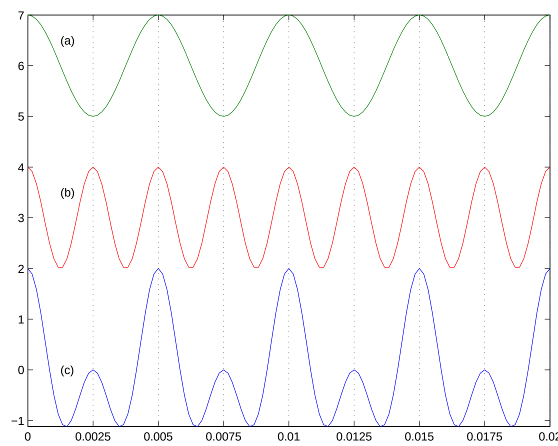

Figure 1: (a). $x_1(t)$, (b), $x_2(t)$, (c) $x_1(t) + x_2(t)$

σήματα προσθέσουμε το σήμα $x_3(t) = A_3\ \cos(2\pi 500 t)$ τότε το σήμα $y_2(t) = y_1(t) + x_3(t)$ θα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{100} sec$ (Σχ. 2) επειδή η συχνότητα $f_0 = 100\,Hz$ είναι τώρα η μέγιστη συχνότητα που διαιρεί ακέραια όλες τις συχνότητες των σημάτων που προσθέσαμε. Σημειώστε ότι η συχνότητα $f_0 = 100\,Hz$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) όλων των συχνοτήτων που προσθέσαμε. Οταν οι συχνότητες $f_1, f_2, \cdots, f_N$ των σημάτων που προσθέτουμε δεν σχετίζονται αρμονικά, τότε το άθροισμά τους δεν είναι πλέον ένα περιοδικό σήμα.

Ας δούμε το φασματικό περιεχόμενο των σημάτων που μόλις αναφέραμε

$$y_2(t) = A_1 \cos(2\pi 200 t) + A_2 \cos(2\pi 400 t) + A_3 \cos(2\pi 500 t)$$

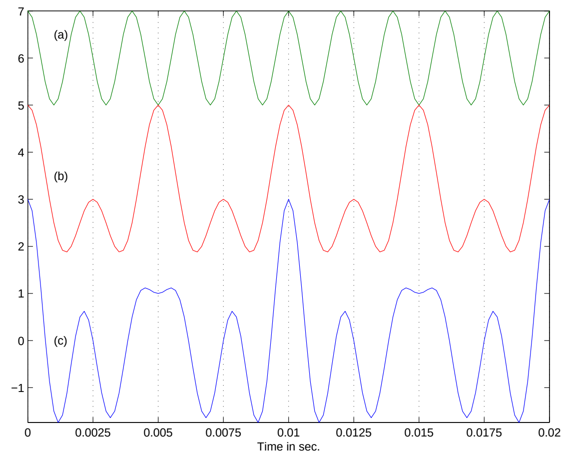

Figure 2: (a) $x_3(t)$ (b) $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$, (c) $y_2(t) = y_1(t) + x_3(t)$

όπου αυθαίρετα διαλέγουμε: $A_2 < A_1 < A_3$.
Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη σχέση Euler, το σήμα $y_2(t)$ γράφεται ως:

$$y_2(t) = \frac{A_1}{2}\left(e^{j2\pi 200t} + e^{-j2\pi 200t}\right) + \frac{A_2}{2}\left(e^{j2\pi 400t} + e^{-j2\pi 400t}\right) + \frac{A_3}{2}\left(e^{j2\pi 500t} + e^{-j2\pi 500t}\right)$$

και το φάσμα πλάτους φαίνεται στο σχήμα 3.
Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης είναι για κάθε συχνότητα μηδενικό. Αν χρησιμοποιήσουμε μη μηδενικές

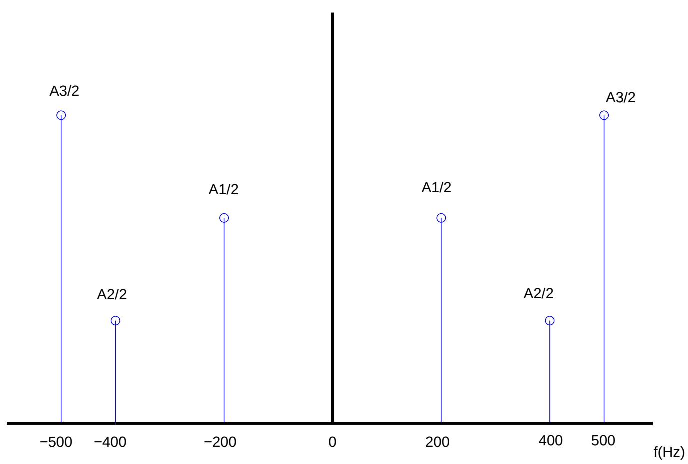

Figure 3: Φάσμα πλάτους του $y_2(t)$.

φάσεις π.χ. $\phi_1 = 1.5\pi$, $\phi_2 = 0.8\pi$ και $\phi_3 = -1.1\pi$ αντίστοιχα για τα σήματα $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t)$, τότε το νέο σήμα, $y_3(t)$, που θα προκύψει από την πρόσθεσή τους θα είναι επίσης περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/100\ sec$ αλλά θα διαφέρει πολύ στο χρόνο από το σήμα $y_2(t)$. Πράγματι, στο σχήμα 4 (a) έχουμε σχεδιάσει το σήμα $y_2(t)$ όπου τα σήματα x_1, x_2, και x_3 έχουν μηδενικές φάσεις, και στο σχήμα 4 (b) έχουμε σχεδιάσει το σήμα $y_3(t)$ όπου τα σήματα x_1, x_2, και x_3 έχουν ΜΗ μηδενικές φάσεις. Παρατηρείστε πόσο διαφορετικά είναι στο χρόνο, αν και έχουν το ίδιο φάσμα πλάτους. Επομένως, η φάση ενός σήματος ειναι άρρηκτα δεμένη με τη χρονική δομή ενός σήματος.

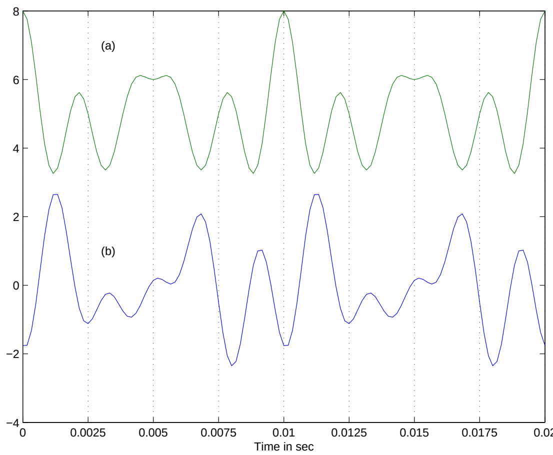

Figure 4: (a) $y_2(t)$: Αθροισμα σημάτων μηδενικής φάσης (b) $y_3(t)$: Αθροισμα των ιδιων σημάτων όπως στο (a) αλλά με φάσεις μη μηδενικές.

Διαμόρφωση συχνότητας - Frequency Modulation (FM)

Μέχρι τώρα βλέπαμε σήματα που οι συχνότητές τους ήταν χρονικά αμετάβλητες. Σε αυτή τη παράγραφο θα δούμε σήματα των οποίων η συχνότητα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το χρόνο. Τα σήματα αυτά λέγονται σήματα σειρήνας (chirp signals) και είναι μια ειδική κατηγορία σημάτων διαμορφωμένων κατά συχνότητα. Υπενθυμίζουμε τους όρους φάση και φάση μετατόπισης. Σε ένα σήμα

$$x(t) = A\,\cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

το όρισμα του συνημιτόνου $\theta(t) = 2\pi f_0\, t + \phi$, ονομάζεται φάση του σήματος $x(t)$, ενώ ϕ, ονομάζεται η φάση μετατόπισης.

Ονομάζουμε στιγμιαία συχνότητα:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$$

Επομένως το σήμα $x(t)$, έχει σταθερή στιγμιαία συχνότητα:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_0$$

Για γραμμικά ως πρός το χρόνο μεταβαλλόμενη συχνότητα το πολυώνυμο της φάσης θα πρέπει να είναι δευτέρου βαθμού:

$$\psi(t) = 2\pi\mu\, t^2 + 2\pi f_0\, t + \phi$$

όπου μ ονομάζεται σταθερά διαμόρφωσης. Οπότε

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = 4\pi\mu\, t + 2\pi f_0$$

Σε κάθε χρονική στιγμή, t_i, η στιγμιαία συχνότητα θα μεταβάλλεται γραμμικά:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\psi(t)}{dt}\right) = 2\mu\, t + f_0 \qquad (1)$$

Παράδειγμα: Θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα σειρήνας, του οποίου η στιγμιαία συχνότητα να μεταβάλλεται από $f_1 = 200\, Hz$ σε $f_2 = 2300\, Hz$ σε χρόνο $T = 3\, sec$.

Η στιγμιαία συχνότητα είναι:

$$
\begin{aligned}
f_i(t) &= \frac{f2 - f1}{T}\, t + f_0 \\
&= 700t + 200
\end{aligned}
$$

Η φάση του σήματος θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_0^t 2\pi\, f_i(u)\, du \\
&= 2\pi\, 350\, t^2 + 2\pi\, 200t + \phi_0
\end{aligned}
$$

όπου το ϕ_0 είναι τυχαία σταθερά.

Οταν το φασματικό περιεχόμενο (πλάτη, φάσεις, συχνότητες) των σημάτων που αναλύουμε δεν μεταβάλλεται με το χρόνο το φάσμα πλάτους και φάσης αρκεί για να περιγράψει τα σήματα. Μια τέτοια παράσταση δεν αρκεί για τα σήματα που εξετάζουμε εδώ. Για τέτοιου είδους σήματα χρησιμοποιούμε μια παράσταση που λέγεται: Χρόνου–Συχνότητας (Time-Frequency) όπου μπορεί εύκολα να παρουσιασθεί η αλλαγή της συχνότητας ως προς το χρόνο. Σε αυτήν την παράσταση ο χρόνος είναι ο οριζόντιος άξονας και η συχνότητα ο κατακόρυφος άξονας. Η κατανομή της ενέργειας (ή της ισχύος) του σήματος αναπαριστάται σε έναν τρίτο άξονα κάθετο προς αυτούς του χρόνου και της συχνότητας. Συνήθως όμως χρησιμοποιούμε χρώματα για την αναπαράσταση της ενέργειας έχοντας αντιστοιχήσει το μαύρο χρώμα σε χαμηλή ενέργεια ενώ το κόκκινο σε υψηλή ενέργεια. Ένα παράδειγμα αναπαράστασης Χρόνου–Συχνότητας δίδεται στο σχήμα 5. Αναπαριστά το σήμα σειρήνας που μόλις δημιουργήσαμε. Στο σχήμα 6 έχουμε σχεδιάσει τα πρώτα δείγματα του σήματος αυτού στο χρόνο. Παρατηρήστε πως αλλάζει η συχνότητα του σήματος με την πάροδο του χρόνου. Για

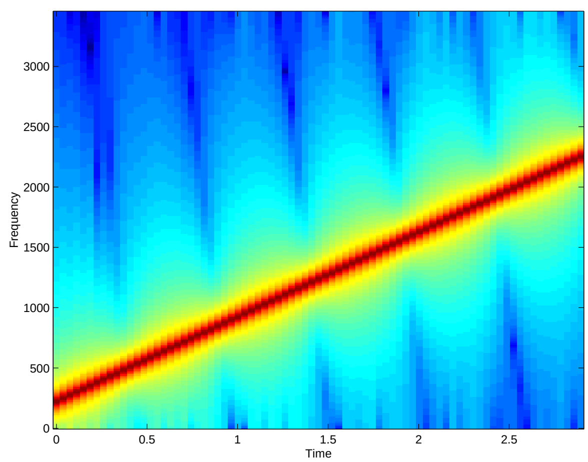

Figure 5: Αναπαράσταση Χρόνου–Συχνότητας για ένα σήμα σειρήνας με αρχική συχνότητα $200\,Hz$ τελική $2300\,Hz$. Διάρκεια: $3sec$.

σύγκριση, δίνουμε στο σχήμα 7 ένα ημιτονοειδές σήμα διάρκειας 3 sec με σταθερή συχνότητα $3000Hz$.

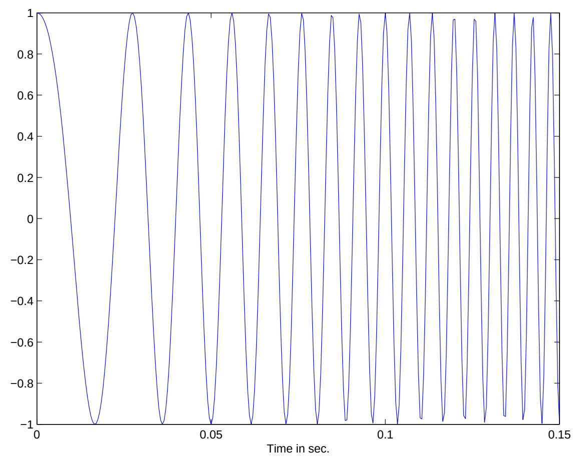

Figure 6: Ένα σήμα σειΡήνας στο χρόνο.

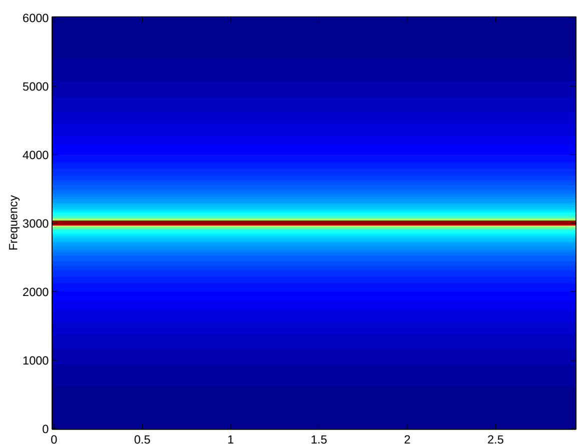

Figure 7: Αναπαράσταση Χρόνου–Συχνότητας για ένα σήμα σταθερής συχνότητας $3000Hz$.

Σήματα και Νότες

Ενα σήμα το οποίο μας είναι πολύ οικείο και όπου οι συχνότητες του σήματος αλλάζουν ως συνάρτηση του χρόνου είναι η μουσική. Οι νότες δεν είναι παρά ημίτονα κάποιας συχνότητας. Για παράδειγμα η νότα ΛΑ της τέταρτης οκτάβας είναι ένα ημίτονο με συχνότητα $440Hz$ ενώ το ΝΤΟ της ίδιας οκτάβας έχει συχνότητα $262\,Hz$. Μια οκτάβα περιέχει 12 νότες: Ντο Ντο# Ρε Ρε# Μι Φα Φα# Σολ Σολ# Λα Λα# Σι, όπου # σημαίνει δίεση. Ο λόγος της συχνότητας μιας νότας προς τη συχνότητα της αμέσως προηγούμενης είναι σταθερός και ίσος με r. Για παράδειγμα:

$$\frac{f_{Nto\#}}{f_{Nto}} = \frac{f_{Si}}{f_{La\#}} = r$$

Επίσης η πρώτη νότα μιας οκτάβας, με την πρώτη νότα της επομένης οκτάβας έχουν λόγο ίσο με 2. Δηλαδή είναι αρμονικές. Ας παραστήσουμε τις νότες μιας οκτάβας με: $F_1, F_2, \cdots, F_{12}$ και την πρώτη νότα της επόμενης οκτάβας με F_{13}. Τότε με όσα είπαμε:

$$\frac{F_2}{F_1} = r,\ \frac{F_3}{F_2} = r,\ \cdots \frac{F_{13}}{F_{12}} = r\ \Rightarrow \frac{F_{13}}{F_1} = r^{12}$$

Ομως από τα παραπάνω ξέρουμε ότι: $F_{13} = 2\,F_1$. Επομένως:

$$r^{12} = 2\ \Rightarrow r = 2^{1/12}\ \Rightarrow r \approx 1.0595$$

Γνωρίζοντας την τιμή του r μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα σε Hz που αντιστοιχεί σε κάθε νότα αν έχουμε μία νότα ως αναφορά. Στη μουσική αυτή η νότα είναι η Λα της $4^{ης}$ οκτάβας που αντιστοιχεί στη συχνότητα $440\,Hz$. Το πιάνο έχει συνολικά 88 πλήκτρα και η νότα αναφοράς, Λα, είναι το 49 πλήκτρο, ενώ η νότα Ντο της ίδιας οκτάβας είναι το πλήκτρο 40. Γνωρίζοντας τη συχνότητα αναφοράς, η νότα Ντο της $4^{ης}$ οκτάβας θα έχει συχνότητα:

$$f_{NTO} = f_{\Lambda A}\,2^{(40-49)/12} \approx 262Hz$$

Στο σχήμα 8 φαίνονται τα πλήκτρα από το Ντο της $3^{ης}$ οκτάβας (πλήκτρο 28) μέχρι το Σολ της $6^{ης}$ οκτάβας (πλήκτρο 71). Επομένως, για να βρούμε τη συχνότητα μιας νότας με αριθμό πλήκτρου n δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε τη σχέση:

$$f_n = f_{\Lambda A}\,2^{(n-49)/12} \tag{2}$$

όπου $f_{\Lambda A} = 440\,Hz$.

Στο σχήμα 8 εμφανίζονται επίσης οι αξίες μιας νότας. Αυτές καθορίζουν τη διάρκεια του ήχου. Για παράδειγμα, αν εμείς θελήσουμε κάθε τέταρτο νότας (1/4) να είναι διάρκειας $600\,msec$, τότε η ολόκληρη νότα θα είναι $4 \times 600 = 2400\,msec$ και κάθε όγδοο (1/8) θα είναι: $600/2 = 300\,msec$.

Το σχήμα 9 δείχνει την αναπαράσταση Χρόνου–Συχνότητας για τις νότες: Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι, της $4^{ης}$ οκτάβας, κάθε νότα έχει αξία 1/4 και διάρκεια $600msec$.

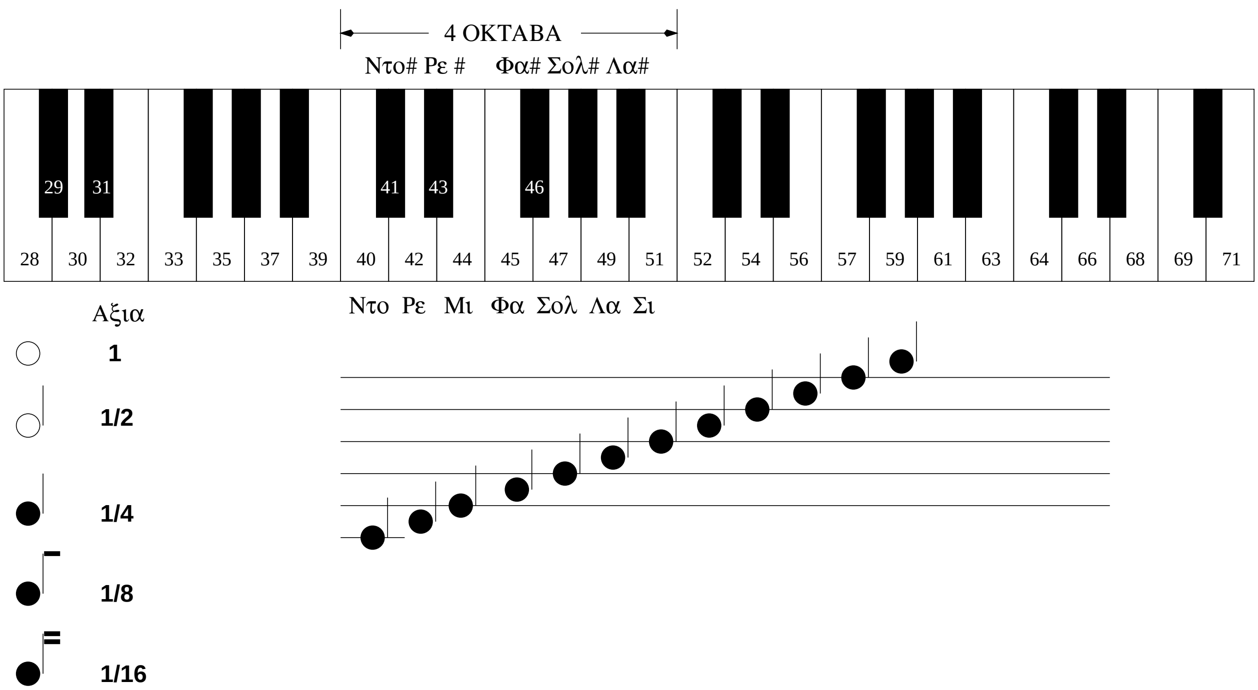

Figure 8: Κάποια πλήκτρα πιάνου, πεντάγραμμο και αξίες.

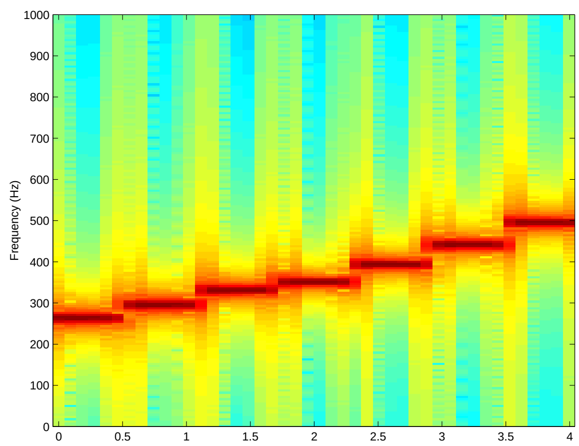

Figure 9: Αναπαράσταση Χρόνου–Συχνότητας για τις νότες: Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι, της $4^{\eta\varsigma}$ οκτάβας.

Σειρές Fourier

Εχουμε δει ότι:

$$x(t) = 10 + 5\cos(2\pi 10t + \pi/3) \tag{3}$$

γράφεται ως:

$$x(t) = 10 + \frac{5}{2}\,e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi 10t} + \frac{5}{2}\,e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j2\pi 10t} \tag{4}$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler:

$$cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{10}sec.$ Αν θέσουμε $X_0 = 10$ και $X_1 = 5e^{j\frac{\pi}{3}}$, τότε η εξίσωση 4 γράφεται ως:

$$x(t) = X_0 + \frac{X_1}{2}e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} + \frac{X_1^*}{2}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} \tag{5}$$

όπου X_1^* είναι ο συζυγής του X_1. Σκοπός μας είναι να βρούμε μια σχέση που συνδέει τα μιγαδικά πλάτη X_0 και X_1 με το σήμα $x(t)$.
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (5) με $e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}$, και ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη σε διάστημα μιας περιόδου, T_0:

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt &= X_0\underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0} + \frac{X_1}{2}\underbrace{\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{T_0} + \frac{X_1^*}{2}\underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0} \\ &= \frac{X_1}{2}T_0\end{aligned} \tag{6}$$

Οπότε:

$$X_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt \tag{7}$$

Στην εξίσωση (6) κάναμε χρήση της σχέσης ορθογωνιότητας:

$$\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-l)\,t} = \begin{cases} T_0 & \text{αν } k = l \\ 0 & \text{αν } k \neq l \end{cases} \tag{8}$$

Για τον υπολογισμό του X_0 απλά ολοκληρώνουμε το σήμα σε διάστημα μιας περιόδου:

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} x(t)dt &= X_0\underbrace{\int_0^{T_0} dt}_{T_0} + \frac{X_1}{2}\underbrace{\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0} + \frac{X_1^*}{2}\underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0} \\ &= X_0\,T_0\end{aligned} \tag{9}$$

Επομένως:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \tag{10}$$

δηλαδή το X_0 είναι ίσο με τη μέση τιμή του σήματος στη διάρκεια μιας περιόδου, T_0.
Αν γράψουμε το αρχικό σήμα (εξίσωση (3)) σε μια πιο γενική μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1\cos(2\pi f_0 t + \phi_1) \\ x(t) &= A_0 + \frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} + \frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}\end{aligned} \tag{11}$$

τότε:

$$\begin{aligned} A_1 e^{j\phi_1} &= X_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}dt \;\; \text{και} \\ A_0 &= X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \end{aligned} \tag{12}$$

όπου $A_0 = 10, A_1 = 5, \phi_1 = \dfrac{\pi}{3}$.

Ας δούμε τώρα τι θα υπολογίζαμε ως πλάτος σε μια συχνότητα που δεν υπάρχει στο σήμα $x(t)$. Για παράδειγμα, στη συχνότητα: $f^{'} = 2\, f_0 = 2\dfrac{1}{T_0}$:

$$\begin{aligned} X^{'} &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t}dt \\ &= \frac{2}{T_0}\left[A_0\int_0^{T_0} e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t}dt + \frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t}dt + \frac{A_1^*}{2}e^{-j\phi_1}\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t}dt\right] \\ &= \frac{2}{T_0}[A_0\underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0} + \frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}\underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j1\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0} + \frac{A_1^*}{2}e^{-j\phi_1}\underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j3\frac{2\pi}{T_0}t}dt}_{0}] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

<u>Συμπέρασμα:</u>

- Αν μια συχνότητα f_1 υπάρχει στο σήμα $x(t)$, τότε η σχέση:

$$A_1 e^{j\phi_1} = X_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi f_1 t}dt \neq 0 \tag{14}$$

  δίνει το πλάτος A_1 και τη φάση ϕ_1 του σήματος στη συχνότητα f_1.

- Αν, αντίθετα, η συχνότητα f_1 δεν υπάρχει στο σήμα $x(t)$, τότε:

$$A_1 e^{j\phi_1} = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi f_1 t}dt = 0 \tag{15}$$

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω:

Ενα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να αναπτυχθεί σε άθροισμα N όρων (όπου N μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο (π.χ. ∞)):

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos{(k\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_k)} \tag{16}$$

όπου:

$$\begin{aligned} A_k e^{j\phi_k} &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\dfrac{2\pi}{T_0}t}dt \\ A_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \end{aligned} \tag{17}$$

Η σχέση (16) ονομάζεται ανάπτυγμα σε σειρά $Fourier$ ή Σύνθεση $Fourier$, ενώ οι σχέσεις (17) ονομάζονται Ανάλυση $Fourier$.

Παράδειγμα: Θέλουμε να αναπτύξουμε σε σειρά $Fourier$ το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases} \tag{18}$$

όπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος. Γραφικά το σήμα $x(t)$ φαίνεται στο σχήμα 10.

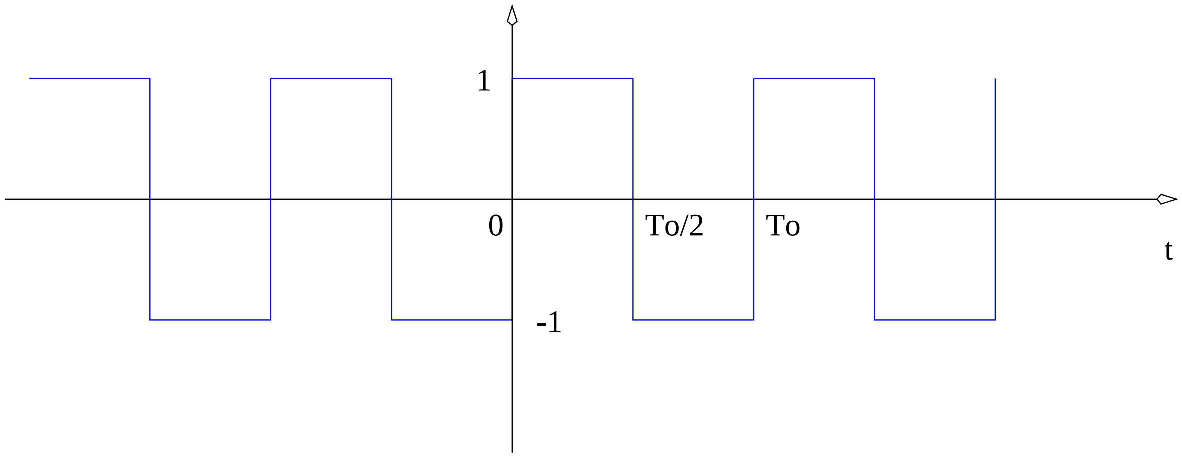

Figure 10: Το περιοδικό σήμα της Εξίσωσης (18).

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} dt = 0$$

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} 1\, e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt + \frac{2}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} (-1)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt \\
&= \frac{2}{T_0}\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T_0}}\, e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\Bigg|_0^{T_0/2} - \frac{2}{T_0}\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T_0}}\, e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\Bigg|_{T_0/2}^{T_0} \\
&= \frac{1}{j\pi k}(1 - e^{-j\pi k}) + \frac{1}{j\pi k}(1 - e^{-j\pi k}) \\
&= \frac{2}{j\pi k}(1 - e^{-j\pi k})
\end{aligned}$$

όμως:

$$e^{-j\pi k} = \begin{cases} -1 & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \text{ (δηλ. περιττούς)} \\ 1 & k = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots \text{ (δηλ. άρτιους)} \end{cases}$$

Επομένως:

$$X_k = \begin{cases} \frac{4}{j\pi k} & \text{για } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \\ 0 & \text{για } k \text{ άρτια} \end{cases}$$

ή:

$$X_k = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{για } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \\ 0 & \text{για } k \text{ άρτια} \end{cases}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{4\pi}{|k|} \quad \text{για } k \text{ περιττά} \\
\phi_k &= \begin{cases} -\pi/2 & k > 0 \text{ και περιττά} \\ -\pi/2 + \pi = \pi/2 & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν για παράδειγμα $T_0 = 0.04\,sec.$ τότε $f_0 = 25\,Hz.$ Δηλαδή το φάσμα συχνοτήτων θα περιέχει μη μηδενικούς όρους στις συχνότητες: $\pm 25Hz, \pm, 75Hz, \pm 125Hz$, κ.λ.π. Το φάσμα πλάτους και φάσης δίνονται στα σχήματα 11 και 12. Επομένως το $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως:

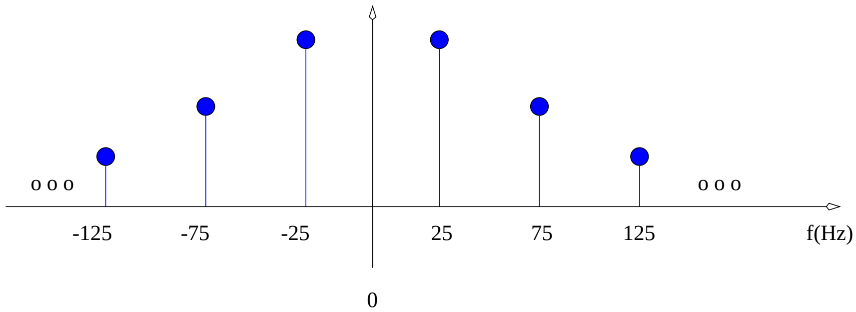

Figure 11: Φάσμα πλάτους.

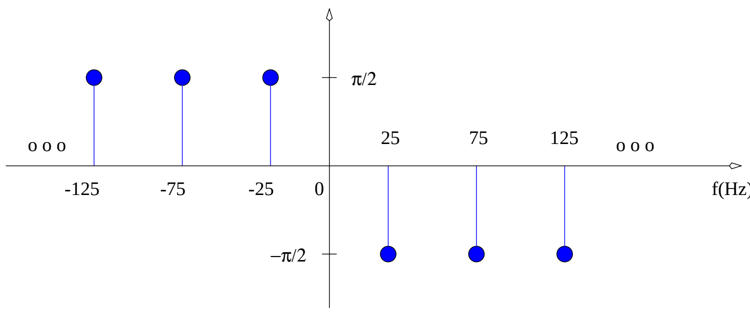

Figure 12: Φάσμα φάσης.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \Re\{\sum_{k=2l+1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{jk\omega_0 t}\} \\
&= \sum_{k=2l+1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k} \cos\left(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=2l+1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k} \sin\left(k\omega_0 t\right) \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots)
\end{aligned}
$$

όπου $\Re$ σημαίνει πραγματικό μέρος, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ και $l = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Στο σχήμα 13 εμφανίζουμε στο πάνω μέρος την προσέγγιση του σήματος χρησιμοποιώντας $N = 3$ μόνο όρους από το παραπάνω άθροισμα. Στο κάτω μέρος του ίδιου σχήματος σχεδιάσαμε το προσεγγιστικό σήμα χρησιμοποιώντας $N = 10$ όρους. Είναι φανερό ότι όσο μεγαλώνουμε τον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούμε στη σειρά *Fourier* τόσο πιο μικρό θα είναι το λάθος προσέγγισης. Επίσης παρατηρούμε ότι το προσεγγιστικό σήμα ταλαντώνεται γύρω από τις τιμές $1, -1$. Αν και το πλάτος αυτών των ταλαντώσεων μικραίνουν καθώς ο αριθμός των όρων στη σειρά *Fourier* μεγαλώνει, ποτέ δεν θα εξαφανιστούν. Αυτό το φαινόμενο το μελέτησε ο *Gibbs* το 1899, και για το λόγο αυτό το φαινόμενο ονομάζεται φαινόμενο *Gibbs*.

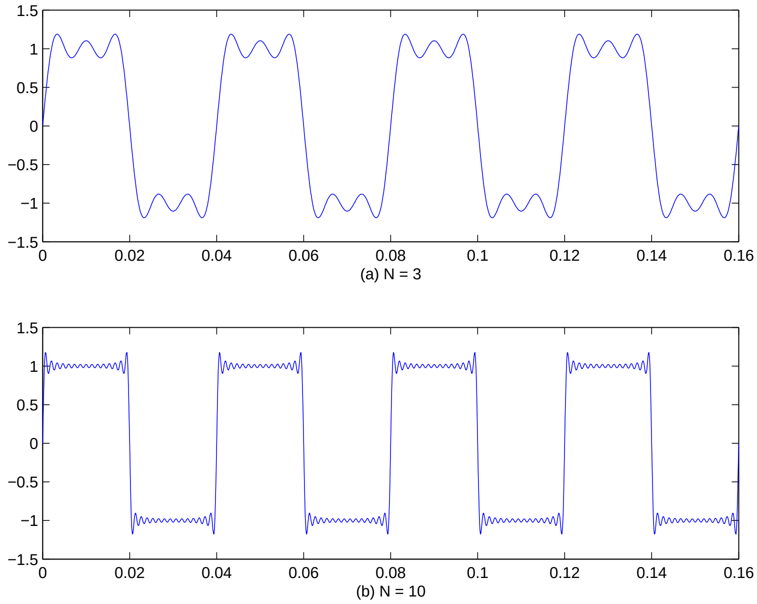

Figure 13: Πάνω: άθροισμα 3 όρων της σειράς $Fourier$. Κάτω: άθροισμα 10 όρων της σειράς $Fourier$. Παρατηρείστε το φαινόμενο $Gibbs$.

Αρτιο και περιττό μέρος σήματος

Ενα σήμα ονομάζεται άρτιο, όταν:

$$x(t) = x(-t) \ \ \forall t$$

ενώ ονομάζεται περιττό όταν

$$x(t) = -x(-t) \ \ \forall t$$

Εστω

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(k\omega_0 t + \phi_k\right)$$

το ανάπτυγμα σε $Fourier$ του σήματος $x(t)$ το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως:

$$x(t) = A_0 + \Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t}\} \tag{19}$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση το t αντικατασταθεί με $-t$ έχουμε:

$$x(-t) = A_0 + \Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t}\} \tag{20}$$

Προσθέτωντας τις εξισώσεις (19) και (20) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του $Euler$, παίρνουμε:

$$x(t) + x(-t) = 2A_0 + 2\Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} \cos\left(k\omega_0 t\right)\} \tag{21}$$

Αν $x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση, δηλ. $x(t) = x(-t)$, τότε η εξίσωση (21) γράφεται:

$$\begin{aligned} 2x(t) &= 2A_0 + 2\Re\{\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} \cos\left(k\omega_0 t\right)\} \\ x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(\phi_k\right) \cos\left(k\omega_0 t\right) \end{aligned} \tag{22}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x(-t) = -x(t)$, δηλαδή αν το σήμα ήταν περιττό, τότε το άθροισμα στην εξίσωση (21) θα ήταν μηδέν. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν το σήμα $x(t)$ είναι άρτιο, τότε περιέχει μόνο συνημιτονοειδής όρους (Εξίσωση (21)). Αντίθετα, ένα περιττό σήμα δεν περιέχει συνημιτονοειδής όρους.
Αν αντί να προσθέσουμε τις Εξισώσεις (19) και (20) τις αφαιρέσουμε, θα προκύψει:

$$\begin{aligned} x(t) - x(-t) &= \Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})\} \\ &= \Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} 2j \sin(k\omega_0 t)\} \\ &= -2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t) \end{aligned} \tag{23}$$

Αν $x(t)$ είναι περιττό σήμα, τότε: $x(-t) = -x(t)$ και η Εξίσωση (23) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} 2x(t) &= -2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t) \\ x(t) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t) \end{aligned} \tag{24}$$

<u>Συμπέρασμα:</u>
Ενα άρτιο σήμα περιέχει μόνο συνημιτονοειδή όρους (Εξίσωση (22)), ενώ ένα περιττό σήμα έχει μόνο ημιτονοειδή όρους (Εξίσωση (24)).

Κάθε πραγματικό σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} 2x(t) &= x(t) + x(-t) + x(t) - x(-t) \Rightarrow \\ x(t) &= \underbrace{\frac{x(t) + x(-t)}{2}}_{x_\alpha(t)} + \underbrace{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}_{x_\pi(t)} \end{aligned}$$

όπου $x_\alpha(t)$ δηλώνει το άρτιο μέρος ενός σήματος και $x_\pi(t)$ δηλώνει το περιττό μέρος ενός σήματος.
Επομένως κάθε πραγματικό σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού μέρους:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t)$$

Από τα παραπάνω και από τις Εξισώσεις (22) και (24) προκύπτει ότι κάθε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(\phi_k) \cos(k\omega_0 t)}_{\text{άρτιο μέρος}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} -A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t)}_{\text{περιττό μέρος}} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k (\cos(\phi_k) \cos(k\omega_0 t) - \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t)) \Rightarrow \\ x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \tag{25}$$

η οποία είναι η σχέση που μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε ως ανάπτυγμα ενός πραγματικού περιοδικού σήματος σε σειρά $Fourier$.

Στο σχήμα 14 δείχνουμε το άρτιο και περιττό μέρος ενός σήματος

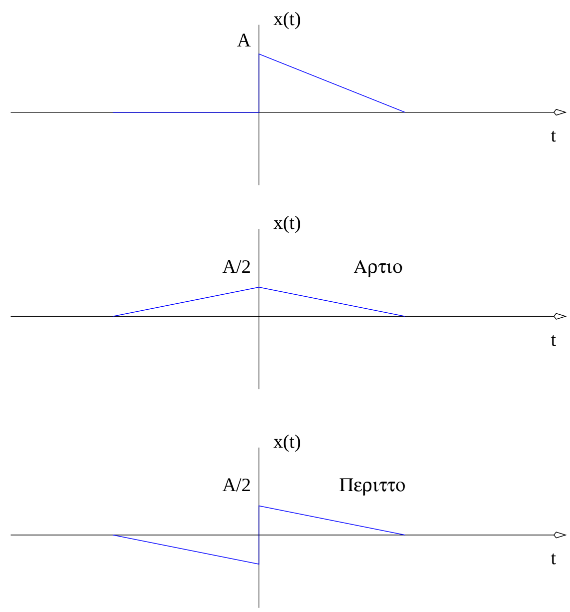

Figure 14: Αρτιο, $x_\alpha(t)$, και περιττό μέρος, $x_\pi(t)$, ενός πραγματικού σήματος $x(t)$.