

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 16^Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες



- Συσχετίσεις (review...)
- Περιοδικά Σήματα

REMINDER

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)y(t + \tau)dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Σήματα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t + \tau)dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t + \tau)dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

• Φασματικές Πυκνότητες

- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων

$$\phi(\tau) \leftrightarrow \Phi(f)$$

- Θα δούμε ότι οι φασματικές πυκνότητες συνιστούν μια περιγραφή της **κατανομής** της ενέργειας ή της ισχύος ενός σήματος (την από κοινού κατανομή της, αν έχουμε δυο σήματα) στο χώρο της συχνότητας

- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι **φασματικές πυκνότητες σχετίζονται** με τους **μετασχηματισμούς Fourier** των σημάτων που εμπλέκονται στις συσχετίσεις τους
 - ...δηλ. των μετασχ. Fourier των σημάτων $x(t), y(t)$

- Πριν ξεκινήσουμε με τα σήματα ενέργειας πρώτα, ας κάνουμε έναν «περίπατο» στην έννοια της ενέργειας!

• Φασματικές Πυκνότητες

• **Ερώτηση:** τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε την **ενέργεια** ενός σήματος $x(t)$?

• Ο Parseval μας έχει ήδη πει μια απάντηση

- «Ολοκληρώστε τη συνάρτηση $|X(f)|^2 = F\{x(t)\}$ ως προς f . Η τιμή που θα πάρετε αποτελεί την ενέργεια του σήματος»

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

• Άρα η συνάρτηση $G(f) = |X(f)|^2$ παίζει μεγάλο ρόλο στην υπόθεση «ενέργεια»!

- Η συνάρτηση αυτή μας πληροφορεί για το πως μεταβάλλεται η ποσότητα $|X(f)|^2$ ως προς τις διάφορες συχνότητες
- Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αν το παραπάνω ολοκλήρωμα μας δίνει τη **συνολική** ενέργεια του σήματος, ένα ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει διαφορετικά άκρα ολοκλήρωσης θα μας δίνει μια **μερική** ενέργεια του σήματος
- ...ή εναλλακτικά, μας δίνει την ενέργεια σε μια συγκεκριμένη «μπάντα» συχνοτήτων που εμείς επιλέγουμε ως άκρα ολοκλήρωσης

$$E_{[f_1, f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$

• Άρα η συνάρτηση $G(f) = |X(f)|^2$ μας πληροφορεί για το πως **κατανέμεται** η **ενέργεια** του σήματος **στις διάφορες (θετικές και αρνητικές) συχνότητες!**

• Φασματικές Πυκνότητες

- Αν θελήσουμε να απεικονίσουμε γραφικά τη συνάρτηση αυτή, $G(f) = |X(f)|^2$, τι πρέπει να κάνουμε?
 - ...ώστε να έχουμε μια εικόνα της κατανομής της ενέργειας του σήματος $x(t)$ στο χώρο της συχνότητας
- Πρέπει να:
 1. Υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$
 2. Βρούμε το μέτρο του στο τετράγωνο, $|X(f)|^2 = X_R^2(f) + X_I^2(f)$
- Υπάρχει πιο εύκολος/εναλλακτικός τρόπος?
- Το φάσμα $G(f) = |X(f)|^2$ αντιστοιχεί σε κάποιο σήμα $g(t)$ στο χρόνο?
 - ...έτσι ώστε ο μετασχ. Fourier του σήματος αυτού να μας δώσει κατευθείαν αυτό που θέλουμε?
 - Αν ναι, τι σχέση έχει το σήμα $g(t)$ με το σήμα $x(t)$ το οποίο μελετάμε ενεργειακά στο χώρο της συχνότητας?
- Οι ερωτήσεις αυτές θα απαντηθούν στη συνέχεια 😊
 - ...τόσο για σήματα ενέργειας όσο και για σήματα ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Ας ξεκινήσουμε με τα σήματα ενέργειας
- Ορολογία:
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης **ενός** σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης **δύο** σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την **κατανομή** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας
 - Την κατανομή της ενέργειας του σήματος $x(t)$, ή
 - Την από κοινού κατανομή της ενέργειας των σημάτων $x(t), y(t)$

• Φασματικές Πυκνότητες

$$x(\tau + t_0) \leftrightarrow X(f)e^{j2\pi f t_0}$$

• Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

• Είναι

$$\begin{aligned} F\{\phi_x(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt \right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) (X(f) e^{j2\pi f t}) dt \\ &= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt = X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)^* = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2 \end{aligned}$$

• Άρα ο μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ισούται με $|X(f)|^2$

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

• Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος

• Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \quad x(t) \in \mathfrak{R}$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \quad \forall f$$

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier θα είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x = \phi_x(0)$$

- Επιβεβαιώνουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας

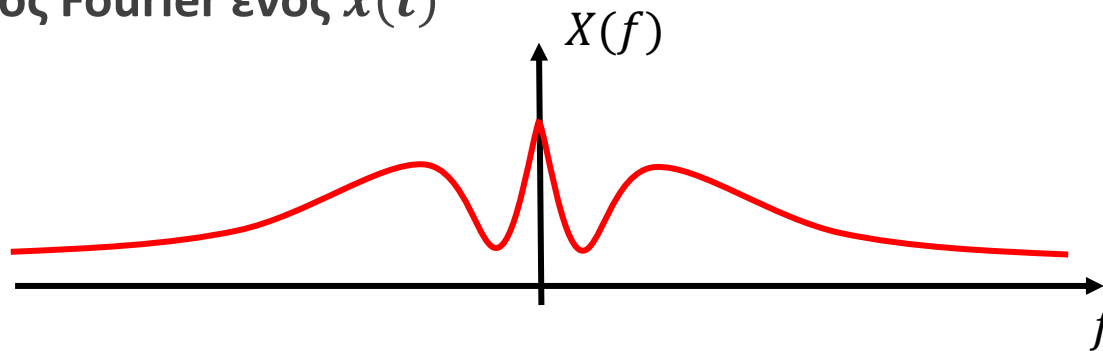
$$\begin{aligned} \phi_x(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+0)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \end{aligned}$$

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

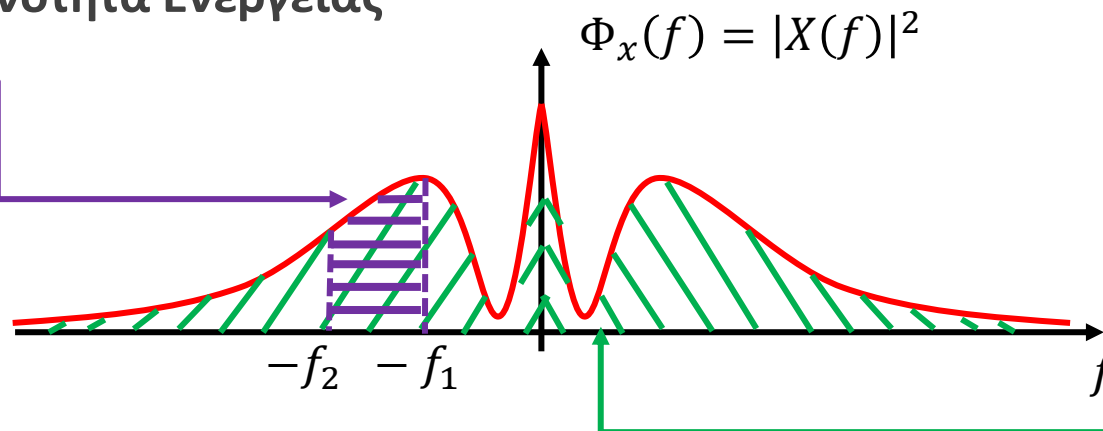
$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Συνάρτηση
κατανομής
ενέργειας
ως προς f

- Παράδειγμα:
Μετασχηματισμός Fourier ενός $x(t)$



- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας



Μερικό εμβαδό
=
Μερική ενέργεια!
(στο $(-f_2, -f_1)$)

Συνολικό
εμβαδόν
=
Συνολική
ενέργεια

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)$$

- Παρατηρήστε ότι αφού

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau), \quad x(t), y(t) \in \mathfrak{R}$$

ισχύει ότι

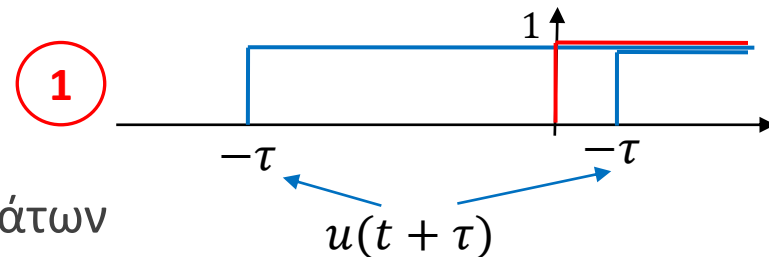
$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

- Φασματικές Πυκνότητες

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων



$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad y(t) = e^{-2at}u(t), \quad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

(α) Είναι

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t) \cdot e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-2at} \cdot e^{-2a\tau} u(t)u(t+\tau) dt \\ &= e^{-2a\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at} u(t)u(t+\tau) dt \quad (1) \end{aligned}$$

Είναι $u(t) = 1, \boxed{t > 0}$ ενώ $u(t+\tau) = 1, t+\tau > 0 \Rightarrow \boxed{t > -\tau}$

• Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:



$$\begin{aligned}
 \bullet \quad -\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0: \quad \varphi_{xy}(\tau) &= e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt \\
 &= e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} e^{-3at} \right) \Big|_{-\tau}^{+\infty} = e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-3at} - e^{3a\tau} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} (0 - e^{3a\tau}) = \frac{1}{3a} e^{a\tau}, \quad \tau < 0 = \frac{1}{3a} e^{a\tau} u(-\tau).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad -\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0: \quad \varphi_{xy}(\tau) &= e^{-2a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt \\
 &= e^{-2a\tau} \left(-\frac{1}{3a} e^{-3at} \right) \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-3at} - 1 \right) \\
 &= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau}, \quad \tau > 0 = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau} u(\tau).
 \end{aligned}$$

$$\text{Συνολικά,} \quad \varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a} \left(e^{-2a\tau} u(\tau) + e^{a\tau} u(-\tau) \right).$$

• Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

$$(B) \quad \varphi_{xy}(\tau) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$X^*(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

Είναι $x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$

$y(t) = e^{-2at}u(t), a > 0 \stackrel{F}{\longleftrightarrow} Y(f) = \frac{1}{2a + j2\pi f}$

Άρα $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \frac{1}{(a - j2\pi f)(2a + j2\pi f)} =$
 $= \frac{A}{a - j2\pi f} + \frac{B}{2a + j2\pi f}$, μπορούμε να βρούμε ότι $A = \frac{1}{3a} = B$

Οπότε $\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{2a + j2\pi f}$, κι από πίνακες

έχουμε $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a} (e^{a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau))$.

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Σύνοψη:
- Σήματα ενέργειας:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}$$



- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

$$\sum X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \sum X_k \delta(f - k f_0)$$

- Για τα **περιοδικά** σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του **μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων**

- Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση

- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t + \tau)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι (από πίνακες)

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

- Ας επιβεβαιώσουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ισχύς του σήματος στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Ας θυμηθούμε αρχικά τον **Parseval!**

$$\phi_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t+0)dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t)dt = P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- Άραγε, αν ολοκληρώσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, θα πάρουμε τη συνολική ισχύ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \right) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) df$$

- Επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) df = 1$$

τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x$$

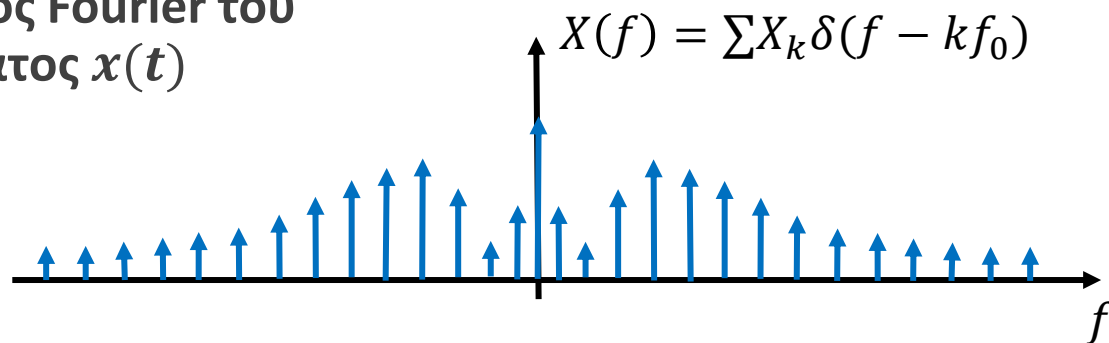
- **Επιβεβαιώθηκε!**

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

Συνάρτηση κατανομής ισχύος ως προς f

- Παράδειγμα: Μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$



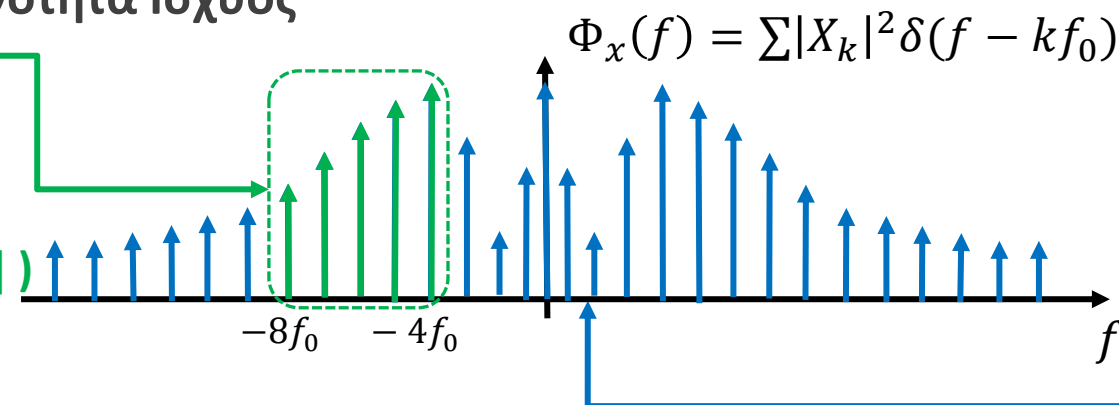
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

Μερικό «εμβαδό»

=

Μερική ισχύς!

(στο $[-8f_0, -4f_0]$)



Συνολικό «εμβαδό» = Συνολική ισχύς

• Φασματικές Πυκνότητες

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Θυμηθείτε ότι ένας τρόπος να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier είναι μέσω του μετασχ. Fourier **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος!

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

- Η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ περιοδικών σημάτων είναι κι αυτή ένα περιοδικό σήμα!
- ...και έχουμε δείξει ότι έχει συντελεστές Fourier $\Phi_k = |X_k|^2$!
- Μπορούμε άραγε αυτούς να τους βρούμε με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω?

• ΝΑΙ! 😊

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $\Phi_k = |X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπώντας τη φασματική πυκνότητα **ενέργειας** $\Phi_x(f, T_0)$ **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ.

$$\Phi_k = |X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0^2} |X(f, T_0)|^2 \Big|_{f=kf_0}$$

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

Υπολογισμός Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f, T_0)$ μιας περιόδου $x(t, T_0)$ - που είναι σήμα ενέργειας - του περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 \quad (9.177)$$

2. Δειγματοληπούμε την παραπάνω φασματική πυκνότητα ενέργειας ανά $k f_0$, και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{T_0^2}$ για να λάβουμε τους συντελεστές Fourier της περιοδικής αυτοσυσχέτισης:

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} \quad (9.178)$$

3. Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

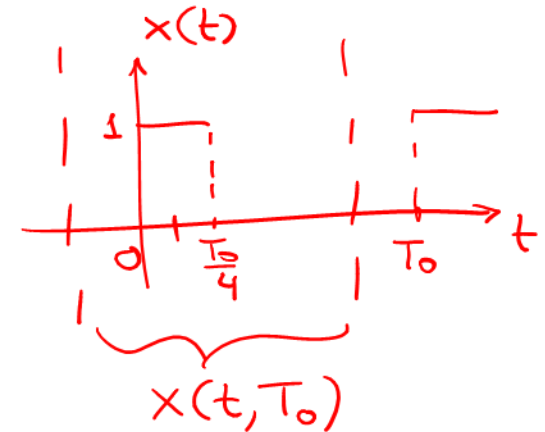
$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0) \quad (9.179)$$

• Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

- Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$$



Θεωράμε τη μια περίοδο του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ. την $x(t, T_0)$. Είναι:

$$x(t, T_0) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{8}}{\frac{T_0}{4}}\right) \xleftrightarrow{F} X(f, T_0) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right) e^{j\pi f \frac{T_0}{4}}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{ρα}} \quad \Phi_X(f, T_0) &= |X(f, T_0)|^2 = \left(\frac{T_0}{4}\right)^2 \left|\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 \cdot \left|e^{-j\pi f \frac{T_0}{4}}\right|^2 \\ &= \frac{T_0^2}{16} \left|\text{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 = \frac{T_0^2}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right). \end{aligned}$$

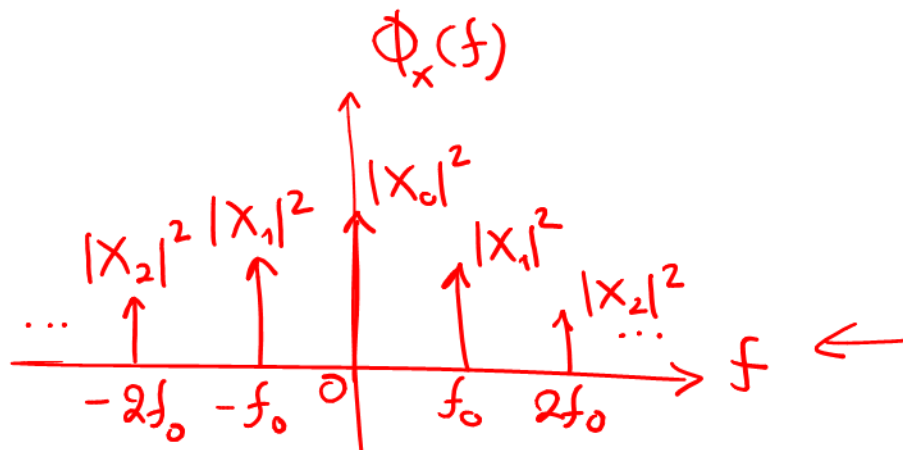
• Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \text{Άρα } |X_k|^2 &= \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0^2} \frac{T_0^2}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right) \Big|_{f=kf_0} \\ &= \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}kf_0\right) \stackrel{f_0T_0=1}{=} \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = |X_k|^2 \end{aligned}$$

Οπότε

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) = \frac{1}{16} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$



Τι παρατηρείτε
αριστερά?
Την κατανομή
στη ισχύ του
περιοδικού σήματος
στη συχνότητα

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι αφού η **διαφασματική πυκνότητα ισχύος** αποτελεί το μετασχ. Fourier της **ετεροσυσχέτισης** δυο περιοδικών σημάτων, μπορούμε να εξάγουμε αντίστοιχες με τη φασματική πυκνότητα εκφράσεις:

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

- Όμως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

- Φασματικές Πυκνότητες
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Άρα

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [X^*(kf_0, T_0)Y(kf_0, T_0)]\delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [X(kf_0, T_0)Y^*(kf_0, T_0)]\delta(f - kf_0)$$

- Καταφέραμε και σχετίσαμε και τις (δια)φασματικές πυκνότητες ισχύος περιοδικών σημάτων με τους μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του/των περιοδικού/ών σήματος/ων

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Σύνοψη:

- Σήματα ενέργειας:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}$$



- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k \delta(f - kf_0)\end{aligned}$$



με

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0)$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι **φασματικές πυκνότητες** μπορούν να **υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων που εμπλέκονται**
- Για **απεριοδικά σήματα ισχύος**, κάτι τέτοιο **δεν** ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για τέτοια σήματα ισχύος η (π.χ.) φασματική πυκνότητα ισχύος γράφεται ως

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2$$

με

$$X(f, T) = F \left\{ x(t) \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \right\} = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

δηλ. το **μετασχ. Fourier ενός τμήματος του σήματος ισχύος** $x(t)$, διάρκειας T

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να **μην** υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η **μελέτη των απεριοδικών σημάτων ισχύος** στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται **μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους**
 - ...και **όχι** μέσω του μετασχ. Fourier των ιδίων των σημάτων ισχύος

- Φασματικές Πυκνότητες

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος $x(t) = u(t)$

$$A, \forall t \leftrightarrow A\delta(f)$$

Βρήκαμε ότι $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \forall \tau.$

Άρα

$$\begin{aligned} \Phi_x(f) &= F\{\varphi_x(\tau)\} = \\ &= F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f). \end{aligned}$$

Άρα $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2} \xleftrightarrow{F} \Phi_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f)$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Σύνοψη:

- Σήματα ενέργειας:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2 \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}$$



- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k \delta(f - kf_0)\end{aligned}$$



- Σήματα ισχύος (απεριοδικά):

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) \\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f)\end{aligned}$$



- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την απόκριση συχνότητας $H(f)$, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$

- Θα συμβολίζουμε με $\phi_x(\tau)$, $\phi_y(\tau)$ τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με $\Phi_x(f)$, $\Phi_y(f)$ τις αντίστοιχες πυκνότητες

- Ξέρουμε ότι

$$\phi_y(\tau) = y(\tau) * y(-\tau)$$

$$= (x(\tau) * h(\tau)) * (x(-\tau) * h(-\tau))$$

$$= (x(\tau) * x(-\tau)) * (h(\tau) * h(-\tau))$$

$$= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)$$

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές και άρα **υπάρχει η συχνοτική του απόκριση $H(f)$**

- Για **σήματα ενέργειας**:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2$$

όπως αναμενόταν

- Για **περιοδικά σήματα**:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 |H(kf_0)|^2 \delta(f - kf_0)$$

- Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για **απεριοδικά** σήματα ισχύος:

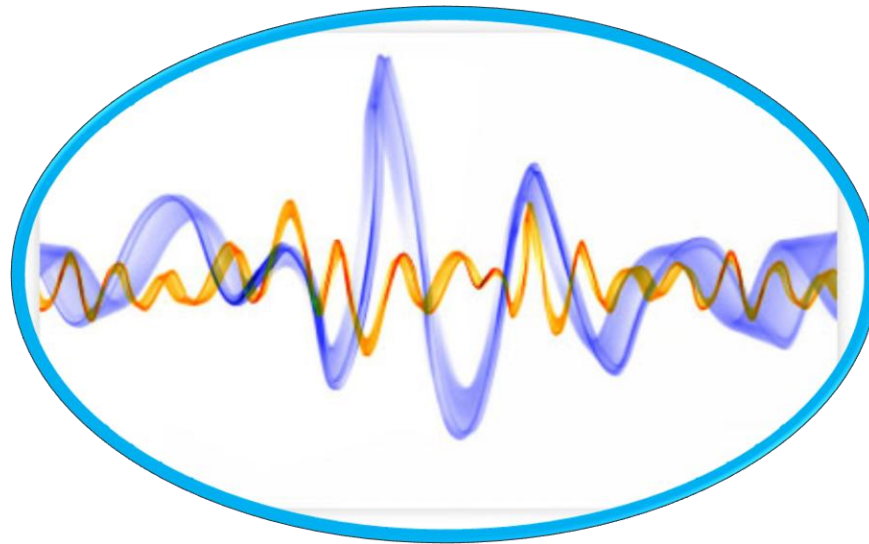


$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

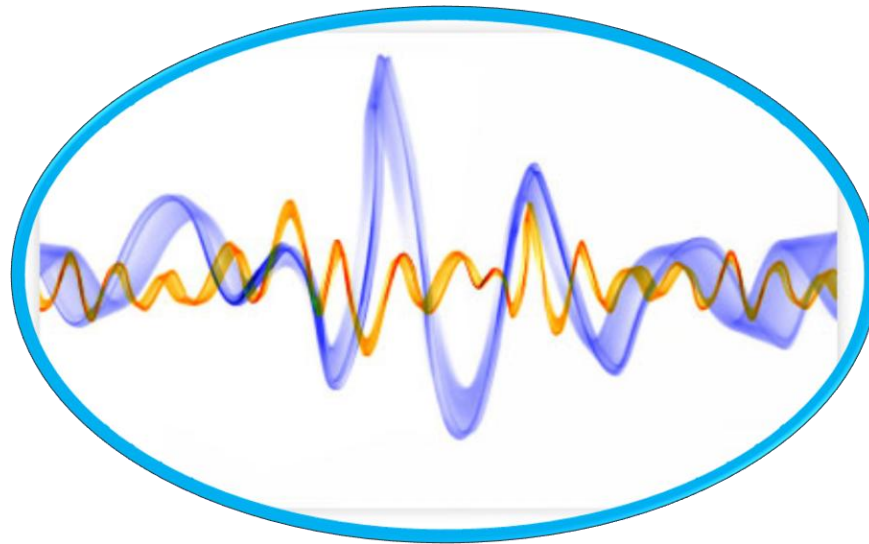
για και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες των σημάτων εισόδου και εξόδου
 - ...αλλά δε θα επεκταθούμε σε αυτές στα πλαίσια του μαθήματος

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

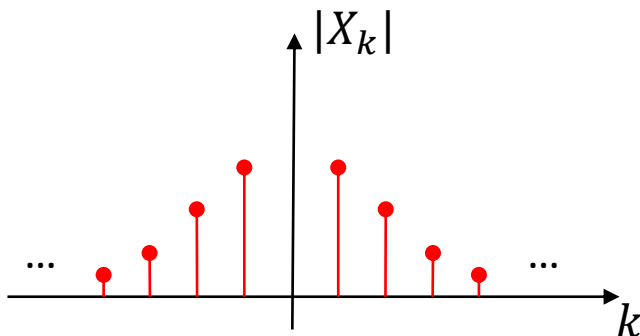


Παράρτημα



Για το σπίτι..

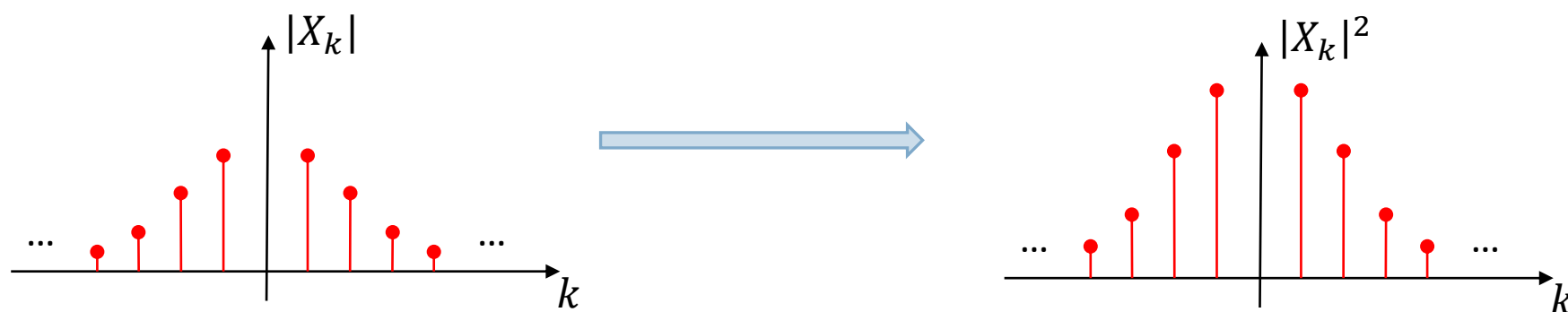
- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα:**
 - Αναπτύσσονται σε σειρά Fourier και έχουν μετασχηματισμό Fourier
 - Περιγράφονται συχνотικά από τους συντελεστές Fourier, $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$
 - Οι τελευταίοι μας πληροφορούν για το πλάτος $|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi k f_0 t}$ που «περιέχεται» στο περιοδικό σήμα
 - Αν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορούν *επιπλέον* για το πλάτος $2|X_k|$ και τη φάση ϕ_k του συνημιτόνου συχνότητας $k f_0$ που «περιέχεται» στο πραγματικό περιοδικό σήμα
 - Το περιοδικό σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης των συντελεστών Fourier (είτε ως προς k είτε ως προς f)
 - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** των συντελεστών Fourier όπως το παρακάτω



Ερώτημα: το διπλανό φάσμα είναι **φάσμα πλατών**. Αν θέλω να έχω ένα **φάσμα ισχύος**, δηλ. να δω πόση ισχύ φέρει κάθε συχνότητα $k f_0$, τι πρέπει να κάνω?

Για το σπίτι..

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα:**
 - Αρκεί να πάρουμε το μέτρο των συντελεστών Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



- Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται **φάσμα ισχύος** ή **φασματική πυκνότητα ισχύος** του περιοδικού σήματος!
 - Μας πληροφορεί για το πόση από τη συνολική ισχύ του περιοδικού σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα kf_0
 - Η ισχύς αυτή είναι απλά $|X_k|^2$, για τη συχνότητα kf_0
 - ... ή, αν πρόκειται για πραγματικό σήμα, η ισχύς του **συνημιτόνου** συχνότητας kf_0 είναι $2|X_k|^2$

Για το σπίτι..

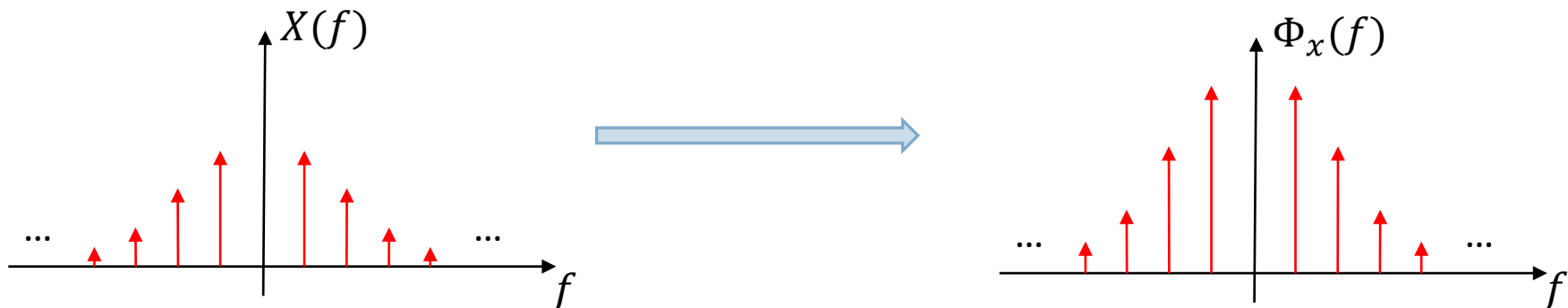
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Διαισθητική σύνοψη
- Περιοδικά σήματα:
 - Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ισχύος** του περιοδικού σήματος!
 - Βασισμένοι/ες στο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος

$$X(f) = \sum X_k \delta(f - kf_0)$$

το φάσμα ισχύος περιγράφεται ως

$$\Phi_x(f) = \sum |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

- ... και εναλλακτικά το σχεδιάζουμε σε συνεχή άξονα f , αντί του διακριτού άξονα k που είδατε πριν
- ... αλλάζουμε τον άξονα από k σε f , και χρησιμοποιούμε συναρτήσεις Δέλτα αντί για «στρογγυλά» κεφαλάκια (τιμές ακολουθίας)



Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Περιοδικά σήματα:**
 - Ποιο **σήμα στο χρόνο** αντιστοιχεί σε αυτήν την **φασματική πυκνότητα ισχύος**?
 - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ισχύος $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
 - Η **περιοδική αυτοσυσχέτιση** $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
 - Η περιοδική αυτοσυσχέτιση είναι περιοδική με την **ίδια περίοδο** με το περιοδικό σήμα, και άρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier! Πως?
 - Όπως δείξαμε, ως

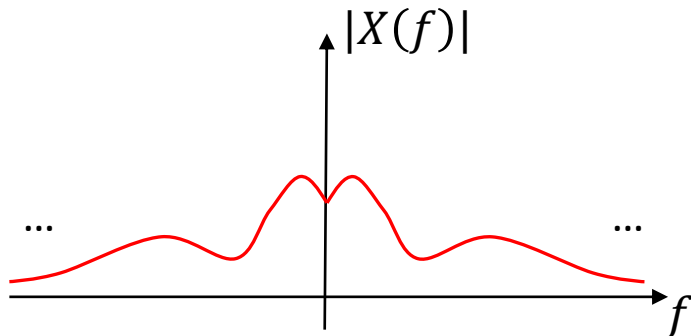
$$\phi_x(\tau) = \sum |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και όπως είπαμε πριν,

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \sum |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας:**
 - **ΔΕΝ** αναπτύσσονται σε σειρά Fourier αλλά αναλύονται με το Μετασχηματισμό Fourier
 - Περιγράφονται συχνотικά από τον ίδιο το μετασχηματισμό, $X(f)$
 - Ο τελευταίος μας πληροφορεί για το πλάτος $df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του μιγαδικού εκθετικού $e^{j2\pi(df)t}$ που «περιέχεται» στο σήμα
 - Αν το σήμα είναι πραγματικό, μας πληροφορεί *επιπλέον* για το πλάτος $2df|X(df)|$ και τη φάση $\phi(df)$ του συνημιτόνου συχνότητας df που «περιέχεται» στο πραγματικό σήμα
 - Το σήμα περιγράφεται σχηματικά στο χώρο της συχνότητας από το φάσμα πλάτους & φάσης του μετασχηματισμού Fourier (ως προς f)
 - Έστω ένα φάσμα **πλάτους** του μετασχηματισμού Fourier όπως το παρακάτω



Ερώτημα: το διπλανό φάσμα είναι **φάσμα πλάτους**. Αν θέλω να έχω ένα **φάσμα ενέργειας**, δηλ. να δω πόση ενέργεια φέρει κάθε συχνότητα df , τι πρέπει να κάνω?

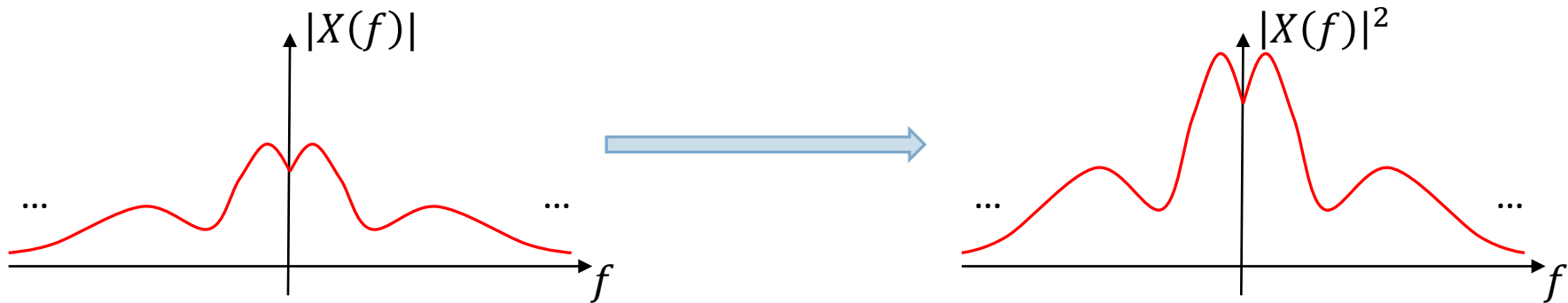
Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Διαισθητική σύνοψη

- **Σήματα ενέργειας:**

- Αρκεί να πάρουμε το μέτρο του μετασχ. Fourier και να το υψώσουμε στο τετράγωνο!



- Το φάσμα που προκύπτει ονομάζεται **φάσμα ενέργειας ή φασματική πυκνότητα ενέργειας** του σήματος!

- Μας πληροφορεί για το πόση από τη συνολική ενέργεια του σήματος κατανέμεται σε κάθε συχνότητα df
- Η ενέργεια αυτή είναι απλά $df|X(df)|^2$, για τη συχνότητα df

- Τώρα έχουμε μια φασματική αναπαράσταση **ενέργειας** του σήματος!

- Μαθηματικά, το φάσμα αυτό περιγράφεται ως $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$ (προφανές)

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **Σήματα ενέργειας:**
 - Ποιο **σήμα στο χρόνο** αντιστοιχεί σε αυτήν την **φασματική πυκνότητα ενέργειας**?
 - Δηλ. ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του φάσματος ενέργειας $\Phi_x(f)$ είναι ποιος?
 - Η **αυτοσυσχέτιση** $\phi_x(\tau)$, η οποία «μετρά» την ομοιότητα του σήματος με τον εαυτό του!
- **Σήματα ισχύος (απεριοδικά):**
 - Τα απεριοδικά σήματα ισχύος **δεν** μπορούν **πάντα** να περιγραφούν στο χώρο των φασματικών πυκνοτήτων **με όρους του μετασχ. Fourier τους**
 - ...ακόμα κι αν συμπεριλάβουμε συναρτήσεις Δέλτα ή άλλες «εξωτικές» συναρτήσεις/κατανομές
 - Οπότε η **μελέτη τους γίνεται με το μετασχ. Fourier απ'ευθείας της αντίστοιχης συνάρτησης συσχέτισής τους**
 - Παρόμοια γενικεύονται οι έννοιες για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαισθητική σύνοψη
- **ΓΧΑ συστήματα:**
 - Όταν μια φασματική πυκνότητα εισόδου περνά μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα, η φασματική πυκνότητα αυτή **επηρεάζεται** από το σύστημα
 - Είναι σαν να λέμε ότι **η κατανομή ενέργειας/ισχύος ενός σήματος εισόδου επηρεάζεται από το σύστημα όταν περνά μέσα από αυτό**
 - ...λογικό, αφού ένα σύστημα μεταβάλλει συχνотικά την είσοδό του (κόβοντας συχνότητες, ενισχύοντας ή καταστέλλοντας άλλες, κλπ) και έτσι αλλάζει την κατανομή ενέργειας/ισχύος της, δίνοντας έτσι ένα διαφορετικό σήμα εξόδου (και μια αντίστοιχα διαφορετική - σε σχέση με την είσοδο - φασματική πυκνότητα)
 - **Μην ξεχνάτε:** η φασματική πυκνότητα είναι απλά μια **συχνοτική περιγραφή** ενός σήματος **με όρους ενέργειας ή ισχύος ανά συχνότητα!** (αντί για πλάτος + φάση ανά συχνότητα)

Για το σπίτι..

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- Διαισθητική σύνοψη

- **ΓΧΑ συστήματα:**

- Αν υποθέσουμε ότι τα ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται από κρουστικές αποκρίσεις που είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες (και άρα έχουν μετασχ. Fourier = συχνοτική απόκριση), τότε η φασματική πυκνότητα του συστήματος θα είναι

$$\Phi_h(f) = |H(f)|^2$$

- Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

Για το σπίτι..

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Διαισθητική σύνοψη
- ΓΧΑ συστήματα:
 - Η σχέση

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

δεν πρέπει να σας εκπλήσσει

- Γιατί γνωρίζετε ότι

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

για σήματα ενέργειας, ενώ για περιοδικά σήματα

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Αν υψώσετε τα μέτρα των σχέσεων αυτών στο τετράγωνο, θα πάρετε τα αποτελέσματα των φασματικών πυκνοτήτων που είδαμε σε αυτή τη διάλεξη!! 😊

