ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής
Εξέταση Προόδου

Θέμα 1 - Βαθμός: 30
Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε επαρκώς. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται**.

(α') **(3 μ.)** Ισχύει

$$\mathrm{Re}\{(1+j)(\cos(t)+j\sin(t))\} = \cos(t) - \sin(t)$$

(β') **(3 μ.)** Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{12}{1-2|k|} \tag{1}$$

είναι πραγματικό και άρτιο.

(γ') **(3 μ.)** Το σύστημα $y(t) = x(2t)$ είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

(δ') **(3 μ.)** Αν

$$\mathrm{rect}(t-2) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(f)e^{-j4\pi f} \tag{2}$$

τότε

$$\mathrm{sinc}(t)e^{-j4\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f-2) \tag{3}$$

(ε') **(3 μ.)** Αν ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k και ισχύει $X_0 \neq 0$, τότε το σήμα **δεν** μπορεί να είναι περιττό.

(ϛ') **(3 μ.)** Αν ένας μετασχ. Fourier γράφεται ως

$$X(f) = A(f)e^{j\phi(f)},\ \ A(f) \in \mathbb{R},\ \phi(f) \in (-\pi, \pi] \tag{4}$$

τότε η μορφή αυτή ονομάζεται πολική μορφή.

(ζ') **(3 μ.)** Η θεμελιώδης συχότητα του σήματος $x(t) = 2\cos(2\pi 100t) - 4\sin(75t)$ ισούται με $f_0 = 25$ Hz.

(η') **(3 μ.)** Το σήμα

$$x(t) = e^{-|t|} \tag{5}$$

είναι σήμα ενέργειας.

(θ') **(3 μ.)** Ισχύει

$$u(at) = u(t) \tag{6}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(ι') **(3 μ.)** Αν $x(t) \longleftrightarrow X(f) = |X(f)|e^{j\phi(f)}$, τότε

$$y(t) = x(t-t_0),\ t_0 > 0 \longleftrightarrow Y(f) = |X(f)|e^{j(\phi(f)+2\pi f t_0)} \tag{7}$$

Λύση:

(α΄) Σωστό,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{(1+j)(\cos(t)+j\sin(t))\} &= \mathrm{Re}\{\cos(t)+j\sin(t)+j\cos(t)-\sin(t)\} && (8)\\
&= \mathrm{Re}\{\cos(t)-\sin(t)+j(\sin(t)+\cos(t))\} && (9)\\
&= \cos(t)-\sin(t) && (10)
\end{aligned}$$

(β΄) Σωστό, οι συντελεστές Fourier ενός πραγματικού και άρτιου περιοδικού σήματος είναι πραγματικοί ως προς k, δηλ.

$$X_k \in \mathbb{R} \tag{11}$$

ενώ ισχύει

$$X_k = X_{-k}^* \tag{12}$$

λόγω πραγματικού $x(t)$. Λόγω του ότι οι συντελεστές είναι πραγματικοί, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$X_k = X_{-k} \tag{13}$$

που ισχύει στην περίπτωσή μας.

(γ΄) Λάθος, το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο. Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0, θα έχουμε

$$y_d(t) = x(2t - t_0) \tag{14}$$

ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά t_0 θα έχουμε

$$y(t - t_0) = x(2(t - t_0)) \tag{15}$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις δεν είναι ίδιες.

(δ΄) Λάθος, σύμφωνα με την ιδιότητα της δυικότητας, αν

$$\mathrm{rect}(t-2) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(f)e^{-j4\pi f} \tag{16}$$

τότε

$$\mathrm{sinc}(t)e^{-j4\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{rect}(-f-2) \neq \mathrm{rect}(f-2) \tag{17}$$

(ε΄) Σωστό, ο συντελεστής X_0 αποτελεί τη μέση τιμή του σήματος, και γραφικά "ανεβοκατεβάζει" στον άξονα $y'y$ το σήμα μας. Αν $X_0 \neq 0$, σημαίνει ότι το περιοδικό σήμα βρίσκεται γύρω από τον άξονα $y = X_0$, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να υπάρξει περιττή συμμετρία (μπορεί να υπάρξει μόνο άρτια).

(ϛ΄) Λάθος, η πολική μορφή γράφεται ως

$$X(f) = A(f)e^{j\phi(f)} \tag{18}$$

με $A(f) = |X(f)| \geq 0$, $\phi(f) \in (-\pi, \pi]$. Όμως το ερώτημα αναφέρει $A(f) \in \mathbb{R}$ κι όχι $\in \mathbb{R}_+$.

(ζ΄) Λάθος, το σήμα δεν είναι καν περιοδικό γιατί ο λόγος των συχνοτήτων του δεν είναι λόγος ακεραίων:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{75}{2\pi}} = \frac{200\pi}{75} \notin \mathbb{Q} \tag{19}$$

(η΄) Σωστό, το σήμα είναι σήμα ενέργειας,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{20}$$

(θ΄) Λάθος, αφού για $a > 0$

$$u(at) = \begin{cases} 1, & at > 0 \\ 0, & at < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{at}{a} > \frac{0}{a} \\ 0, & \frac{at}{a} < \frac{0}{a} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t) \tag{21}$$

ενώ για $a < 0$

$$u(at) = u(-|a|t) = \begin{cases} 1, & -|a|t > 0 \\ 0, & -|a|t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{-|a|t}{-|a|} < \frac{0}{-|a|} \\ 0, & \frac{-|a|t}{-|a|} > \frac{0}{-|a|} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} = u(-t) \tag{22}$$

(ι΄) Λάθος, αφού από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$Y(f) = |X(f)|e^{j\phi(f)}e^{-j2\pi f t_0} = |X(f)|e^{j(\phi(f)-2\pi f t_0)} \tag{23}$$

Θέμα 2 - Βαθμός: 30

Δείτε την Εικόνα 1. Αντιστοιχίστε τα περιοδικά σήματα της αριστερής στήλης με τα φάσματα της δεξιάς στήλης (ένα με ένα). **Αιτιολογήστε επαρκώς. Αντιστοιχίσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

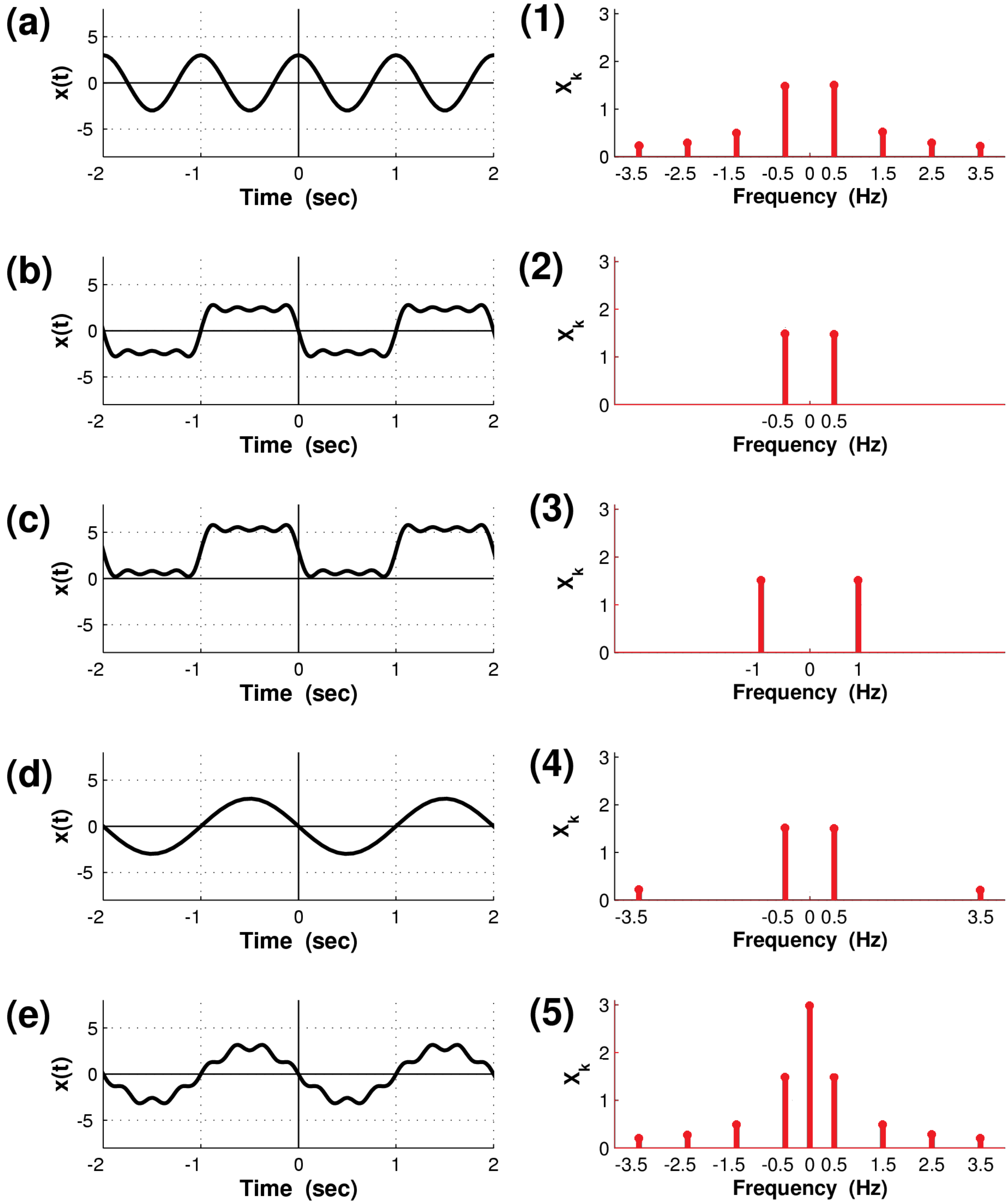
Λύση:

- Ξεκινώντας από τα απλούστερα σήματα, το (a) είναι ένα απλό ημίτονο κι έχει περίοδο $T_0 = 1$ δευτερόλεπτο, άρα θα έχει θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 1/T_0 = 1$ Hz. Οπότε οι φασματικές του γραμμές θα βρίσκονται στις συχνότητες ± 1 Hz και μόνο εκεί. Αντιστοιχίζεται με το (3).

- Το επόμενο απλούστερο, το (d) είναι επίσης ένα απλό ημίτονο κι έχει περίοδο $T_0 = 2$ δευτερόλεπτα, άρα θα έχει θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 1/T_0 = 1/2$ Hz. Οπότε οι φασματικές του γραμμές θα βρίσκονται στις συχνότητες $\pm 1/2$ Hz και μόνο εκεί. Αντιστοιχίζεται με το (2).

- Το σήμα (e) αποτελείται από ένα ημίτονο ίδιας συχνότητας με το (d) συν μια ακόμα μεγαλύτερη συχνότητα αλλά μικρότερου πλάτους. Η περίοδος του σήματος είναι επίσης $T_0 = 2$ δευτερόλεπτα, άρα η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι $f_0 = 1/2$ Hz. Οπότε θα έχουμε φασματικές γραμμές ξανά στις συχνότητες $\pm 1/2$ Hz συν δυο ακόμα σε κάποιες μεγαλύτερες συχνότητες. Το μόνο φάσμα που ανταποκρίνεται σε αυτές τις προδιαγραφές είναι το (4).

- Τα εναπομείναντα σήματα (b, c) είναι ουσιαστικά τα ίδια, με μόνη διαφορά στο συντελεστή X_0, ο οποίος "ανεβοκατεβάζει" τη γραφική παράσταση ως προς τον $y'y$. Βλέπουμε ότι το (c) είναι το ίδιο με το (b) και του έχει προστεθεί μια σταθερά. Άρα από τα φάσματα $(1), (5)$, στο (c) αντιστοιχεί εκείνο με τη μη μηδενική X_0, που είναι το φάσμα (5).



Σχήμα 1: *Εικόνα Θέματος 2.*

- Αναπόφευκτα, το σήμα (b) αντιστοιχίζεται στο φάσμα (1). Αυτό επιβεβαιώνεται κι από το γεγονός ότι το (b) έχει μηδενική μέση τιμή, πράγμα που αντιστοιχεί σε $X_0 = 0$, και απουσία φασματικής γραμμής στη συχνότητα $f = 0$.

Συγκεντρωτικά: $(a) \rightarrow (3)$, $(b) \rightarrow (1)$, $(c) \rightarrow (5)$ $(d) \rightarrow (2)$, $(e) \rightarrow (4)$.

Θέμα 3 - Βαθμός: 40

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4y(t) = x(t) \tag{24}$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$.

(α΄) (**10 μ.**) Δείξτε ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$, ισούται με

$$y_{zi}(t) = \cos(2t)u(t) \tag{25}$$

(β΄) (**12.5 μ.**) Δείξτε ότι η κρουστική του απόκριση, $h(t)$, ίσούται με

$$h(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)u(t) \tag{26}$$

(γ΄) (**12.5 μ.**) Βρείτε **αναλυτικά (μη** χρησιμοποιήσετε έτοιμους πίνακες) την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για είσοδο

$$x(t) = u(t) \tag{27}$$

(δ΄) (**5.0 μ.**) Είναι το σύστημα ευσταθές; Δικαιολογήστε.

Λύση:

(α΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + 4 \tag{28}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = -2j$ και $\lambda_2 = 2j$. Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2jt} + c_2 e^{2jt}, \;\; t > 0 \tag{29}$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \tag{30}$$
$$y'_{zi}(0^-) = 0 \tag{31}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \tag{32}$$
$$y'_{zi}(0^-) = -2jc_1 + 2jc_2 = 0 \tag{33}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} \tag{34}$$
$$c_2 = \frac{1}{2} \tag{35}$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \left[\frac{1}{2}e^{2jt} + \frac{1}{2}e^{-2jt}\right]u(t) = \cos(2t)u(t) \tag{36}$$

(β') Στο σύστημα δεν υπάρχει κάποια παράγωγος της εισόδου, άρα δε χρειάζεται να θέσουμε κάποιο απλούστερο σύστημα. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι - όπως πριν - οι $\lambda_1 = -2j$ και $\lambda_2 = 2j$. Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h(t) = c_1 e^{-2jt} + c_2 e^{2jt}, \;\; t > 0 \tag{37}$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h(0^+) = 0 \tag{38}$$
$$h'(0^+) = 1 \tag{39}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{40}$$
$$h'(0^+) = -2jc_1 + 2jc_2 = 1 \tag{41}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = -\frac{1}{4j} \tag{42}$$
$$c_2 = \frac{1}{4j} \tag{43}$$

Οπότε

$$h(t) = -\frac{1}{4j}e^{-j2t} + \frac{1}{4j}e^{j2t}, \;\; t > 0 = \frac{1}{2}\sin(2t)u(t) \tag{44}$$

(γ') Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\sin(2\tau)u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{45}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\tau)u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{46}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \sin(2\tau)d\tau \tag{47}$$

γιατί

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1, \;\; 0 < \tau < t \tag{48}$$

οπότε

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \sin(2\tau)d\tau = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2\tau)\right)\Big|_0^t \tag{49}$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(2t) + 1\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t)) \tag{50}$$

για $t > 0$, δηλ.

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right)u(t) \tag{51}$$

(δ') Το σύστημα είναι ασταθές γιατί οι ρίζες γράφονται ως

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm 2j \tag{52}$$

με το πραγματικό τους μέρος να μην πληροί τη συνθήκη

$$\Re\{\lambda_i\} < 0 \tag{53}$$

Εναλλακτικά, η κρουστική απόκριση δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη γιατί αποτελείται από μια ταλάντωση ($\sin(2t)u(t)$) της οποίας η απόλυτη τιμή δεν έχει πεπερασμένη επιφάνεια.