ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Θέμα 1ο - 25 μονάδες (2.5 μ. κάθε ερώτημα): Βασικές Γνώσεις
Σωστό ή Λαθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται**.

(α') Αν για ένα σήμα $x(t)$ ισχύει $x(t) \in \mathbb{R}$ και $x(t) = x(-t)$, τότε για το μετασχ. Fourier του, $X(f)$, ισχύει $X(f) \in \mathbb{R}$ και $X(f) = X(-f)$.

(β') Αν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, τότε το σήμα $x(t - t_0)$ έχει μετασχ. Fourier

$$e^{-j2\pi(f/t_0)}X(f) \tag{1}$$

(γ') Αν ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier X_k, τότε ο μετασχ. Fourier του είναι

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|\delta\left(f - kf_0\right) \tag{2}$$

(δ') Αν ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό, τότε είναι και ευσταθές, κι επίσης ισχύει και το αντίστροφο.

(ε') Για ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, η ευστάθεια απαιτεί όλοι οι πόλοι της $H(s)$ να βρίσκονται αυστηρά στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(ϛ') Αν δύο σήματα ενέργειας $x(t)$ και $y(t)$ έχουν μη επικαλυπτόμενα φάσματα, δηλ.

$$X^*(f)Y(f) = X(f)Y^*(f) = 0, \ \ \forall f \tag{3}$$

τότε οι ετεροσυσχετίσεις τους είναι μηδενικές για κάθε χρονική μετατόπιση τ.

(ζ') Για ένα σήμα ισχύος $x(t)$, η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ έχει μετασχ. Fourier ίσο με $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$.

(η') Αν ένα περιοδικό σήμα έχει συντελεστές Fourier X_k, τότε απαραίτητα ισχύει $X_{-k} = X_k^*$.

(θ') Αν ένα σήμα είναι βασικής ζώνης με μέγιστη συχνότητα B Hz, τότε μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως και ακριβώς από ομοιόμορφη δειγματοληψία αν χρησιμοποιήσουμε συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 4B$.

(ι') Αν ένα αιτιατό σήμα έχει ρητό μετασχ. Laplace με μόνους πόλους στις θέσεις $s = -1$ και $s = -3$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι απαραίτητα "λωριδοειδές" και είναι της μορφής $-3 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$.

<u>Λύση:</u>

(α') Σωστό. Ένα πραγματικό και άρτιο σήμα στο χρόνο έχει πραγματικό και άρτιο μετασχ. Fourier, αφού αν $x(t) = x(-t)$, τότε ο μετασχ. Fourier είναι πραγματικός (ιδιότητα), $X(f) \in \Re$, και από την ιδιότητα της αντιστροφής στο χρόνο, $X(f) = X(-f)$, που δηλώνει ότι ο μετασχηματισμός είναι άρτιος.

(β') Λάθος. Ο μετασχ. είναι της μορφής $e^{-j2\pi \mathbf{ft_0}}X(f)$.

(γ') Λάθος. Η σωστή σχέση είναι χωρίς το μέτρο, δηλ. $\sum_k X_k\delta(f - kf_0)$.

(δ') Λάθος. Το ένα δε συνεπάγεται το άλλο. Π.χ. το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{2t}u(t)$ είναι αιτιατό αλλά όχι ευσταθές. Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{t}u(-t)$ είναι ευσταθές αλλά όχι αιτιατό.

(ε') Σωστό. Αν όλοι οι πόλοι βρίσκονται αριστερά του φανταστικού άξονα, τότε ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος, s_{max}, θα ορίζει ένα πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > \Re\{s_{max}\}$ που θα περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα και θα καθιστά το σύστημα ευσταθές.

(ϛ') Σωστό. Τα μη επικαλυπτόμενα φάσματα υποδηλώνουν μηδενική διαφασματική πυκνότητα ενέργειας, δηλ. $\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}(f) = 0$, με αποτέλεσμα οι ετεροσυσχετίσεις, ως αντίστροφοι μετασχηματισμοί Fourier των φασματικών πυκνοτήτων, να είναι κι αυτές μηδενικές.

(ζ') Λάθος. Η σχέση που αναφέρεται ισχύει για σήματα ενέργειας.

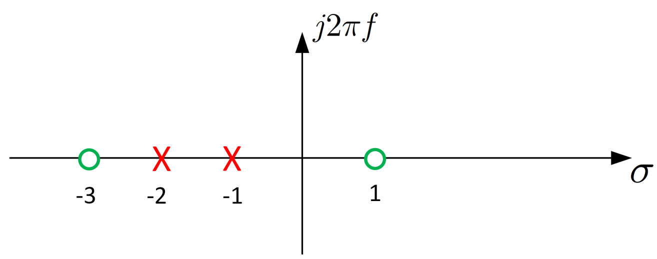
(η') Λάθος. Δεν ισχύει απαραίτητα – πρέπει το σήμα να είναι πραγματικό, $x(t) \in \Re$.

(θ') Σωστό. Το κάτω όριο (ρυθμός Nyquist) είναι $2B$, αλλά η πρόταση είναι σωστή για $f_s > 4B$.

(ι') Λάθος. Αν το σήμα είναι αιτιατό, θα έχει πεδίο σύγκλισης ένα ημιεπίπεδο δεξιά του μεγαλύτερου πόλου, $s = -1$, δηλ. $\Re\{s\} > -1$.

Θέμα 2ο - 25 μονάδες: Συστήματα και Μετασχ. Laplace

Έστω το *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Θέματος 2.*

(α') **(5 μ.)** Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του συστήματος;

(β') **(10 μ.)** Αν γνωρίζετε ότι $H(0) = -1$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(γ') **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(δ') **(5 μ.)** Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που υλοποιεί το παραπάνω σύστημα.

Λύση:

(α') Το πεδίο σύγκλισης θα είναι υποχρεωτικά το $\sigma > -1$, ως αιτιατό σύστημα (δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης).

(β') Θα έχουμε

$$H(s) = A\frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} \tag{4}$$

από το διάγραμμα, και επειδή $H(0) = -1$, παίρνουμε $A = 2/3$. Οπότε

$$H(s) = \frac{2}{3}\frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}, \;\; \sigma > -1 \tag{5}$$

(γ΄) Ναι, μπορεί να υπολογιστεί γιατί ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, και άρα

$$H(f) = \frac{2}{3}\frac{(-1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}{(j2\pi f+1)(j2\pi f+2)} \tag{6}$$

(δ΄) Από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s-1)(s+3)}{3(s+1)(s+2)} \Longleftrightarrow 3(s+1)(s+2)Y(s) = 2(s-1)(s+3)X(s) \tag{7}$$

που γράφεται ως

$$3(s^2+3s+2)Y(s) = 2(s^2+2s-3)X(s) \Longleftrightarrow 3s^2Y(s)+9sY(s)+6Y(s) = 2s^2X(s)+4sX(s)-6X(s) \tag{8}$$

Επιστρέφοντας στο χρόνο

$$3\frac{d^2}{dt^2}y(t)+9\frac{d}{dt}y(t)+6y(t) = 2\frac{d^2}{dt^2}x(t)+4\frac{d}{dt}x(t)-6x(t) \tag{9}$$

Θέμα 3ο - 15 μονάδες: Νέος Μετασχηματισμός!

Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\mathcal{Q}\{\cdot\}$ που ορίζεται ως

$$X_Q(s) = \mathcal{Q}\{x(t)\} = \int_0^\infty t\,x(t)e^{-st^2}\,dt \tag{10}$$

όπου $s \in \mathbb{C}$. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι "ξάδερφος" του γνωστού σας μετασχηματισμού Laplace.

(α΄) **(7.5 μ.)** Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Q}\{\cdot\}$ είναι γραμμικός: αν $\mathcal{Q}\{x(t)\} = X_Q(s),\ \ \mathcal{Q}\{y(t)\} = Y_Q(s)$, τότε για σταθερές $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\mathcal{Q}\{\alpha x(t)+\beta y(t)\} = \alpha X_Q(s)+\beta Y_Q(s) \tag{11}$$

(β΄) **(7.5 μ.)** Να δείξετε την ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης του μετασχηματισμού: αν $\mathcal{Q}\{x(t)\} = X_Q(s)$, τότε για $\lambda > 0$ ισχύει

$$\mathcal{Q}\{x(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda^2}X_Q\left(\frac{s}{\lambda^2}\right) \tag{12}$$

Λύση:

(α΄) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}\{\alpha x(t)+\beta y(t)\} &= \int_0^\infty t(\alpha x(t)+\beta y(t))e^{-st^2}dt && (13)\\
&= \int_0^\infty t\alpha x(t)e^{-st^2}dt + \int_0^\infty t\beta y(t)e^{-st^2}dt && (14)\\
&= \alpha\int_0^\infty tx(t)e^{-st^2}dt + \beta\int_0^\infty ty(t)e^{-st^2}dt && (15)\\
&= \alpha X_Q(s)+\beta Y_Q(s) && (16)
\end{aligned}$$

(β΄) Έχουμε

$$\mathcal{Q}\{x(\lambda t)\} = \int_0^\infty t x(\lambda t) e^{-st^2} dt \tag{17}$$

Θέτουμε $w = \lambda t \Longrightarrow dw = \lambda dt$, ενώ τα όρια ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν γιατί $\lambda > 0$. Άρα

$$\mathcal{Q}\{x(w)\} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{w}{\lambda} x(w) e^{-s\left(\frac{w}{\lambda}\right)^2} dw \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty w x(w) e^{-\left(\frac{s}{\lambda^2}\right)w^2} dw \tag{19}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} X_Q\left(\frac{s}{\lambda^2}\right) \tag{20}$$

Θέμα 4ο - 40 μονάδες: Συστήματα και Φασματικές Πυκνότητες

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 2, & 0 < t < T_1 \\ 1, & T_1 < t < 2T_1 \\ 0, & 2T_1 < t < T_0 \end{cases} \tag{21}$$

με $T_1 = T_0/3$ και $T_0 = 0.001$ s.

(α΄) (**20 μ.**) Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του, X_k, δίνονται ως

$$X_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 3l,\ l \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ -j\dfrac{3}{2\pi k}, & k \neq 3l,\ l \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases} \tag{22}$$

(β΄) (**5 μ.**) Βρείτε τη φασματική πυκνότητα ισχύος $\Phi_x(f)$ για το σήμα αυτό.

(γ΄) (**10 μ.**) Το παραπάνω περιοδικό σήμα εμφανίζεται ως είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = (4000\pi)\mathrm{sinc}(2000t)\cos(2\pi 4500t) \tag{23}$$

Ποιά είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου, $\Phi_y(f)$;

(δ΄) (**5 μ.**) Δείξτε ότι ο λόγος μέσης ισχύος εισόδου-εξόδου, $\dfrac{P_y}{P_x}$ ισούται με $\dfrac{1107}{4000} \approx 0.276$.

Λύση:

Αφού $T_0 = 0.001$ s θα είναι

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 1000 \text{ Hz} \tag{24}$$

(α΄) Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \tag{25}$$

Για $k = 0$ έχουμε

$$X_0 = \int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\left[2T_1 + T_1\right] = \frac{3T_1}{T_0} = \frac{3T_0/3}{3} = 1 \tag{26}$$

Για $k \neq 0$,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\left[2\int_0^{T_1} e^{-jk2\pi f_0 t}\, dt + \int_{T_1}^{2T_1} e^{-jk2\pi f_0 t}\, dt\right] \tag{27}$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\left[2\left.\frac{e^{-jk2\pi f_0 t}}{-jk2\pi f_0}\right|_0^{T_1} + \left.\frac{e^{-jk2\pi f_0 t}}{-jk2\pi f_0}\right|_{T_1}^{2T_1}\right] \tag{28}$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[2\frac{e^{-jk2\pi f_0 T_1} - 1}{-jk2\pi f_0} + \frac{e^{-jk2\pi f_0(2T_1)} - e^{-jk2\pi f_0 T_1}}{-jk2\pi f_0}\right] \tag{29}$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[2\frac{1 - e^{-jk2\pi f_0 T_1}}{jk2\pi f_0} + \frac{e^{-jk2\pi f_0 T_1} - e^{-jk2\pi f_0(2T_1)}}{jk2\pi f_0}\right] \tag{30}$$

Άρα

$$X_k = \frac{2 - 2e^{-jk2\pi f_0 T_1} + e^{-jk2\pi f_0 T_1} - e^{-jk2\pi f_0(2T_1)}}{j2\pi k} = \frac{2 - e^{-jk2\pi f_0 T_1} - e^{-jk2\pi f_0(2T_1)}}{j2\pi k} \tag{31}$$

Τέλος, επειδή

$$T_1 = \frac{T_0}{3} \tag{32}$$

προκύπτει

$$2\pi f_0 T_1 = 2\pi f_0 \frac{T_0}{3} = \frac{2\pi}{3}, \quad 2\pi f_0(2T_1) = 2\pi f_0 \frac{2T_0}{3} = \frac{4\pi}{3} \tag{33}$$

Επομένως

$$X_k = \frac{2 - e^{-j2\pi k/3} - e^{-j4\pi k/3}}{j2\pi k}, \qquad k \neq 0 \tag{34}$$

Από το δοθέν τυπολόγιο, για k πολλαπλάσιο του 3

$$e^{-j2\pi k/3} = 1, \qquad e^{-j4\pi k/3} = 1, \tag{35}$$

άρα

$$X_k = 0 \tag{36}$$

Αν k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε

$$e^{-j2\pi k/3} + e^{-j4\pi k/3} = -1, \tag{37}$$

οπότε

$$X_k = \frac{3}{j2\pi k} = -j\frac{3}{2\pi k} \tag{38}$$

Επομένως

$$X_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k = 3l, \quad l \in \mathbb{Z} - \{0\}, \\ -j\dfrac{3}{2\pi k}, & k \neq 0, \quad k \neq 3l \end{cases} \tag{39}$$

(β') Για ένα περιοδικό σήμα, η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \tag{40}$$

δηλαδή

$$\Phi_x(f) = \delta(f) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,\ k\notin 3\mathbb{Z}}}^{\infty} \frac{9}{4\pi^2 k^2}\delta(f - 1000k) \tag{41}$$

(γ') Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = (4000\pi)\,\mathrm{sinc}(2000t)\cos(2\pi 4500t) \tag{42}$$

Αναγνωρίζουμε ότι το φίλτρο είναι ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο επιλογής συχνοτήτων με πλάτος π, δηλ. με συχνοτική απόκριση

$$H(f) = \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-4500}{2000}\right) + \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+4500}{2000}\right) \tag{43}$$

Επομένως

$$H(f) = \begin{cases} \pi, & 3500 < |f| < 5500 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{44}$$

Για τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου ισχύει

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2 \Phi_x(f) \tag{45}$$

Το φίλτρο κρατά μόνο τις γραμμές της φασματικής πυκνότητας ισχύος της εισόδου στις συχνότητες

$$f = \pm 4000 \text{ Hz}, \qquad f = \pm 5000 \text{ Hz} \tag{46}$$

Αυτές αντιστοιχούν στους δείκτες

$$k = \pm 4, \qquad k = \pm 5 \tag{47}$$

Για $k = \pm 4$,

$$|X_{\pm 4}|^2 = \frac{9}{4\pi^2(4)^2} = \frac{9}{64\pi^2} \tag{48}$$

Για $k = \pm 5$,

$$|X_{\pm 5}|^2 = \frac{9}{4\pi^2(5)^2} = \frac{9}{100\pi^2} \tag{49}$$

Επειδή το πλάτος του φίλτρου στη ζώνη διέλευσης είναι π, έχουμε

$$|H(f)|^2 = \pi^2 \tag{50}$$

στις συχνότητες που διέρχονται. Άρα

$$|Y_{\pm 4}|^2 = \pi^2 |X_{\pm 4}|^2 = \pi^2 \frac{9}{64\pi^2} = \frac{9}{64} \tag{51}$$

και

$$|Y_{\pm 5}|^2 = \pi^2 |X_{\pm 5}|^2 = \pi^2 \frac{9}{100\pi^2} = \frac{9}{100} \tag{52}$$

Συνεπώς, η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου είναι

$$\Phi_y(f) = \frac{9}{64}\left[\delta(f-4000) + \delta(f+4000)\right] + \frac{9}{100}\left[\delta(f-5000) + \delta(f+5000)\right] \tag{53}$$

(δ΄) Η μέση ισχύς του σήματος εισόδου είναι

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\left[4T_1 + T_1\right] = \frac{5T_1}{T_0} = \frac{5}{3} \tag{54}$$

Η μέση ισχύς της εξόδου είναι το άθροισμα των συντελεστών των συναρτήσεων Δέλτα της $\Phi_y(f)$:

$$P_y = 2\frac{9}{64} + 2\frac{9}{100} \tag{55}$$

Άρα

$$P_y = \frac{18}{64} + \frac{18}{100} = \frac{9}{32} + \frac{9}{50} = \frac{450}{1600} + \frac{288}{1600} = \frac{738}{1600} = \frac{369}{800} \tag{56}$$

Επομένως

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{\frac{369}{800}}{\frac{5}{3}} = \frac{369}{800}\frac{3}{5} = \frac{1107}{4000} \tag{57}$$

Μονάδες εξέτασης: 105, Άριστα: 100