Μετασχηματισμός Fourier

Πραγματικά σήματα

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα.1α. Θα συμβολίζουμε με $x(t, T_0)$ το σήμα που περικλείεται μεταξύ του διαστήματος $|t| < T_0/2$:

$$x(t, T_0) = x(t)\ rect(t/T_0)$$

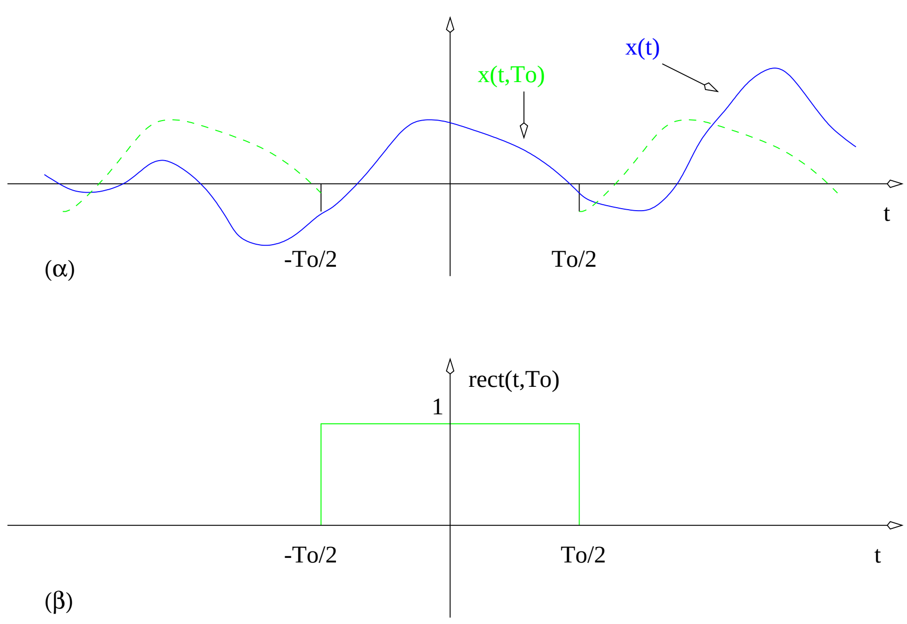
όπου το σήμα $rect(t/T_0)$ είναι ένας παλμός διάρκειας T_0 και πλάτους 1, όπως φαίνεται στο Σχήμα.1β. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει το σήμα $x(t, T_0)$ είναι περιορισμένης διάρκειας και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$x(t, T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \tag{1}$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t, T_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \tag{2}$$

Το αποτέλεσμα από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier θα είναι όπως ήδη έχουμε δεί ένα περιοδικό



Σχήμα 1: (α) Ενα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$, το σήμα $x(t, T_0)$ και το περιοδικό σήμα (πράσινη γραμμή) $x(t, kT_0)$ (β) παλμός πλάτους 1 και διάρκειας T_0.

σήμα το οποίο εκτός των ορίων του παλμού (παράθυρου) δεν θα έχει 'καμμία σχέση' (δηλ.

το σφάλμα προσέγγισης εκτός του παλμού θα είναι πολύ μεγάλο) με το αρχικό σήμα $x(t)$. Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.1α όπου το σήμα $x(t,T_0)$ αναπαράγεται σε πολλαπλάσια της διάρκειας, T_0, του παλμού. Το περιοδικό σήμα όπως υπολογίζεται από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier φαίνεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή.

Το ερώτημα είναι πως μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω διαδικασία σε όλο το σήμα $x(t)$.

Μπορούμε να πούμε ότι το αρχικό σήμα, $x(t)$, είναι ίσο με το $x(t,T_0)$ όταν $T_0 \to +\infty$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T_0\to+\infty} x(t,T_0) \\ &= \lim_{T_0\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \\ &= \lim_{T_0\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t,T_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \right\} e^{jk2\pi f_0 t} \end{aligned} \tag{3}$$

- Οταν $T_0 \to +\infty$ τότε $f_0 = \dfrac{1}{T_0} \to df$ δηλαδή σε μία μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f.

- Τώρα θα πρέπει να δούμε τι θα κάνουμε με το διπλό όριο:

$$\lim_{\substack{T_0 \to +\infty \\ k \to +\infty}} \left\{ k\,\frac{1}{T_0} \right\} \tag{4}$$

Αν θεωρήσουμε T_0 σταθερό ενώ το k παίρνει (ακέραιες) τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$ τότε το $k\,T_0$ θα έχει πάρει άπειρες τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$. Οταν το T_0 πάρει μία άλλη σταθερή τιμή τότε με τον ίδιο τρόπο (έχοντας k από $-\infty$ έως $+\infty$) θα πάρουμε ένα νέο σύνολο άπειρων τιμών από $-\infty$ έως $+\infty$ για το γινόμενο $k\,T_0$. Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε πραγματική θετική τιμή του T_0 τότε στο τέλος θα έχουμε όλες τις τιμές που μπορεί να λάβει ένας πραγματικός αριθμός από $-\infty$ έως $+\infty$. Δηλαδή θα έχουμε μια συνεχή μεταβλητή ή διαφορετικά ότι το όριο στην εξίσωση (4) θα τείνει στη συνεχή μεταβλητή f. Τότε όμως το άθροισμα του k από $-\infty$ έως $+\infty$ θα γίνει ολοκλήρωμα από $-\infty$ έως $+\infty$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση (3) γράφεται:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right\}}_{X(f)} e^{j2\pi f t} \tag{5}$$

δηλαδή

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \tag{6}$$

όπου

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{7}$$

Η εξίσωση (6) αναφέρεται σαν σύνθεση Fourier ή Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier ενώ η εξίσωση (7) αναφέρεται σαν ανάλυση Fourier ή απλά Μετασχηματισμός Fourier. Από την εξίσωση (6) προκύπτει ότι έχουμε μια ανάπτυξη του σήματος $x(t)$ σε άπειρες συχνότητες ή διαφορετικά σε άπειρες μιγαδικές ημιτονοειδές συνιστώσες με πλάτος $|X(f)|df$.

Για να δηλώσουμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μετασχηματίζεται από το χώρο του χρόνου, t, στο χώρο της συχνότητας f, σε $X(f)$ μέσω του Μετασχηματισμού Fourier και αντίστροφα από τη συχνότητα στο χρόνο μέσω του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier γράφουμε:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \tag{8}$$

Επίσης ορισμένες φορές θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$F\{x(t)\}$$

για να δηλώσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)$.

Από την εξίσωση (6) προκύπτει επίσης ότι:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f) \tag{9}$$

δηλαδή η ανάκλαση του σήματος ως προς τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισοδυναμεί με ανάκλαση του φάσματος του σήματος.

Σημειώστε ότι σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείτε η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ αντί της γραμμικής f. Τότε οι παραπάνω σχέσεις διαφοροποιούνται ως εξής:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{10}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{11}$$

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν εύκολα (το μπαλάκι σε εσάς :)) όταν αντικαταστήσουμε το f στις Εξ.(6) και (7) με $\omega/2\pi$[1]

[1]επειδή ορισμένοι θα το σκεφτούν ... το $X(f)$ και βέβαια γράφεται $X(\omega/2\pi)$ ΟΜΩΣ ως γνωστόννν το 2π είναι σταθερό νούμερο άρα η συνάρτησή μας γράφεται απλά $X(\omega)$ για να μας δείξει ότι εξαρτάται μόνο (ουσιαστικά) από το ω.

Ο Μετασχηματισμός Fourier (Εξ.(7)) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt \\ &= R(f) + jI(f) \end{aligned} \tag{12}$$

όπου είναι φανερό ότι ο Μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά ένα μιγαδικό σήμα με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος να υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt \tag{13}$$

$$I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt \tag{14}$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(-2\pi f t)dt = R(f) \tag{15}$$

δηλαδή το σήμα (συχνότητας) $R(f)$ είναι άρτιο σήμα, και

$$I(-f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(-2\pi f t)dt = -I(f) \tag{16}$$

δηλαδή το σήμα (συχνότητας) $I(f)$ είναι περιττό σήμα.

Αφού γενικά ο Μετασχηματισμός Fourier είναι ένα μιγαδικό σήμα θα έχει πλάτος (φάσμα πλάτους)

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \tag{17}$$

και φάση (φάσμα φάσης)

$$\theta_x(f) = \arctan\frac{I(f)}{R(f)} \tag{18}$$

Αν το σήμα μετριέται σε $Volts$ (π.χ. είναι μεταβαλλόμενη τάση) τότε το $|X(f)|$ είναι σε $Volts/Hz$ και η $\theta_x(f)$ σε radians.

Γνωρίζοντας τώρα τις παραπάνω ιδιότητες του πραγματικού και φανταστικού μέρους του Μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να δούμε μια πολύ χρήσιμη σχέση μεταξύ των αρνητικών και θετικών συχνοτήτων του φάσματος (υπενθύμιση: πάντα μιλάμε για πραγματικά σήματα). Από τις εξισώσεις (12), (15) και (16) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} X(-f) &= R(-f) + j\,I(-f) \\ &= R(f) - j\,I(f) \\ X(-f) &= X^*(f) \end{aligned} \tag{19}$$

Δηλαδή, για πραγματικά σήματα το φάσμα στις αρνητικές συχνότητες είναι ίσο με το συζυγές του φάσματος στις θετικές συχνότητες. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για πραγματικά σήματα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (7) από $-\infty$ έως $+\infty$. Αρκεί να υπολογιστεί το φάσμα μόνο για τις θετικές συχνότητες (από 0 έως $+\infty$) και μετά το φάσμα στις αρνητικές συχνότητες θα είναι ίσο με το συζυγές αυτού που υπολογίσαμε.

- Αν ένα σήμα είναι άρτιο:

  $$x(-t) = x(t) \quad \forall t$$

  τό φανταστικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

  θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος (το $\sin(2\pi f t)$ είναι περιττό σήμα ως πρός t (ή f)) οπότε θα μηδενίζεται. Δηλαδή $I(f) = 0$.

  Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού άρτιου σήματος είναι πραγματικό σήμα και ισούται με:

  $$\begin{aligned} X(f) &= R(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \end{aligned}$$

- Αν ένα σήμα είναι περιττό:

  $$x(-t) = -x(t) \quad \forall t$$

  τό πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt$$

  θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος (το $\cos(2\pi f t)$ είναι άρτιο σήμα ως πρός t (ή f)) οπότε θα μηδενίζεται. Δηλαδή $R(f) = 0$.

  Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού περιττού σήματος είναι φανταστικό σήμα και ισούται με:

  $$\begin{aligned} X(f) &= j\ I(f) \\ &= -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt \\ &= -2j \int_{0}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του σήματος:

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό άρα ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος θα έχει μόνο μιγαδικό μέρος:

$$X(f) = I(f) = -2j \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{t} dt$$

Ομως ισχύει (ωραίο μου τυπολόγιο!!!):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a\,x)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$$

Από το παραπάνω, ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ είναι:

$$X(f) = \begin{cases} -j\,\pi & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j\,\pi & f < 0 \end{cases}$$

ή σε μια πιο compact μορφή:

$$X(f) = -j\pi sgn(f)$$

όπου το σήμα $sgn(\cdot)$ λέγεται σήμα προσήμου και φαίνεται στο Σχήμα.2. Το σήμα $sgn(t)$ περιγράφεται μαθηματικά ως:

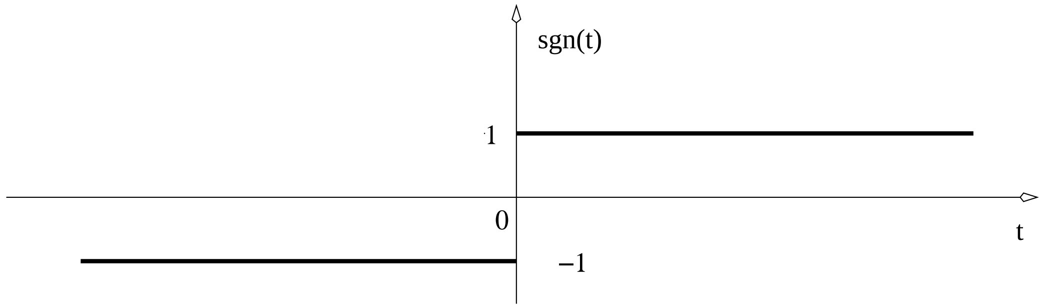
$$\begin{aligned} sgn(t) &= \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \\ &= \frac{t}{|t|} \ \text{για } t \neq 0 \end{aligned}$$

Η τιμή της συνάρτησης προσήμου για $t = 0$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ ± 1. Προς χάρη όμως της συμμετρίας, εμείς θα την θεωρούμε (εκτός και μας βολεύει διαφορετικά :)) ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$sgn(0) = 0$$

Γνωρίζουμε ότι ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου, $x_\alpha(t)$, και ενός περιττού μέρους, $x_\pi(t)$:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t) \tag{20}$$



Σχήμα 2: Το σήμα προσήμου.

όπου

$$
\begin{aligned}
x_{\alpha}(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\
x_{\pi}(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Από τις εξισώσεις (9), (12), (15), (16) και τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει ότι:

$$
\begin{gathered}
x_{\alpha}(t) \leftrightarrow R(f) \\
x_{\pi}(t) \leftrightarrow j\, I(f)
\end{gathered}
$$

Δηλαδή το πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος ενώ το φανταστικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με το περιττό μέρος του σήματος.

Μιγαδικά σήματα

Εστω το μιγαδικό σήμα:

$$
x(t) = x_1(t) + j\, x_2(t)
$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier, $X(f)$, του σήματος ορίζεται όμοια όπως και στα πραγματικά σήματα:

$$
X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{22}
$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τη μιγαδική μορφή του $x(t)$ και αναπτύξουμε το $e^{-j2\pi f t}$ σε συνημίτονο και ημίτονο, ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ γράφεται ως:

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t) + j\, x_2(t))\, (\cos(2\pi f t) - j\, \sin(2\pi f t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)\, \cos(2\pi f t) + x_2(t) \sin(2\pi f t)]\, dt + \\
&\quad + j \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)\, \cos(2\pi f t) - x_1(t) \sin(2\pi f t)]\, dt
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Επομένως για ένα μιγαδικό σήμα το πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier δίνεται από την εξίσωση:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)\,\cos(2\pi f t) + x_2(t)\sin(2\pi f t)]\,dt$$

ενώ το φανταστικό μέρος από την εξίσωση:

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)\,\cos(2\pi f t) - x_1(t)\sin(2\pi f t)]\,dt$$

Στα παρακάτω (για να μην πληκτρολογώ πολλά ενώ ταυτόχρονα έτσι πετυχαίνω να σας δυσκολεύω τη ζωή με συμβολισμούς - όπως κάθε δάσκαλος που σέβεται τον εαυτό του) θα χρησιμοποιήσουμε το ακρώνυμο Μ.Φ. για τον Μετασχηματισμό Fourier και το ακρώνυμο Α.Μ.Φ. για τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier. Προσοχή όχι ΑΦΜ αλλά ΑΜΦ !!!

Ναι δεν το είπαμε αλλά δεν είναι και μυστικό: ο Μ.Φ. δεν ορίζεται για όλα τα σήματα. Μια ουσιαστική ικανή συνθήκη (όχι όμως και αναγκαία) για να υπάρχει ο Μ.Φ. ενός σήματος είναι το σήμα να είναι κατά απόλυτη τιμή ολοκληρώσιμο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$$

Ολα τα σήματα που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι περιορισμένης διάρκειας και επομένως ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο. Παρόλα αυτά, όταν αναλύουμε κάποια σήματα στο χαρτί και μελετάμε κάποιο φαινόμενο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε και σήματα που δεν πληρούν το παραπάνω κριτήριο. Για παράδειγμα, το πιο απλό σήμα αυτής της κατηγορίας που μπορούμε να φανταστούμε είναι μια σταθερά

$$x(t) = 5 \qquad \forall t$$

Ομως, όπως και οι μιγαδικοί αριθμοί έτσι και αυτά τα σήματα μπορεί να μην προκύπτουν στην πράξη αλλά μας βοηθούν στην ανάλυση και περιγραφή διαφόρων συστημάτων, σημάτων και φαινομένων. Ο Μ.Φ. αυτών των σημάτων δεν ορίζεται παρά όταν επεκτύνουμε τον Μ.Φ. σε μία κατηγορία συναρτήσεων που ονομάζονται κατανομές. Μια τέτοια επέκταση είναι πραγματικά εκτός ορίων του μαθήματος. Ετσι θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης όποτε χρειαστεί.

Ετσι, πριν προχωρήσουμε την ανάπτυξη του Μετασχηματισμού Fourier θα ήταν καλό να διαχωρήσουμε τα σήματα ανάλογα με το ενεργειακό τους περιεχόμενο.

Σήματα ενέργειας και ισχύος

Από το ηλεκτρισμό γνωρίζουμε ότι η ισχύ P (σε Watts) που καταναλώνεται σε μία αντίσταση R όταν στα άκρα της αντίστασης υπάρχει τάση U δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Αν η τάση U μεταβάλλεται με το χρόνο (είναι δηλ. ένα σήμα) τότε και η ισχύ θα μετβάλλεται σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R}$$

Η ενέργεια (σε Joules) που καταναλώνεται από τη χρονική στιγμή t_1 στη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} U^2(t)\, dt$$

Η μέση ισχύ που καταναλώνεται στο ίδιο διάστημα είναι:

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt = \frac{1}{R}\ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U^2(t)\, dt$$

Αν θεωρήσουμε την αντίσταση να είναι 1Ω τότε τα παραπάνω μεταφέρονται στη θεωρία σήματος, ορίζοντας:

Ενέργεια ενός σήματος στο διάστημα $[t_1\ t_2]$

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

και Μέση Ισχύ στο ίδιο διάστημα:

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Αν θεωρήσουμε το σήμα $x(t)$ να έχει άπειρη διάρκεια, και θεωρήσουμε $t_1 \to -\infty$ και $t_2 \to +\infty$, τότε μιλάμε για:

Ολική Ενέργεια του σήματος:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

και Συνολική Μέση Ισχύ

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt$$

Η συνολική μέση ισχύ ορίζεται σαν μια πρωτεύουσα τιμή Cauchy[2] του ολοκληρώματος από $-\infty$ έως $+\infty$.

Για ένα περιοδικό σήμα η συνολική μέση ισχύ ισούται με την μέση ισχύ του σήματος σε μία περίοδο T_0:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x^2(t)dt$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι μιγαδικό τα παραπάνω ισχύουν αρκεί να κάνουμε την αλλαγή

$$x^2(t) \rightarrow |x(t)|^2$$

Ορισμός: Ονομάζουμε σήματα ενέργειας τα σήματα τα οποία έχουν περιορισμένη ενέργεια:

$$W_x < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

δηλαδή που η ενέργειά τους δεν είναι άπειρη. Τότε όμως η ισχύ αυτών των σημάτων θα είναι μηδέν (σύμφωνα με τον ορισμό της ισχύος).

Ορισμός: Ονομάζουμε σήματα ισχύος τα σήματα τα οποία έχουν περιορισμένη ισχύ:

$$0 < P_x = \lim_{T\rightarrow+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Για να είναι περιορισμένο (φραγμένο) το παραπάνω όριο θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \infty$$

δηλαδή το σήμα να έχει άπειρη ενέργεια.

Επομένως:

Ενα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ ενώ ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια.

[2]Η πρωτεύουσα τιμή Cauchy ενός ολοκληρώματος από $-\infty$ έως $+\infty$ ορίζεται ως το όριο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \lim_{A\rightarrow+\infty}\int_{-A}^{A} x(t)dt$$

Μετασχηματισμός Fourier για σήματα ενέργειας

Για όλα τα σήματα ενέργειας, ο Μ.Φ. υπάρχει:

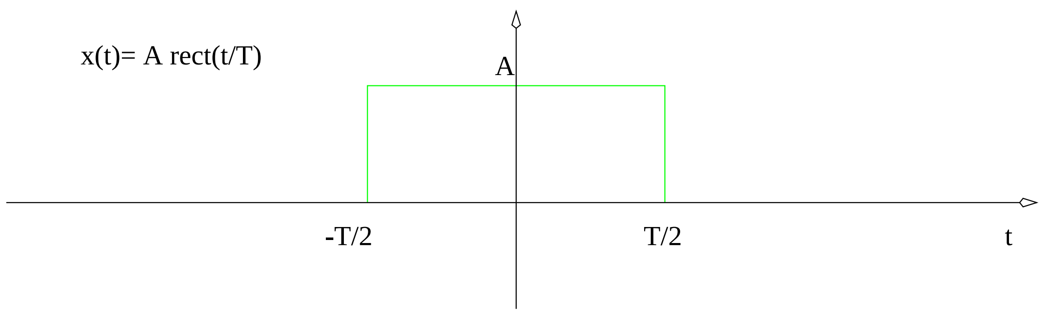
$$X(f) = F\left\{x(t)\right\} = |X(f)|\ e^{j\theta_x(f)}$$

όπου το $|X(f)|$ είναι το φάσμα πλάτους και $\theta_x(f)$ είναι το φάσμα φάσης. Αν το σήμα μετριέται σε Volts τότε το φάσμα πλάτους είναι σε Volts/Hz και το φάσμα φάσης σε radian.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος ενέργειας που φαίνεται στο Σχήμα.1:

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T})$$

Το σήμα $x(t)$ έχει διάρκεια T. Εξω από το διάστημα $[-T/2\ T/2]$ το σήμα είναι μηδενικό. Ο



Σχήμα 3: Το ορθογώνιο σήμα πλάτους A και διάρκειας T: $x(t) = Arect(t/T)$

Μ.Φ. του σήματος μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση (7). Ομως καλό είναι να κάνουμε λίγο χρήση των ιδιοτήτων των σημάτων και των ολοκληρωμάτων. Μπορεί σε αυτό το παράδειγμα η λύση να είναι απλή με απευθείας υπολογισμό του Μ.Φ. όμως σε άλλα παραδείγματα η χρήση αυτών των ιδιοτήτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το σήμα είναι άρτιο επομένως ο Μ.Φ. του σήματος θα έχει μόνο πραγματικό μέρος (Εξίσωση(13):

$$\begin{aligned}
X(f) = R(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt \\
&= \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos(2\pi f t)dt \\
&= 2A\int_{0}^{+T/2} \cos(2\pi f t)dt \\
&= 2A\ \ \frac{1}{2\pi f}\sin(2\pi f t)|_0^{T/2} \\
&= \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T) \\
&= AT\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \\
&= AT sinc(fT)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $sinc(x)$ ορίζεται ως:

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{24}$$

όπου για $x = 0$ ορίζεται να είναι:

$$sinc(0) = 1$$

Από τα παραπάνω μπορούμε λοιπόν να γράψουμε, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που μάθαμε (μην πάνε χαμένοι), ότι:

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T}) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) = ATsinc(Tf)$$

Η συνάρτηση $X(f) = ATsinc(Tf)$ είναι άρτια και έχει μηδενισμούς όπου μηδενίζεται η συνάρτηση $\sin(\pi fT)$, δηλαδή στις συχνότητες, f:

$$\pi fT = \pm m\pi \Rightarrow f = \pm m\frac{1}{T}$$

όπου m είναι ακέραιος.
Επίσης θα είναι φθίνουσα καθώς θα αυξάνει κατά απόλυτη τιμή το f. Η συνάρτηση $X(f) = ATsinc(Tf)$ φαίνεται στο Σχήμα.5α

Φάσμα Πλάτους:

$$|X(f)| = AT|sinc(fT)|$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα.5β

Φάσμα Φάσης:

$$\theta_x(f) = \arctan(\frac{I(f)}{R(f)})$$

Ομως το σήμα είναι άρτιο και επομένως

$$I(f) = 0 \ \ \forall f$$

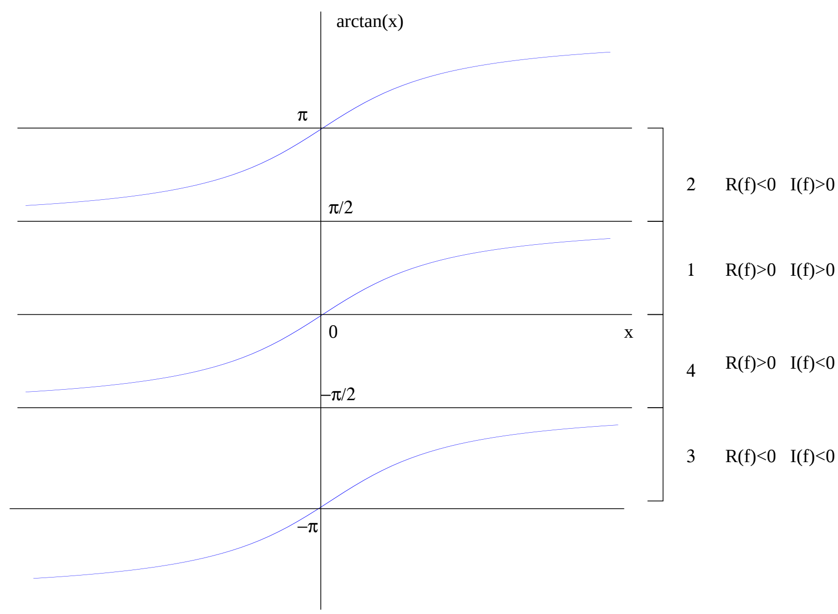
άρα

$$\theta_x(f) = \arctan(0) = k\pi$$

όπου κ ακέραιος. Για $k = 0$ η τιμή της φάσης λέγεται πρωτεύουσα τιμή ενώ για $|k| > |1|$ ονομάζονται δευτερεύουσες τιμές. Επειδή η φάση ορίζεται μεταξύ του $-\pi$ και π το k παίρνει τις τιμές:

-1, 0 και 1.

Οι πρωτεύουσες τιμές της φάσης (ορίζεται από $-\pi/2$ έως $\pi/2$) αφορούν το πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Δηλαδή εκεί όπου το πραγματικό μέρος είναι θετικό. Επομένως όταν το πραγματικό μέρος είναι θετικό, η φάση θα ισούται με την πρωτεύουσα τιμή της συνάρτησης arctan. Οταν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό τότε η φάση ΠΡΕΠΕΙ να υπολογιστεί απο τις δευτερεύουσες τιμές της συνάρτησης και όχι απο την πρωτεύουσα τιμή. Τα παραπάνω εξηγούνται σχηματικά στο Σχήμα.4 όπου το πεδίο τιμών της συνάρτησης arctan χωρίζεται σε τέσσερα μέρη (όσα και τα τερταρτημόρια στο μιγαδικό επίπεδο) ανάλογα με το πρόσημο του πραγματικού και φανταστικού μέρους. Στην άσκηση μας το φανταστικό μέρος είναι μηδέν



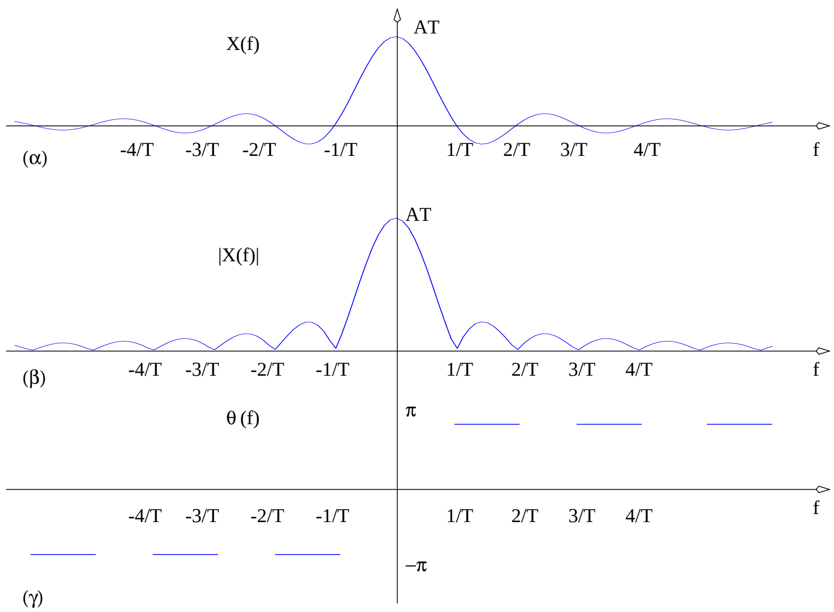
Σχήμα 4: Πρωτεύουσες και δευτερεύουσες τιμές της arctan.

(αναμενόμενο μιας και το σήμα μας είναι άρτιο). Τότε, σύμφωνα με αυτά που είπαμε, για τις συχνότητες εκείνες που το πραγματικό μέρος είναι θετικό η φάση θα είναι ίση με την πρωτεύουσα τιμή της $\arctan(0)$ δηλαδή μηδέν. Οταν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό τότε έχουμε δύο επιλογές: $+\pi$, $-\pi$. Επειδή έχουμε συμφωνήσει να θεωρούμε θετικές συχνότητες αυτές που περιστρέφουν τη φάση κατά τη μαθηματική φορά (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) θα αντιστοιχήσουμε το $+\pi$ στις θετικές συχνότητες. Αντίστοιχα θα αντιστοιχήσουμε το $-\pi$ στις αρνητικές συχνότητες. Συνοπτικά (ουφφφ)

$$\left.\begin{array}{c} R(f) > 0 \\ I(f) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_x(f) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} R(f) < 0 \\ I(f) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_x(f) = \pm\pi \begin{cases} +\pi & f > 0 \\ -\pi & f < 0 \end{cases}$$

Το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα.5γ.



Σχήμα 5: (α) Ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου σήματος του Σχήματος3. (β) Το φάσμα πλάτους, $|X(f)|$. (γ) Το φάσμα φάσης $\theta_x(f)$

Ας θεωρήσουμε τώρα το ορθογώνιο σήμα στη συχνότητα (και όχι στο χρόνο όπως προηγουμένως):

$$X(f) = A\,rect(\frac{f}{T})$$

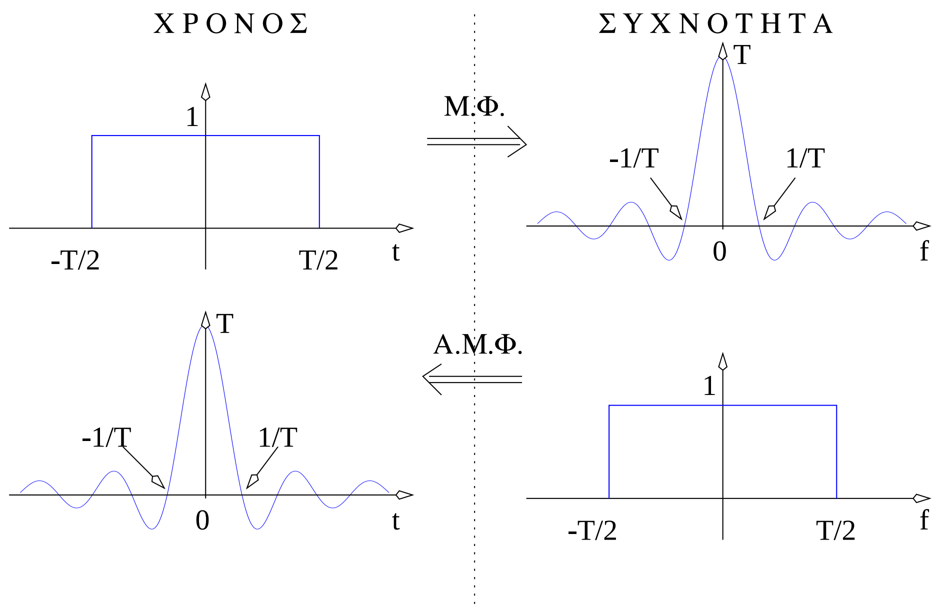
και ας υπολογίσουμε τον Α.Μ.Φ. του $X(f)$ (Εξίσωση 6):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cos(2\pi f t)df \\ &= 2A\int_{0}^{+T/2} \cos(2\pi f t)df \\ &= \frac{A}{\pi t}\sin(\pi t T) \\ &= AT sinc(tT) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχει μια συμμετρία (παραλήπουμε τα πλάτη για απλοποίηση):

$$\begin{aligned} rect(\frac{t}{T}) &\leftrightarrow Tsinc(fT) \\ Tsinc(tT) &\leftrightarrow rect(\frac{f}{T}) \end{aligned}$$

Η συμμετρία αυτή φαίνεται και στο Σχήμα.6



Σχήμα 6: Συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier

Η συμμετρία αυτή δεν είναι τυχαία. Ισχύει για όλα τα σήματα και αποτελεί μια βασική ιδιότητα του Μ.Φ. Πράγματι:
Αν στον ορισμό του Α.Μ.Φ. (Εξίσωση 6) θέσουμε όπου t το $-t$ έχουμε:

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi ft}df$$

Αν στην παραπάνω σχέση ανταλλάξουμε μεταξύ τους τις μεταβλητές t και f, δηλαδή $t \leftrightarrow f$, τότε:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι αν $X(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ ΤΟΤΕ ο μετασχηματισμός Fourier του $X(t)$ θα είναι ίσος με $x(-f)$. Πράγματι, στην αρχή δείξαμε ότι:

$$x(t) = rect(\frac{t}{T}) \leftrightarrow X(f) = Tsinc(fT)$$

και λίγο παραπάνω ότι

$$X(t) = Tsinc(tT) \leftrightarrow x(-f) = rect(\frac{-f}{T}) = rect(\frac{f}{T})$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Εστω ότι ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει Μ.Φ. $X(f)$:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Τότε:

1. Συμμετρία:

   $$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

   Αυτή η ιδιότητα έχει δειχθεί παραπάνω και είναι πολύ σημαντική.

   Παράδειγμα:

   Αν $x(t) = rect(t/T)$ τότε (όπως έχουμε δείξει):

   $$X(f) = \frac{sin(\pi f T)}{\pi f}$$

   και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα μπορούμε να πούμε (μετά βεβαιότητος) ότι ο Μ.Φ. του

   $$X(t) = \frac{sin(\pi t T)}{\pi t}$$

   είναι

   $$x(-f) = rect(-f/T) = rect(f/T)$$

2. $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$ και $x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$

   Απόδειξη:

   $$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \;\Rightarrow \\ X^*(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt \;\Rightarrow \\ X^*(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

   Αρα:

   $$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

   Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι:

   $$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$$

Συνέπεια της ιδιότητας:

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό τότε $x(t) = x^*(t)$ και επομένως $X(f) = X^*(-f)$. Δηλαδή όταν το σήμα είναι πραγματικό το φασματικό περιεχόμενο του σήματος στις θετικές συχνότητες ισούται με το συζυγές φασματικό περιεχόμενο των αρνητικών συχνοτήτων. Το είχαμε πεί και παραπάνω αυτό σαν σχόλιο στην Εξίσωση (19).

3. $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$ για $a \neq 0$

Απόδειξη:

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος $x(at)$:

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt$$

Θέτουμε $t' = at$.

Για $a > 0$:

$$\begin{aligned} F\{x(at)\} &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'} \\ &= \frac{1}{a}X(\frac{f}{a}) \end{aligned}$$

Για $a < 0$:

$$\begin{aligned} F\{x(at)\} &= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'} \\ &= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'} \\ &= -\frac{1}{a}X(\frac{f}{a}) \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε περίπτωση:

$$F\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$$

Παράδειγμα: Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα

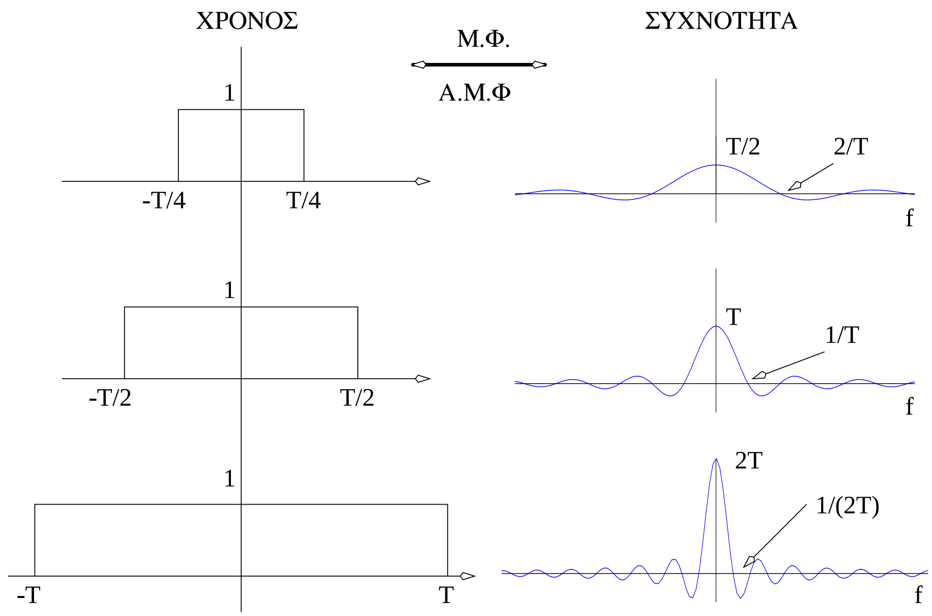
$$x(t) = rect(\frac{t}{T})$$

το οποίο όπως έχουμε δεί έχει Μ.Φ.

$$X(f) = Tsinc(fT)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα θα ισχύει

$$\begin{aligned} x(2t) &= rect(\frac{2t}{T}) &= rect(\frac{t}{T/2}) &\leftrightarrow \frac{1}{2}X(\frac{f}{2}) &= \frac{1}{2}Tsinc(\frac{fT}{2}) \\ x(\frac{t}{2}) &= rect(\frac{t/2}{T}) &= rect(\frac{t}{2T}) &\leftrightarrow 2X(2f) &= 2Tsinc(2fT) \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Διαστολή στο χρόνο σημαίνει συστολή στη συχνότητα και αντιστρόφως.

Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα.7

Τι σημαίνουν όλα αυτά; Οταν ο άξονας του χρόνου διαστέλεται ($a > 1$) τότε ο άξονας των συχνοτήτων συστέλεται και αντίστροφα όταν $0 < a < 1$. Το παραπάνω διατυπώνεται πιο όμορφα ως εξής: Το σήμα και ο μετασχηματισμός αυτού κατά Fourier δεν μπορούν να είναι και τα δύο μικρής έκτασης.

Αλλο παράδειγμα:

Αν $a = -1$ τότε σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα:

$$F\{x(-t)\} = X(-f)$$

Δηλαδή: $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$

4. Αν επίσης $y(t) \leftrightarrow Y(f)$, τότε

$$C_1 x(t) \pm C_2 y(t) \leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f)$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές.

5. $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
F\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{t'})e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi ft^{'}}e^{-j2\pi ft_0}dt^{'} \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi ft^{'}}dt^{'} \\
&= e^{-j2\pi ft_0}X(f)
\end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι

$$F\{x(t+t_0)\} = e^{+j2\pi ft_0}X(f)$$

6. $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$

   Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Α.Μ.Φ. (Εξίσωση (6)) θετώντας $t = 0$. Η παραπάνω σχέση λέει ότι το άθροισμα του φάσματος ισούται με την τιμή του σήματος στη χρονική στιγμή $t = 0$.

7. $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$

   Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Μ.Φ. (Εξίσωση (7)) θετώντας $f = 0$. Η παραπάνω σχέση λέει ότι το άθροισμα του σήματος ισούται με την DC συνιστώσα του φάσματος.

8. $x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f \mp f_0)$

   <u>Απόδειξη:</u>

$$\begin{aligned}
F\{x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f\pm f_0)t}dt \\
&= X(f \mp f_0)
\end{aligned}$$

   και για οπτική απεικόνιση (για τους οπτικούς τύπους):

$$\begin{aligned}
x(t)e^{+j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f - f_0) \\
x(t)e^{-j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f + f_0)
\end{aligned}$$

9. Παράγωγος $\frac{d}{dt}\{x(t)\} \leftrightarrow j2\pi fX(f)$

   <u>Απόδειξη:</u>

$$\begin{aligned} F\{\frac{d\,x(t)}{dt}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= x(t) e^{-j2\pi f t} \mid_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{X(f)} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες παραγωντικής ολοκλήρωσης. Αν το $x(t)$ έχει Μ.Φ. αυτό σημαίνει ότι καθώς $t \to \pm\infty$, το σήμα θα φθίνει προς το μηδέν (αν θυμάστε έχουμε πεί ότι το σήμα $x(t)$ είναι σήμα περιορισμένης ενέργειας). Επομένως

$$x(t) \to 0 \quad \text{όταν} \quad t \to \pm\infty$$

Δηλαδή

$$x(t) e^{-j2\pi f t} \mid_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

και άρα

$$F\{\frac{d\,x(t)}{dt}\} = j2\pi f X(f)$$

Γενικά ισχύει:

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

και λόγω της ιδιότητας της συμμετρίας του Μ.Φ.:

$$(-j2\pi t)^n x(t) \leftrightarrow X^{(n)}(f)$$

όπου $\{^{(n)}\}$ συμβολίζει τη n-οστή παράγωγο ενώ $\{^n\}$ συμβολίζει τη n-οστή δύναμη.

Παράδειγμα εφαρμογής ιδιοτήτων Μ.Φ.

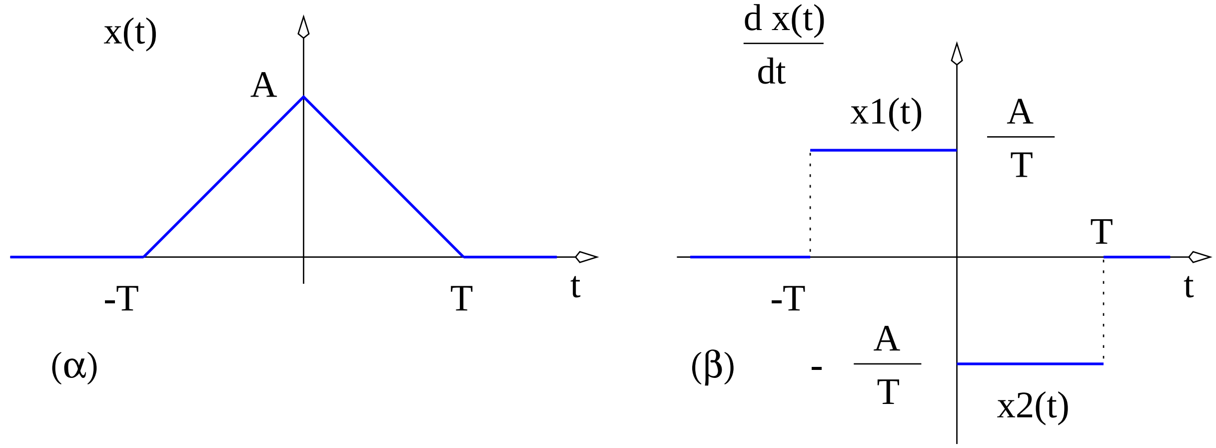
Να υπολογίσετε τον Μ.Φ. του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα.8α ενώ η παράγωγος του σήματος (ως προς t) δίδεται στο Σχήμα.8β.

Σε αυτό το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &\leftrightarrow (j2\pi f)X(f) \\ x(t \pm t_0) &\leftrightarrow X(f)e^{\pm j2\pi f t_0} \\ C_1 x(t) \pm C_2 y(t) &\leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f) \end{aligned}$$



Σχήμα 8: (α). Τριγωνικό σήμα διάρκειας 2Τ και (β) Η παράγωγος του σήματος ως πρός t.

Οπως παρατηρούμε και από το Σχήμα 8β, η παράγωγος του σήματος αποτελείται από δύο σήματα ορθογώνια το ένα μετατοπισμένο αριστερά από την αρχή των αξόνων κατά $-T/2$ ($x_1(t)$) και το άλλο δεξιά από την αρχή των αξόνων κατά $T/2$ ($x_2(t)$).

Εδώ προτιμήσαμε να δουλέψουμε με την παράγωγο του σήματος $x^{(1)}(t)$ αντί με το σήμα $x(t)$. Αυτό γιατί ξέρουμε τον Μ.Φ. του ορθογώνιου σήματος (του σήματος παραθύρου) και επίσης ξέρουμε από τις ιδιότητες του Μ.Φ. τη σχέση παραγώγου και Μ.Φ.

$$F\{\frac{d\,x(t)}{dt}\} = j2\pi f X(f) = F\{x_1(t) + x_2(t)\} = F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\} \tag{25}$$

όπου

$$x_1(t + T/2) = \frac{A}{T} rect(\frac{t - (-T/2)}{T}) = \frac{A}{T} rect(\frac{t + T/2}{T})$$

και

$$x_2(t - T/2) = -\,\frac{A}{T} rect(\frac{t - T/2}{T})$$

Επομένως

$$\begin{aligned} F\{x_1(t + T/2)\} &= \frac{A}{T} T\, sinc(fT) e^{+j2\pi f T/2} \\ F\{x_2(t - T/2)\} &= -\,\frac{A}{T} T\, sinc(fT) e^{-j2\pi f T/2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην Εξίσωση (25):

$$\begin{aligned} j2\pi f X(f) &= A sinc(fT)[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] \\ X(f) &= A sinc(fT) \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \\ X(f) &= A\,T\, sinc^2(fT) \end{aligned}$$

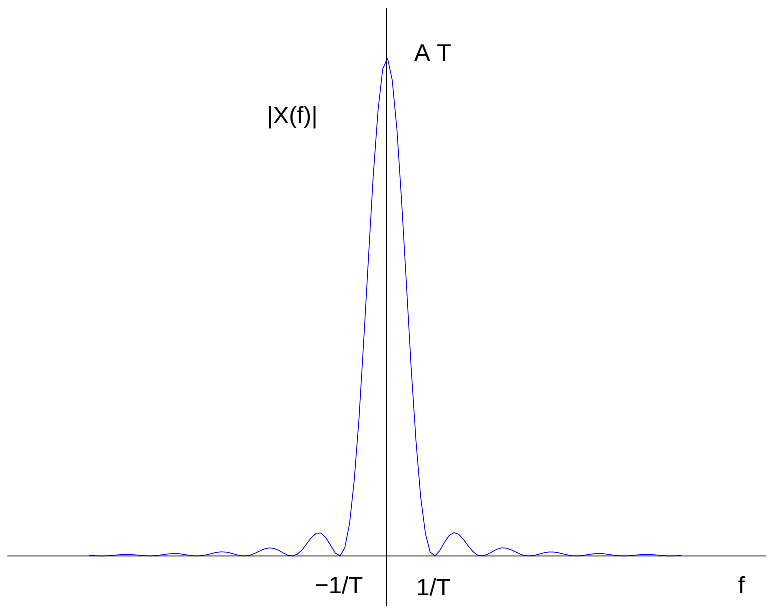
Παρατηρούμε ότι ο Μ.Φ. του τριγωνικού σήματος είναι πραγματικό σήμα και θετικό για όλες τις τιμές της f. Ετσι, το φάσμα φάσης θα είναι μηδέν $\forall f$

$$R(f) > 0 \ \text{ και } \ I(f) = 0 \ \ \forall f \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \ \ \forall f$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$|X(f)| = A\,T\,sinc^2(fT)$$

και φαίνεται στο Σχήμα.9



Σχήμα 9: Φάσμα πλάτους ενός τριγωνικού σήματος διάρκειας 2T.