ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Στις επόμενες διαλέξεις θα συζητήσουμε για τον **μετασχ. Laplace**

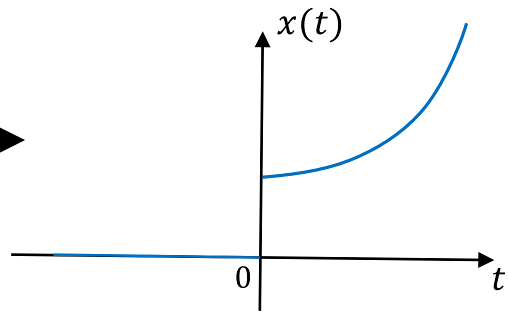
- Θα συζητήσουμε το **κίνητρο** πίσω από τη χρήση του…

- …καθώς και τις πολλαπλές διαισθητικές **ερμηνείες** που μπορεί να έχει

- Θα κατανοήσουμε τις **λεπτομέρειες** πίσω από τη θεωρία του και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις **ιδιότητές** του

- Τέλος, θα δούμε πως θα χρησιμοποιούμε το μετασχ. Laplace για να **λύνουμε διαφορικές εξισώσεις** και να **αναλύουμε** – ΓΧΑ ή μη – **συστήματα**

- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (!) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων
- Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)
  - Κάποια σήματα ισχύος
  - Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος
- Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$ $\longrightarrow$



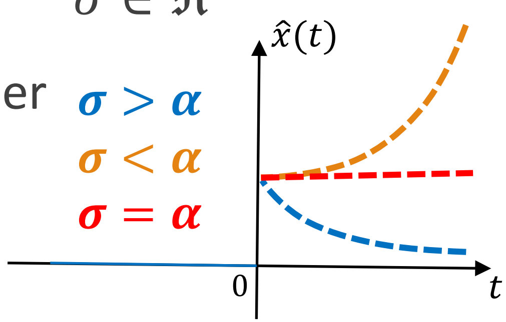
  - Δεν έχει μετασχ. Fourier
  - Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?

$$a < 0$$

- Ας το “κάνουμε να έχει”! ☺
- Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = x(t)\boldsymbol{e^{-\sigma t}} = e^{at}\boldsymbol{e^{-\sigma t}}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \qquad \sigma \in \Re$$

- Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier



$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

- Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα

- Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! ☺

- Από την παραπάνω σχέση

$$\int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} \boldsymbol{e}^{-\overbrace{(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{j2\pi f})}^{s}\boldsymbol{t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{e^{at} u(t)}^{x(t)} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{st}} dt = X(s)$$

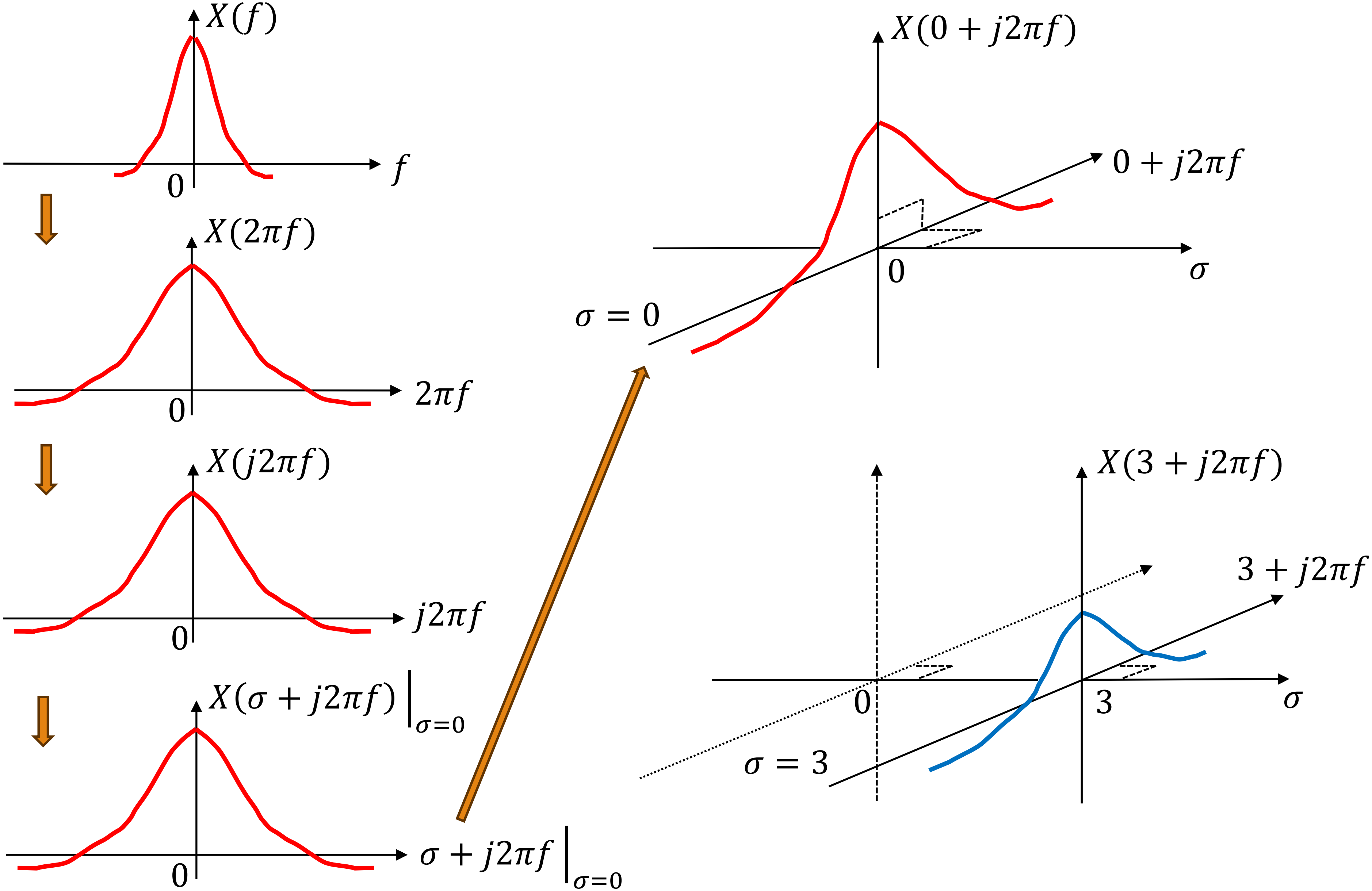
- Οπότε βρήκαμε έναν **άλλο μετασχηματισμό** ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}

- Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$

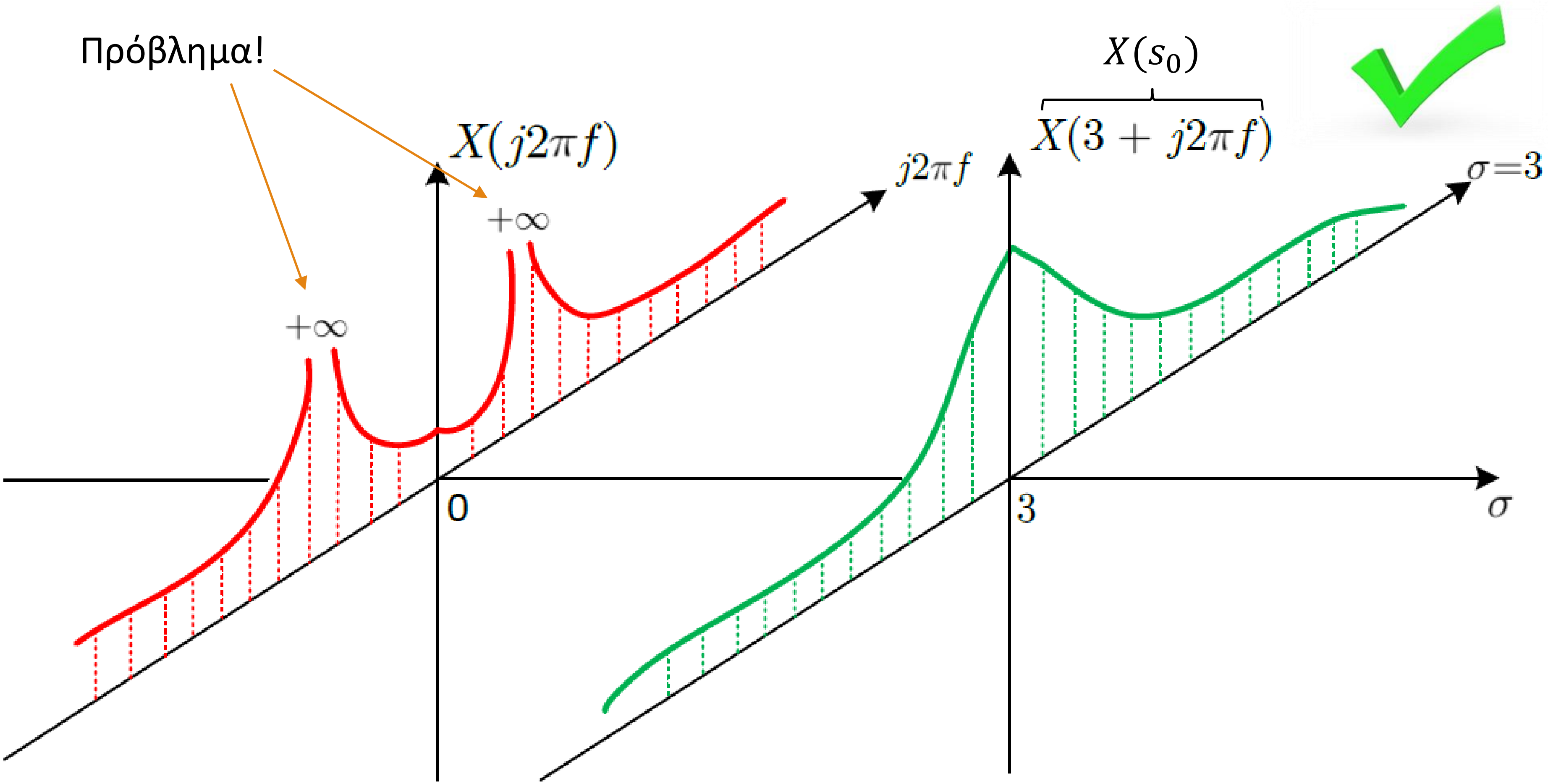
- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται

μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**

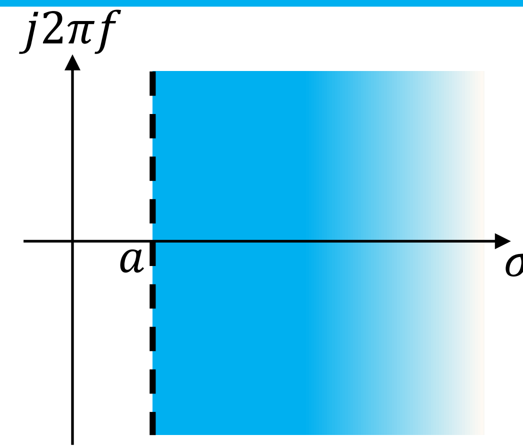


- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα που συζητάμε
  - Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$
  - Η περιοχή αυτή αποτελεί ένα **ημιεπίπεδο** από το $\sigma = a$ (χωρίς να το περιλαμβάνει) ως το $\sigma = +\infty$



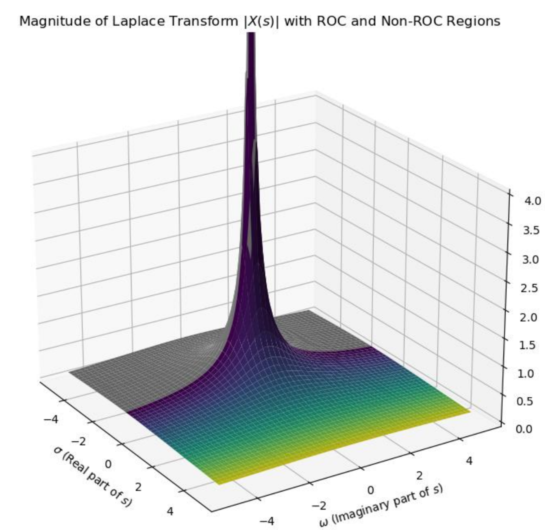
- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence - ROC) και συμβολίζεται με R_x**
  - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής

- Ορισμός Μετασχ. Laplace

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$



  - Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε...

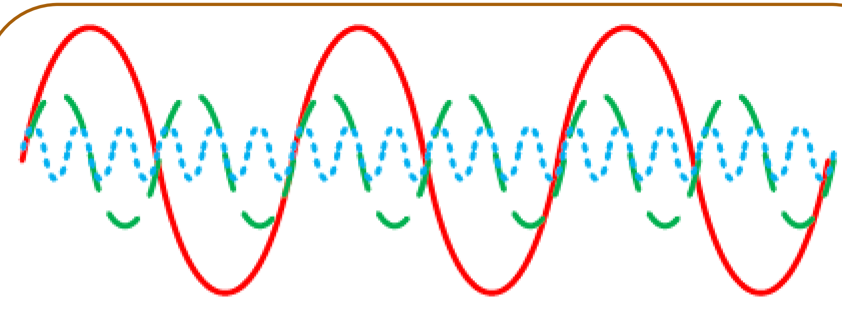
- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξενίζει…
- Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(f)e^{j2\pi f t}df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{X}(f)e^{\sigma t}\right)e^{j2\pi f t}df$$

- Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

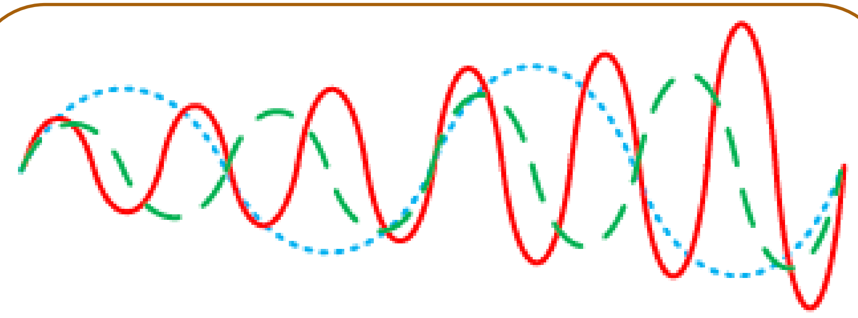
$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} 2\left|\hat{X}(f)\right|\boldsymbol{e^{\sigma t}}\cos\left(2\pi f t + \hat{\phi}(f)\right)df$$

$\sigma = 0$



(α′) Σταθερού πλάτους ημίτονα

$\sigma \neq 0$

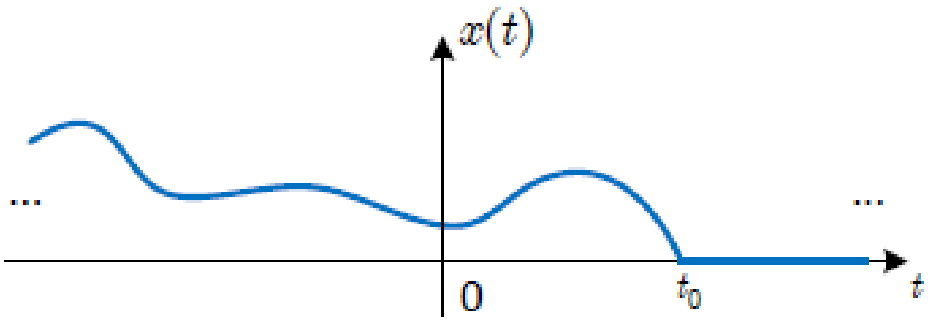


(β′) Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

- **Πόλοι και Μηδενικά**
- Οι μετασχηματισμοί Laplace που θα δούμε θα αποτελούν κατά κανόνα ρητές συναρτήσεις του s
- Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα δυο είδη σημείων του μιγαδικού επιπέδου
- 1. Οι **πόλοι** του μετασχηματισμού
  - Είναι οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που ο μετασχηματισμός Laplace απειρίζεται, δηλ. το σύνολο $S_p = \{s \in \mathbb{C} : X(s) \to \infty\}$
  - Ως εκ τούτου, οι πόλοι **δεν** ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού
  - Σε ρητές συναρτήσεις του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι
  - Συμβολίζονται με ένα **X** στο μιγαδικό επίπεδο
- 2. Τα **μηδενικά** του μετασχηματισμού
  - Είναι οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που ο μετασχηματισμός Laplace μηδενίζεται, δηλ. το σύνολο $S_z = \{s \in \mathbb{C} : X(s) = 0\}$
  - Μπορούν να ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης, δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα με αυτό
  - Σε ρητές συναρτήσεις του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά
  - Συμβολίζονται με ένα **O** στο μιγαδικό επίπεδο

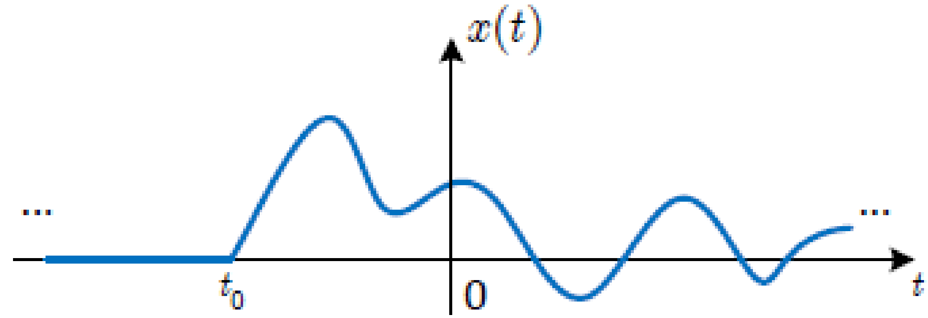
- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**
- Πλευρικότητα

$$x(t) = 0, \qquad t > t_0$$

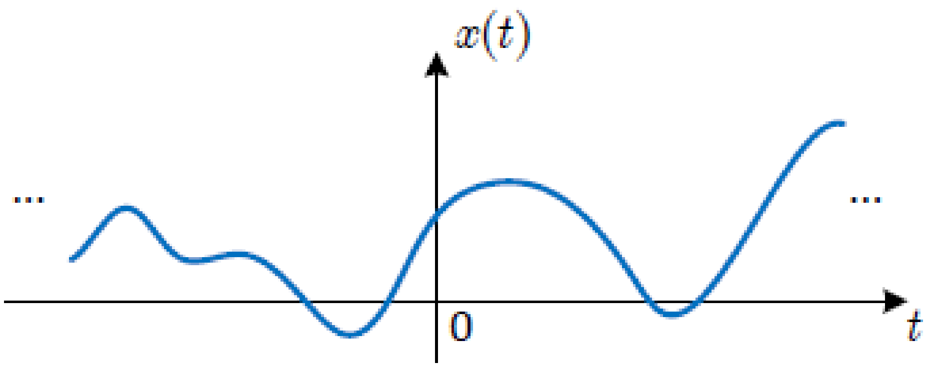


(α′) *Αριστερόπλευρο σήμα.*

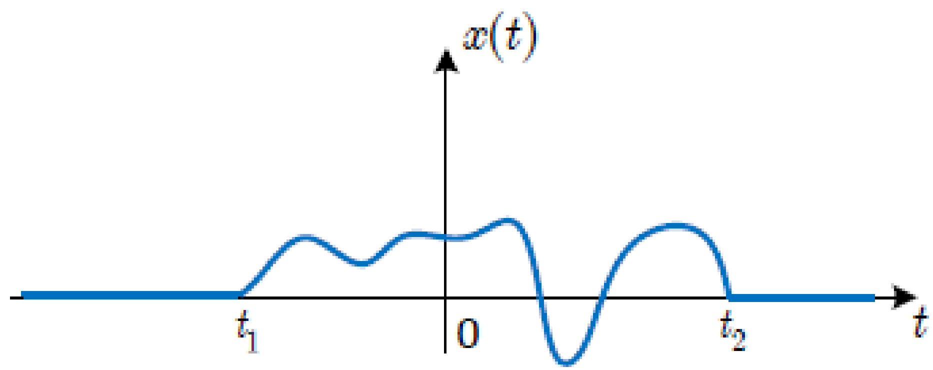
$$x(t) = 0, \qquad t < t_0$$



(β′) *Δεξιόπλευρο σήμα.*



(γ′) *Αμφίπλευρο σήμα.*



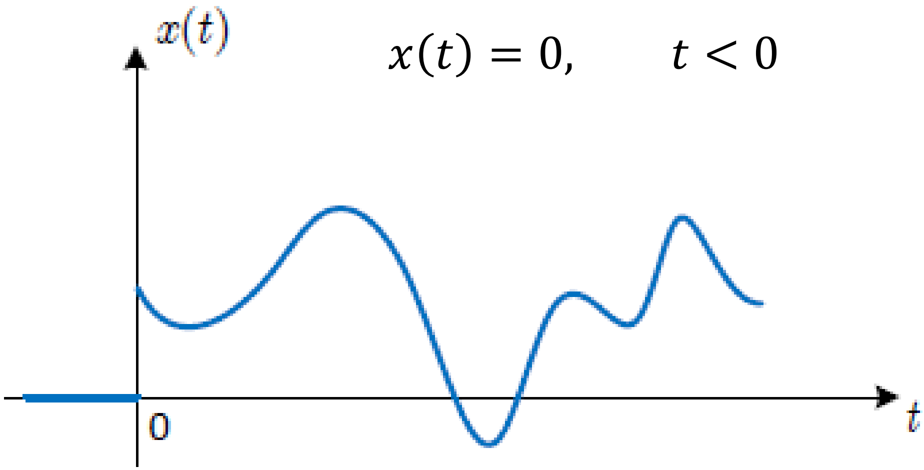
(δ′) *Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.*

$$x(t) = 0, \qquad t < t_1, t > t_2$$

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

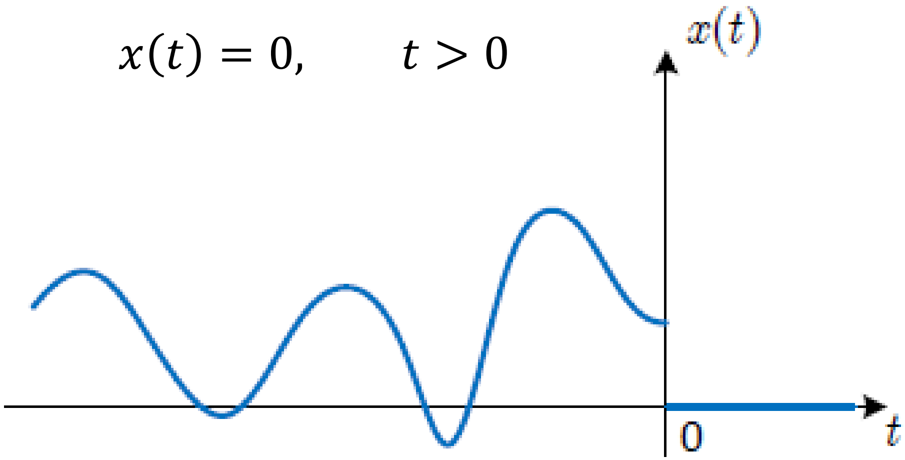
- Αιτιατότητα

$$x(t) = 0, \qquad t < 0$$

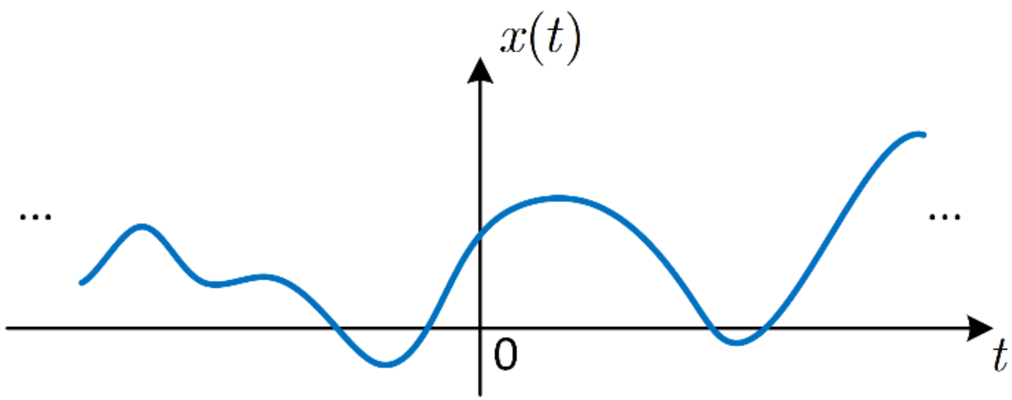


(α′) *Αιτιατό Σήμα.*

$$x(t) = 0, \qquad t > 0$$



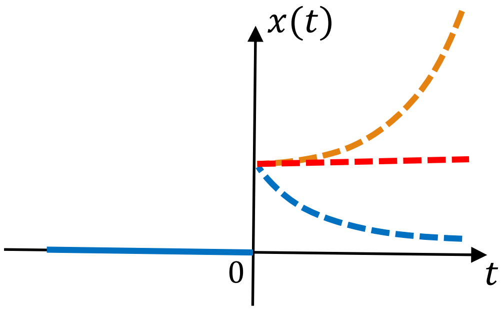
(β′) *Αντι-αιτιατό σήμα.*



(γ′) *Μη-αιτιατό σήμα*

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t), a \in \Re$



Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

$u(t) = 1, t > 0$; $0, t < 0$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (1)$$

$s = \sigma + j2\pi f$

Είναι $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t \to +\infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi f t} = \lim_{t \to +\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi f t}$

• Μετασχηματισμός Laplace

Για $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} = 0$ (2)

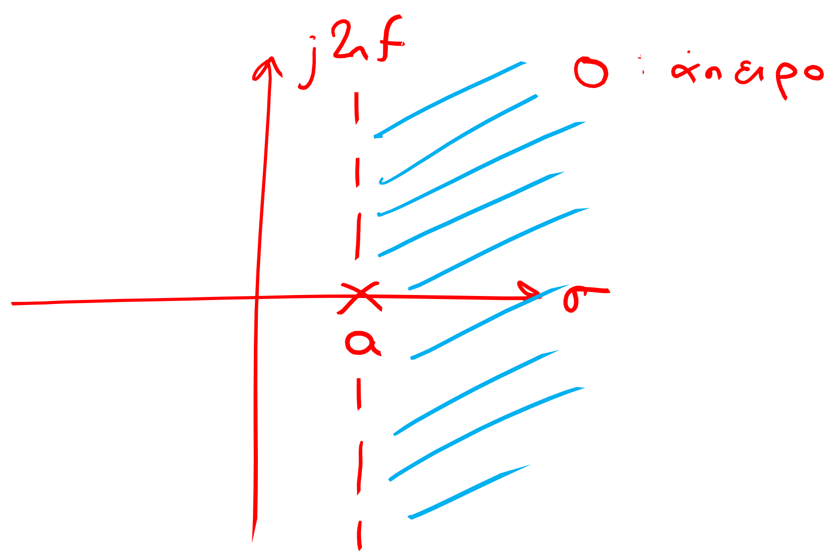
(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $X(s) = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$, $\underbrace{\sigma > a \Leftrightarrow Re\{s\} > a}_{\text{Πεδίο Σύγκλισης}}$

Άρα

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$$

Πόλοι : $s = a$

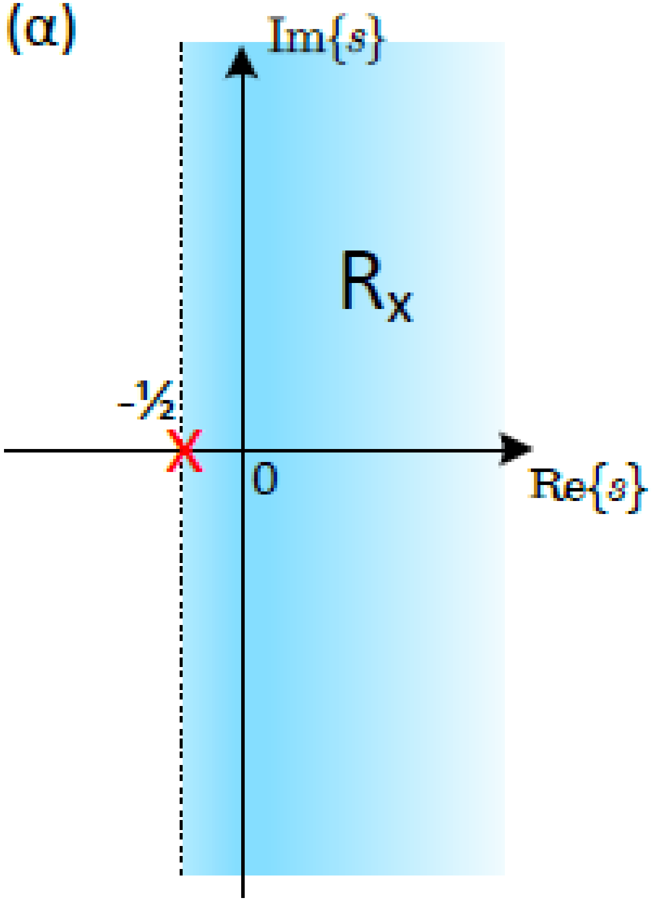
Μηδενικά : $s = \infty$

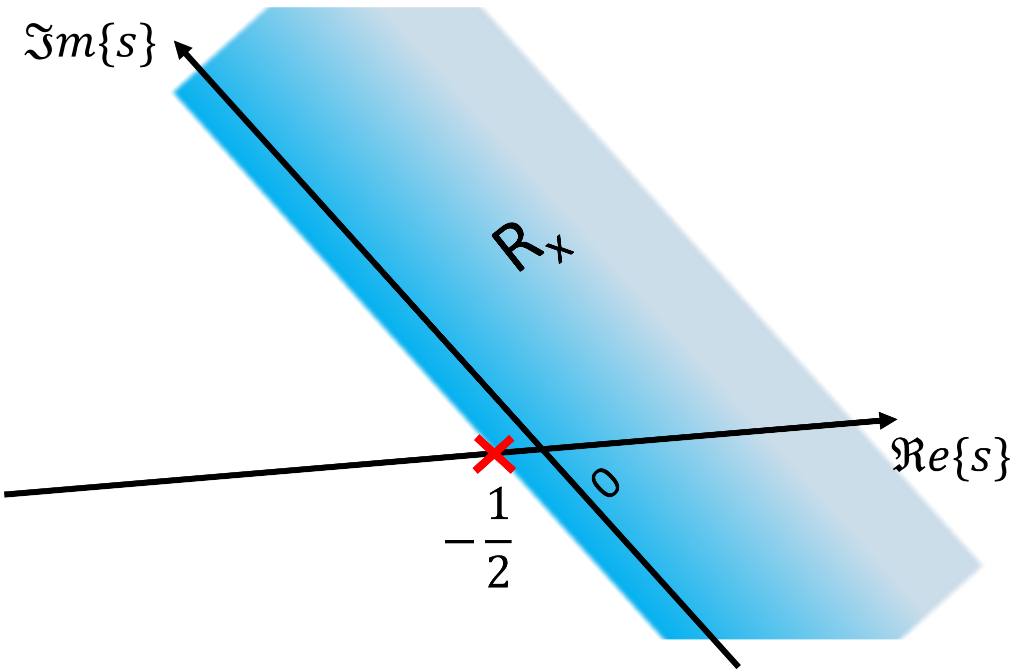


- **Μετασχηματισμός Laplace**

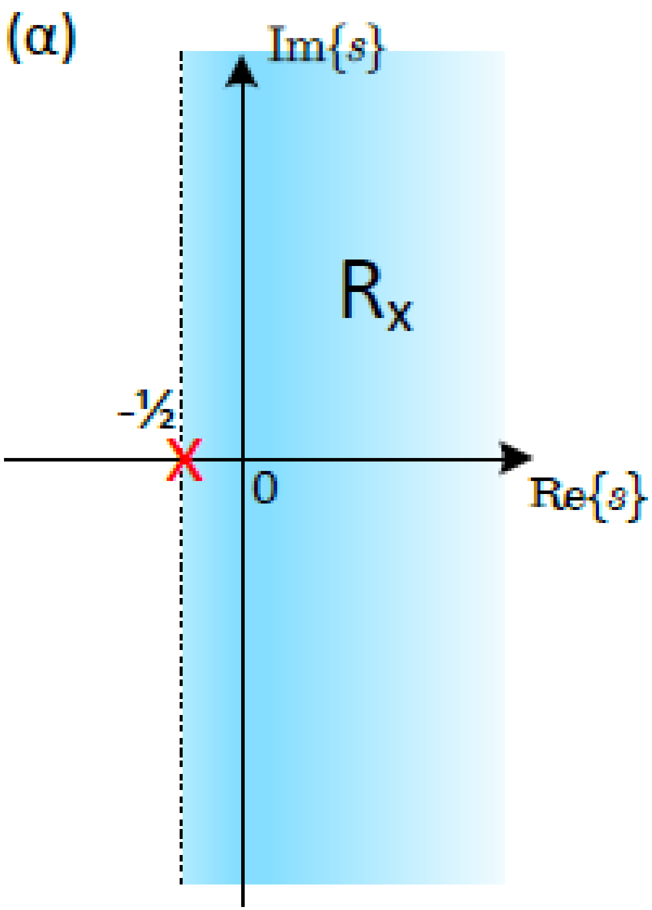
- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:

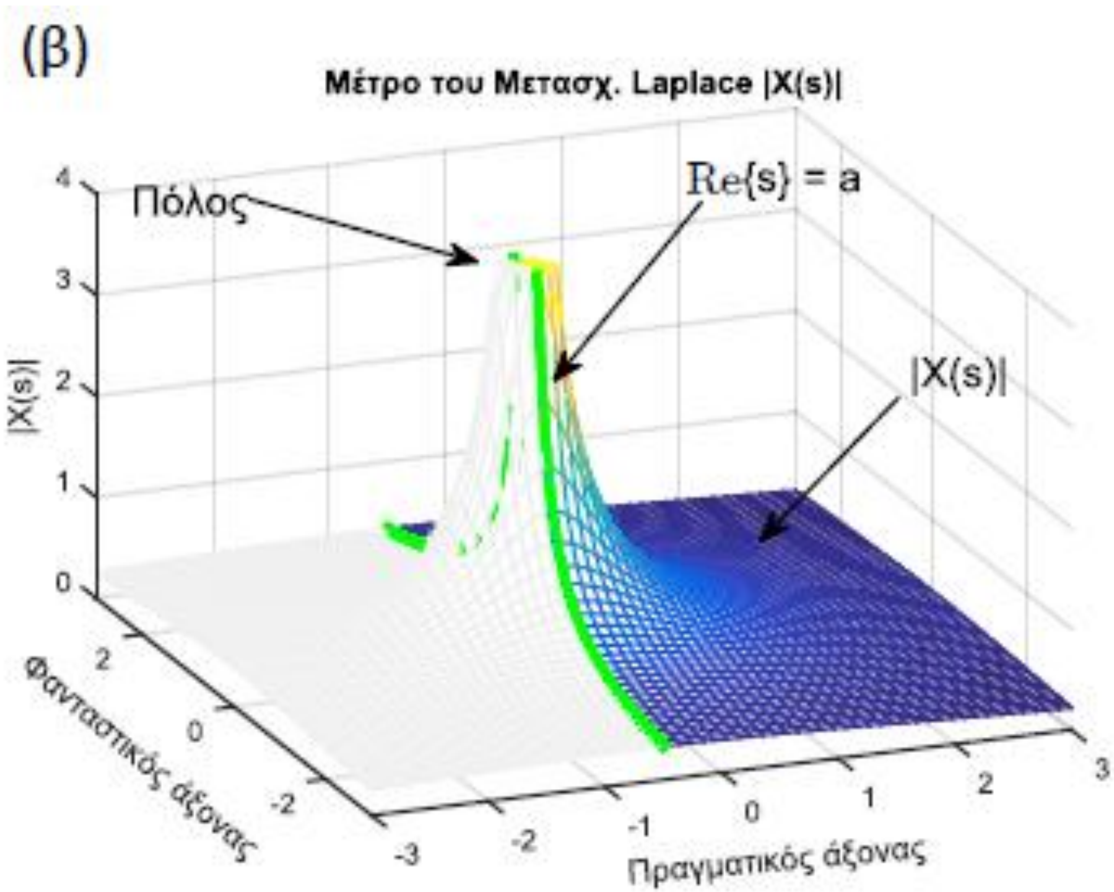
(α)





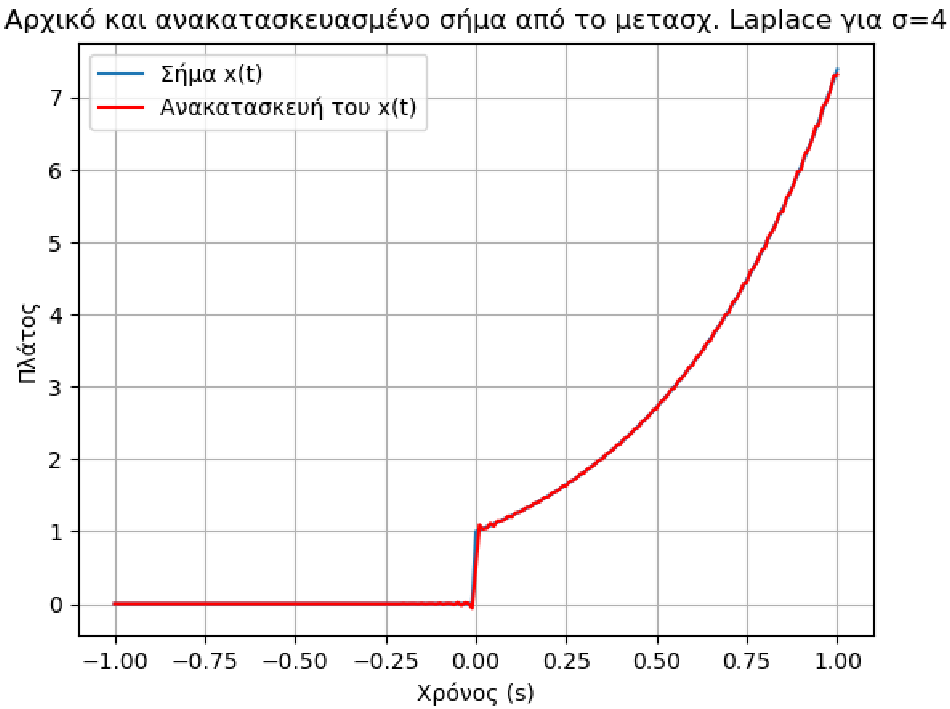
- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:





- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Κώδικας:

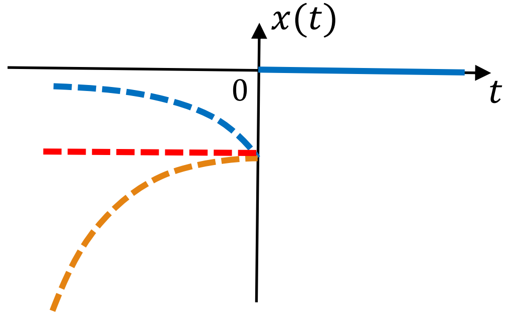
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α
a = 2

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-40, 40 + df, df)

# Σήμα (0 για t < 0, exp(at) για t > 0)
x = np.where(t <= 0, 0, np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (έστω 4)
sigma = 4

# Μετασχηματισμός Laplace
X = 1.0 / (sigma - a + 1j * 2 * np.pi * f)
```




```
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=4")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t), a \in \Re$



Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} - e^{at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

$u(-t)$: $1, t<0$; $0, t>0$

$$= - \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t} dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \to -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (1)$$

Είναι $\lim_{t \to -\infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi f t} =$

$$= \lim_{t \to -\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi f t}$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**

Για $a-\sigma>0 \Leftrightarrow \sigma<a$, το $\lim_{t\to-\infty} e^{(a-s)t} = 0$ (2)

Πεδίο Σύγκλισης

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $X(s) = -\frac{1}{a-s}(1-0) = \frac{1}{s-a}$, για $\sigma<a$.

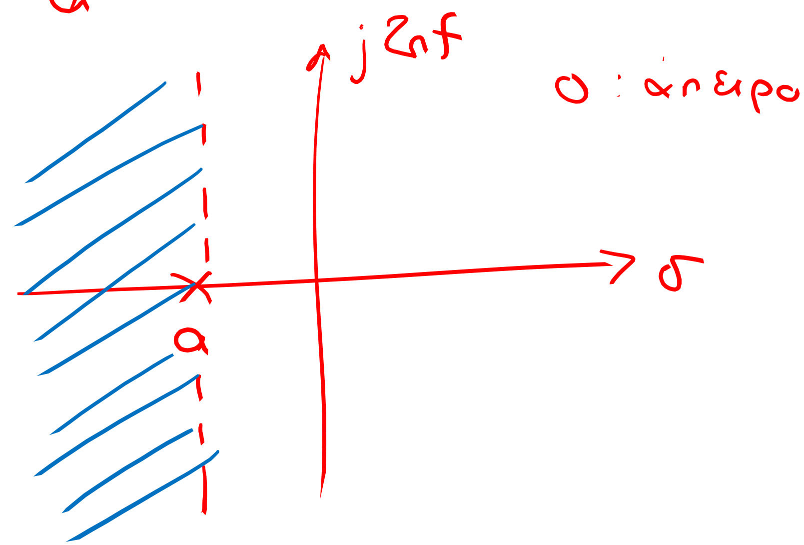
$\sigma<a \;=\; Re\{s\}<a$

Άρα

$$-e^{at}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma<a.$$

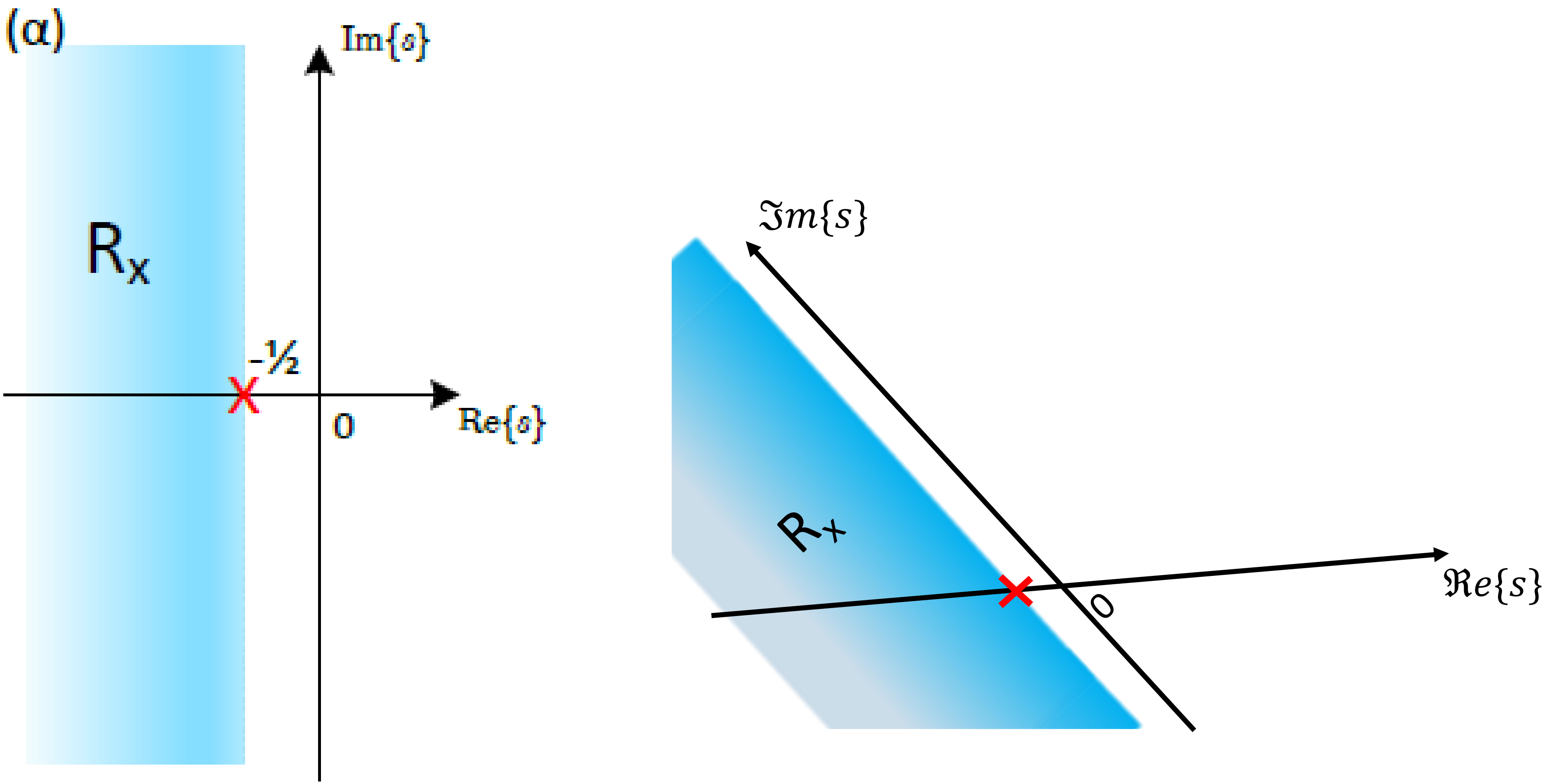
Μηδενικά: $s=\infty$

Πόλοι: $s=a$

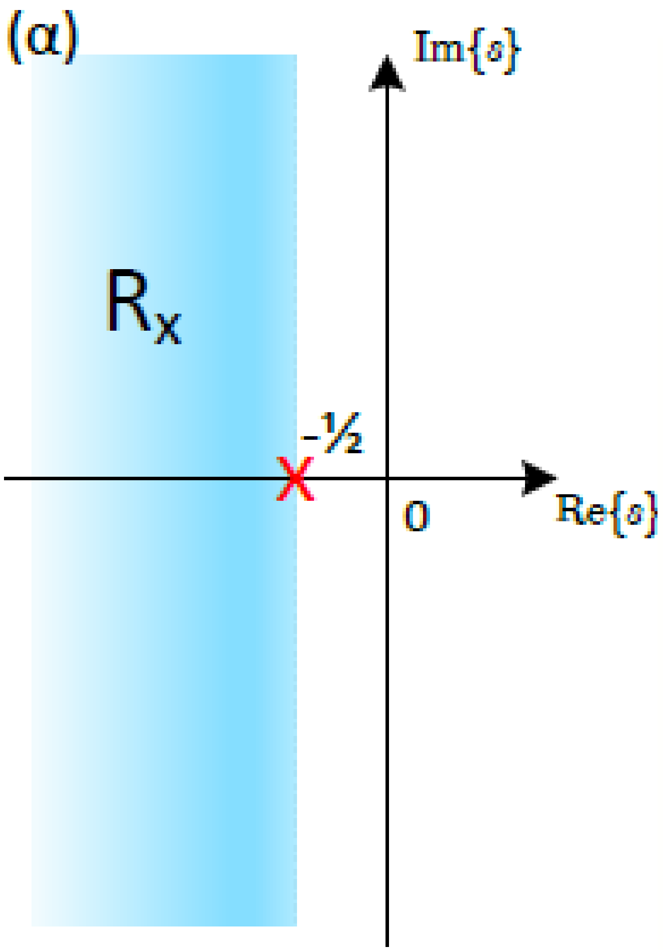


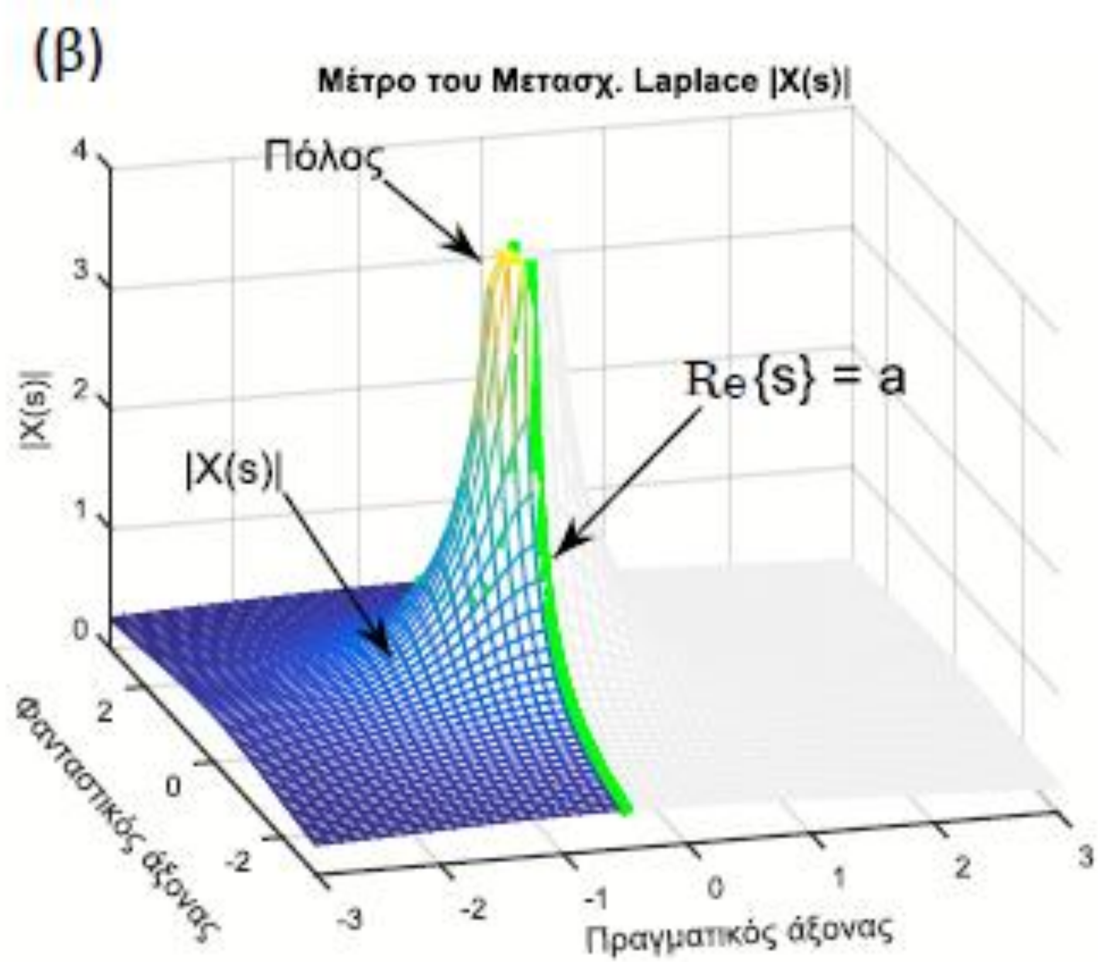
- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

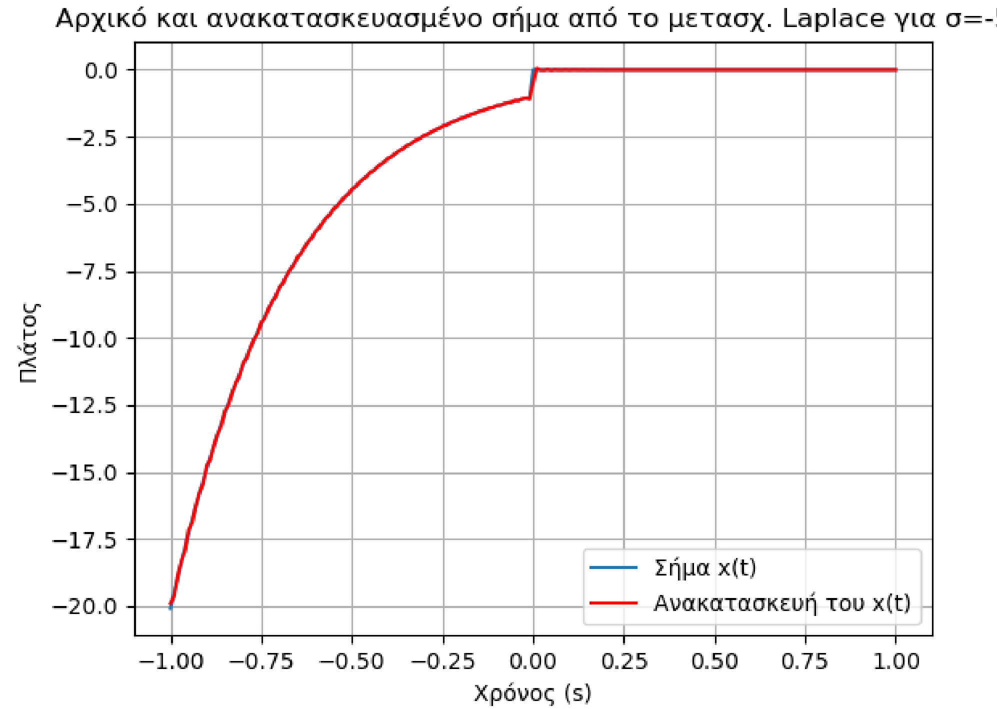




- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Κώδικας:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α (πρέπει να είναι < 0)
a = -3

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-40, 40 + df, df)

# Σήμα (0 για t >= 0, -exp(at) για t < 0)
x = np.where(t >= 0, 0, -np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (έστω -5)
sigma = -5

# Μετασχηματισμός Laplace
X = 1.0 / (sigma - a + 1j * 2 * np.pi * f)
```




```python
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=-5")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```

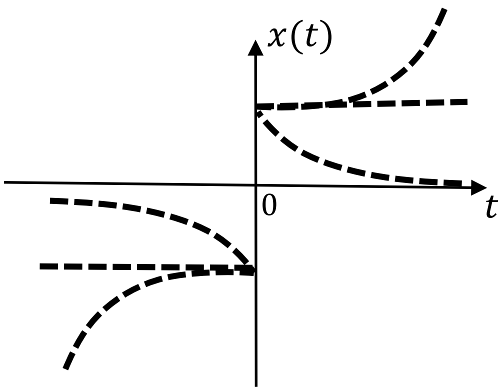
- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}u(-t), \qquad a, b \in \Re$$

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > \alpha$$

$$-e^{bt}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-b}, \sigma < b$$



Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{at}u(t) - e^{bt}u(-t) \right) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(t) e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{bt}u(-t) e^{-st} dt$$

$$= \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} + \mathcal{L}\{-e^{bt}u(-t)\}$$

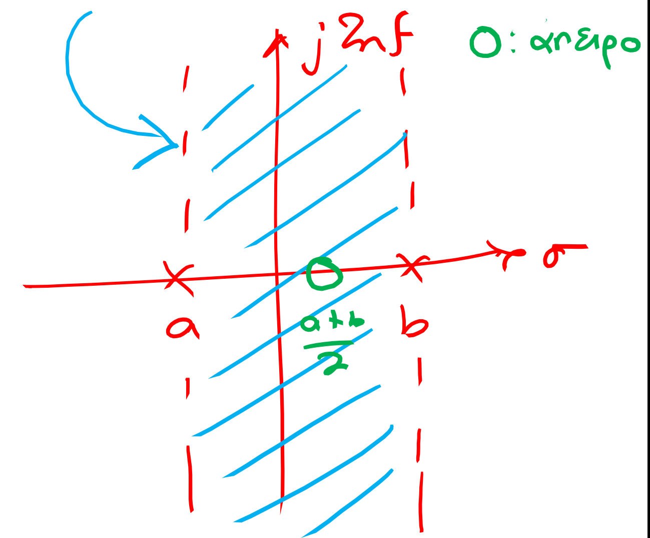
$$= \underbrace{\frac{1}{s-a}}_{\sigma > a} + \underbrace{\frac{1}{s-b}}_{\sigma < b} = \frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)},$$ με $\sigma > a$ και $\sigma < b$.

$a < \sigma < b \Rightarrow a < b$!

• Μετασχηματισμός Laplace

Αν $a \geq b$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, $\emptyset$.

Αν $a < b$, τότε ——— ν ——— $a < \sigma < b$.



Μηδενικά: $X(s) = 0$

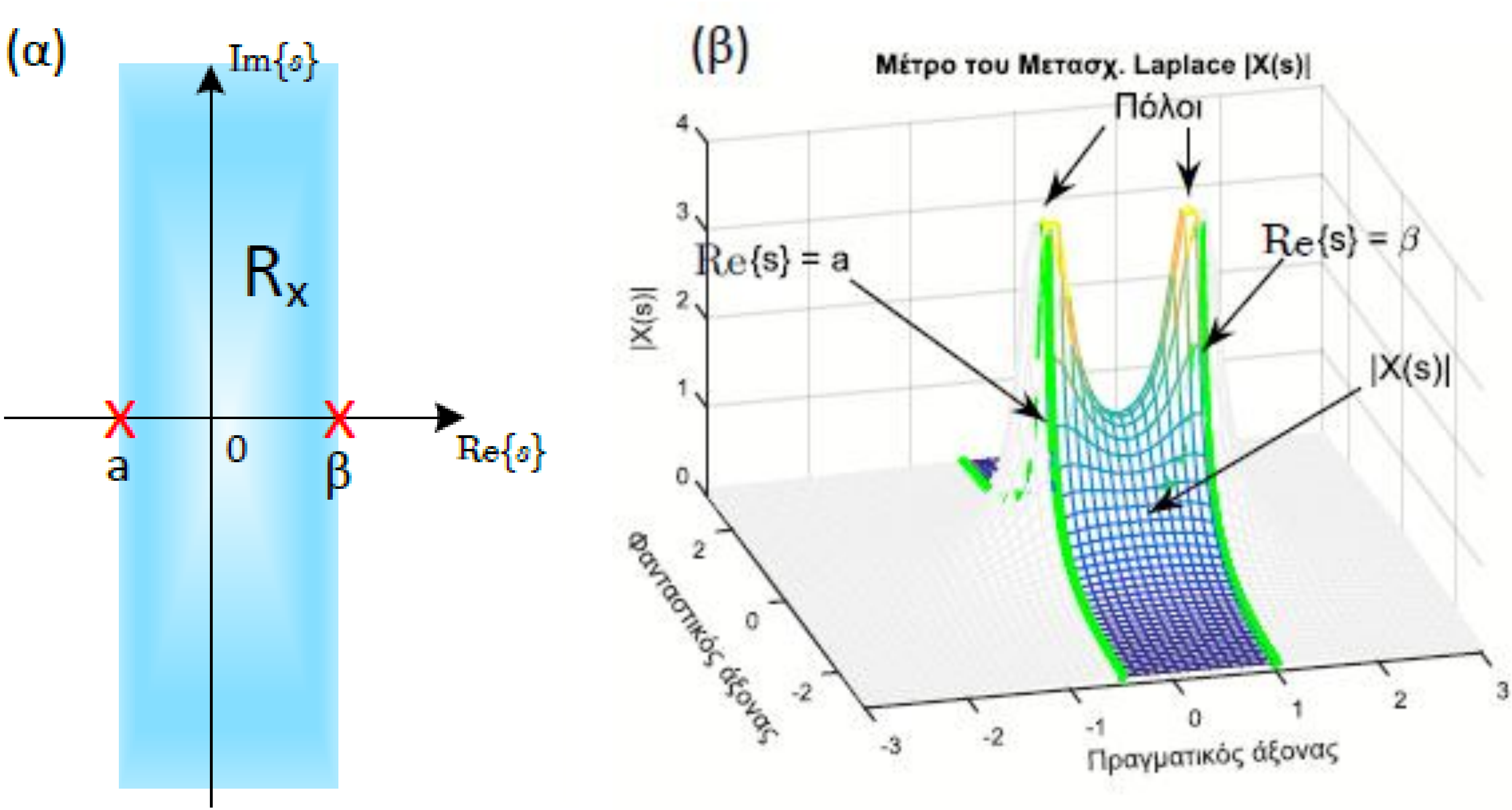
$$\frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)} = 0 \Rightarrow s = \frac{a+b}{2} \quad \underline{1}$$

Πόλοι: $X(s) \to \infty$

$$\frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)} \to \infty \Rightarrow s=a,\ s=b \quad \underline{2}$$

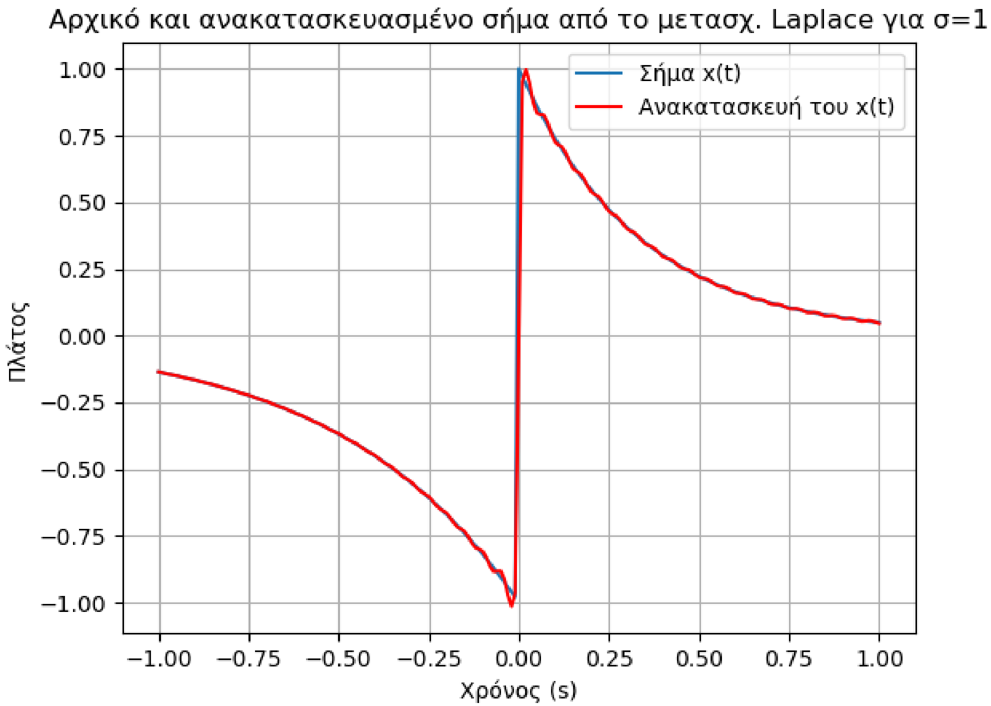
Όμως, $$X(s) = \frac{\cancel{s}\left(2-\frac{a+b}{s}\right)}{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{a}{s}\right)\left(1-\frac{b}{s}\right)} = \frac{2-\frac{a+b}{s}}{s\left(1-\frac{a}{s}\right)\left(1-\frac{b}{s}\right)} \xrightarrow{s\to\infty} 0$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Κώδικας:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α
a = -3
# Παράμετρος β
b = 2

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-80, 80 + df, df)

# Σήμα (exp(at) για t >= 0, -exp(bt) για t < 0)
x = np.where(t <= 0, -np.exp(b * t), np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (πρέπει να είναι μεταξύ α < σ < β)
sigma = 1

s = sigma + 1j * 2 * np.pi * f
# Μετασχηματισμός Laplace
X = (2*s - (a+b)) / ((s - a)*(s - b))
```




```
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=1")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```

- **Μετασχηματισμός Laplace**

$$\int x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t)$$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

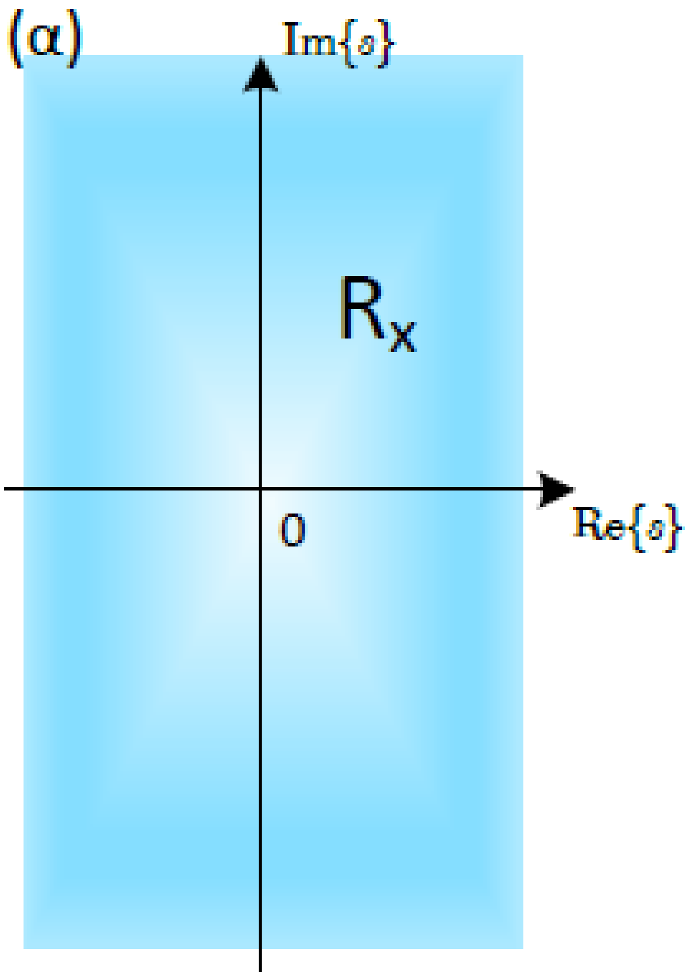
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt$$

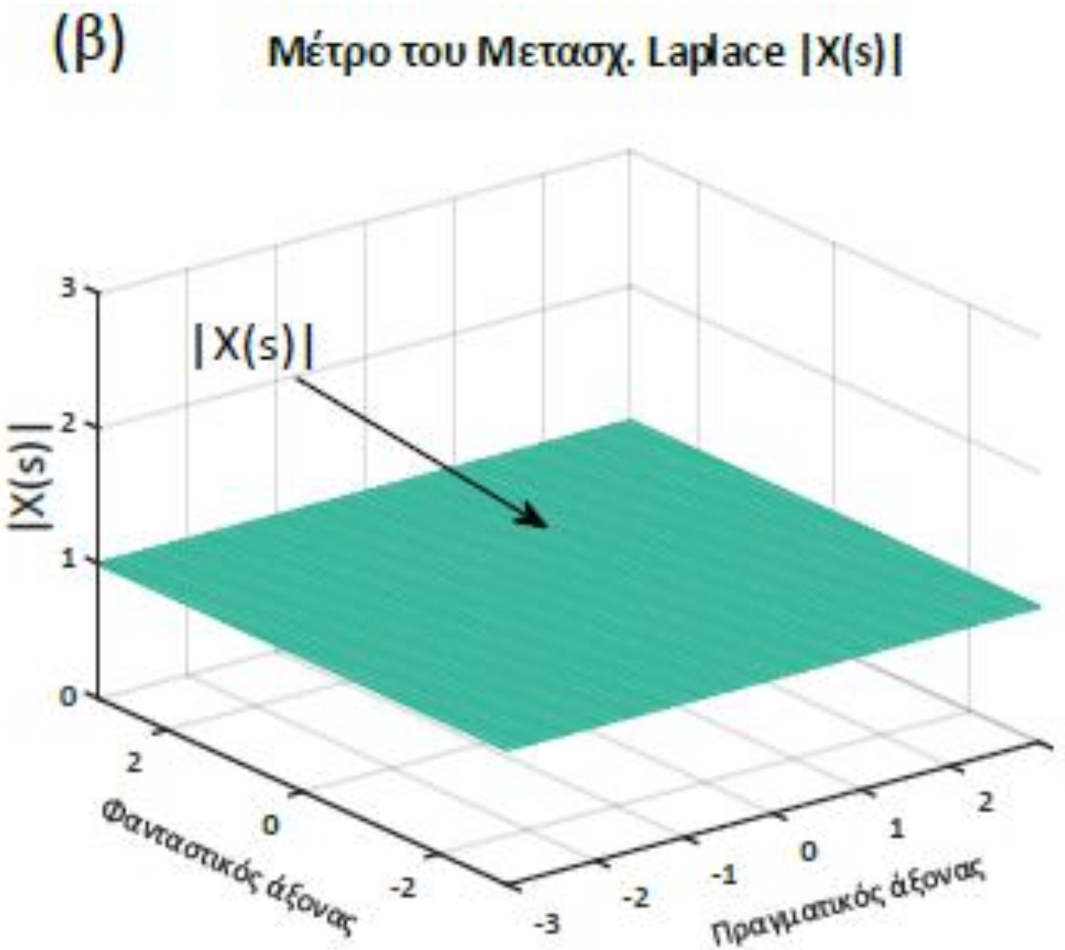
$$= e^{-st}\Big|_{t=0} = e^0 = 1, \ \forall s$$

Άρα

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1, \ \forall s$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:





- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. **Πόλοι**: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. **Μηδενικά**: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

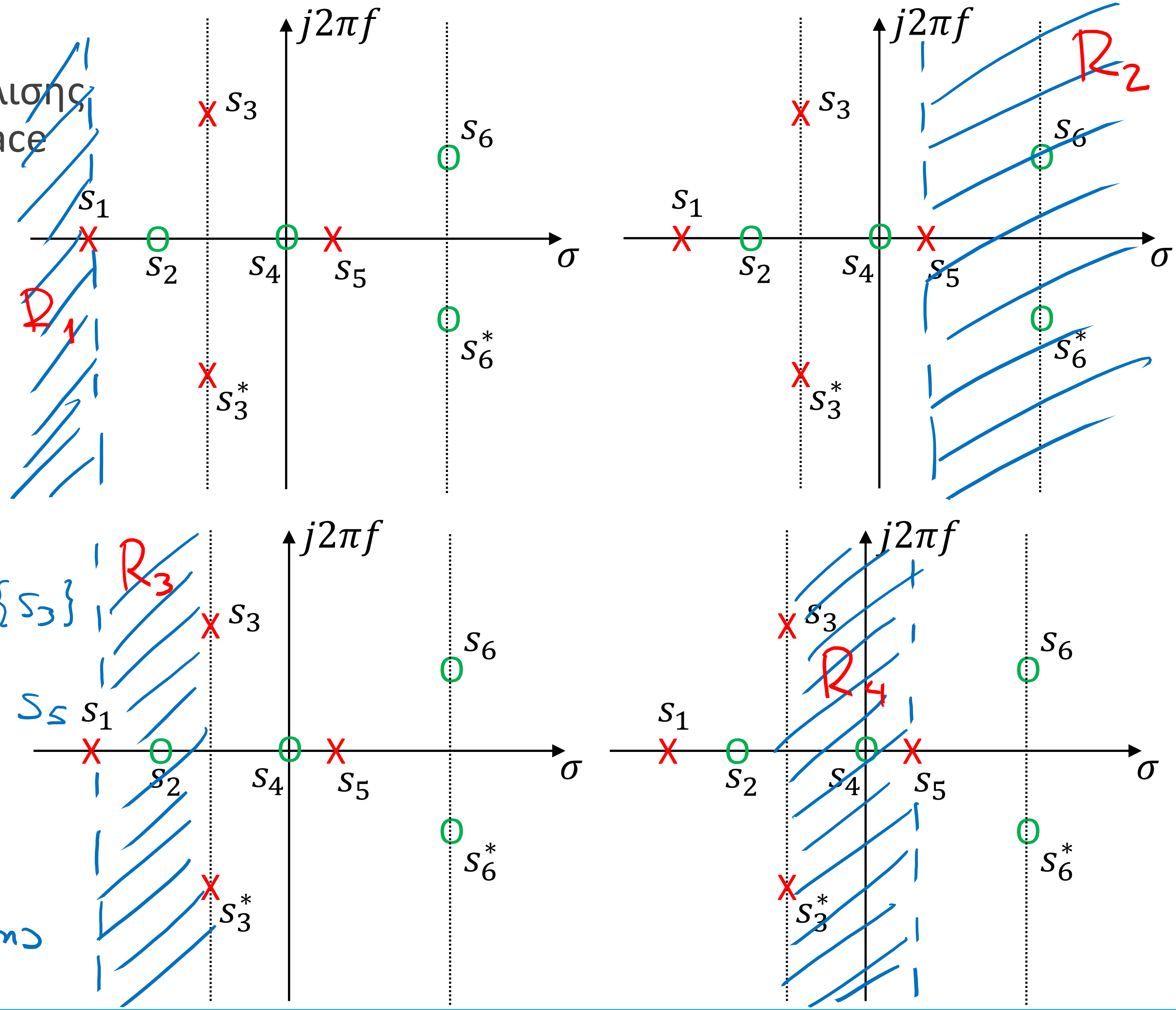
4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

- **Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης**
- Ιδιότητες:

1. Ένα πεδίο σύγκλισης δεν περιέχει **ΠΟΤΕ** πόλους!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
   a) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   b) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου αριστερά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   c) Μια λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
   d) Όλο το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

- **Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης**

- **<u>Quiz</u>**: Ποια είναι τα πιθανά πεδία σύγκλισης για το μετασχ. Laplace που έχει πόλους και μηδενικά όπως στο Σχήμα?



- $\sigma < s_1$
- $\sigma > s_5$
- $s_1 < \sigma < Re\{s_3\}$
- $Re\{s_3\} < \sigma < s_5$

4 πιθανά πεδία σύγκλισης

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f} = X(\sigma + j2\pi f)\Big|_{\sigma=0}$$

- Άρα ο Μετασχ. Fourier είναι μια «**υποπερίπτωση**» του μετασχ. Laplace?

- Άρα ο μετασχ. Laplace είναι μια «**γενίκευση**» του μετασχ. Fourier?

- Η αλήθεια είναι ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να προκύψει εκτιμώντας το μετασχ. Laplace επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. για $s = j2\pi f$

- Όπως και ότι μπορούμε – μερικές φορές – να πάρουμε το μετασχ. Laplace από το μετασχ. Fourier θέτοντας $j2\pi f = s$

- Όμως κάποια πράγματα θέλουν προσοχή… ☺

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- **1.** Για να γίνει η εκτίμηση

$$X(f) = X(s)|_{s=j2\pi f}$$

πρέπει το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace να περιέχει το φανταστικό άξονα

- **2.** Ακόμα κι αν δεν τον περιέχει, δε σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει
  - Απλώς δεν υπολογίζεται μέσω του μετασχ. Laplace
  - Μπορεί να υπάρχει μέσω συναρτήσεων Δέλτα π.χ.

- **3.** Αν το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier συγκλίνει, τότε ο μετασχ. Laplace υπάρχει για κάποιο πεδίο σύγκλισης (το οποίο περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα) και μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $j2\pi f = s$
  - Για παράδειγμα, όταν ο μετασχ. Fourier είναι ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$
  - Ενώ αν χρησιμοποιούμε γενικευμένες συναρτήσεις $\left(\pi.\chi.\, \delta(t)\right)$, η γενίκευση αυτή δε δουλεύει

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

- Βρήκαμε πριν ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \alpha > 0 \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{a + s}, \sigma > -a$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) = X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

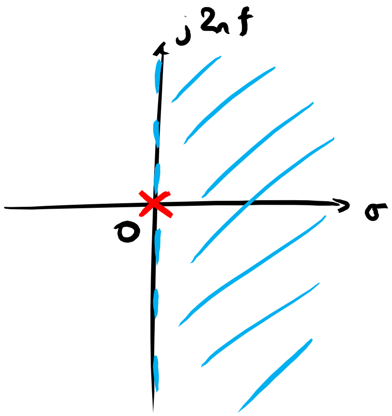
- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Αντίθετα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \sigma > 0$$



- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) \neq X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) \neq X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

- Ο λόγος είναι ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού **δεν περιέχει το φανταστικό άξονα**, αλλά και το ότι ο μετασχ. Fourier δεν προκύπτει από σύγκλιση του ορισμού
  - Χρειαζόμαστε γενικευμένη συνάρτηση για τη σύγκλιση

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- Πέρα όμως από τις τυπικές μαθηματικές σχέσεις, τι άλλο υπάρχει?
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$ για $a = 2$ και $a = 4$
- Προφανώς μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

και

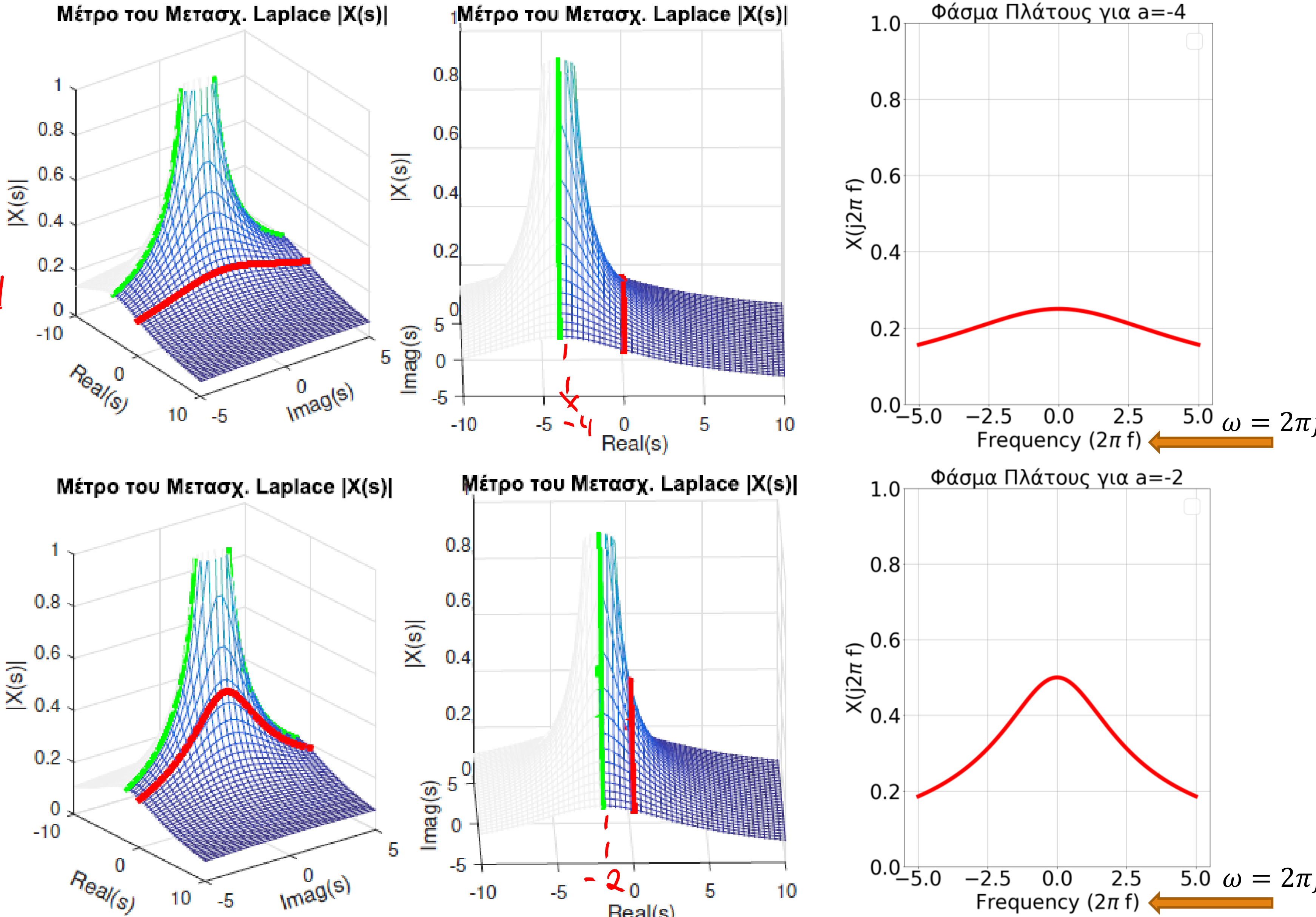
$$X(s) = \frac{1}{a + s} \Rightarrow |X(s)| = \frac{1}{\sqrt{(a+\sigma)^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

- Ας απεικονίσουμε τις δυο περιπτώσεις για τις διαφορετικές τιμές του a
- Προσέξτε ότι το $s = -a$ είναι ο πόλος του μετασχηματισμού Laplace!
  - Δηλ. στα σχήματα που θα δούμε, ο πόλος θα είναι στις θέσεις -4 και -2

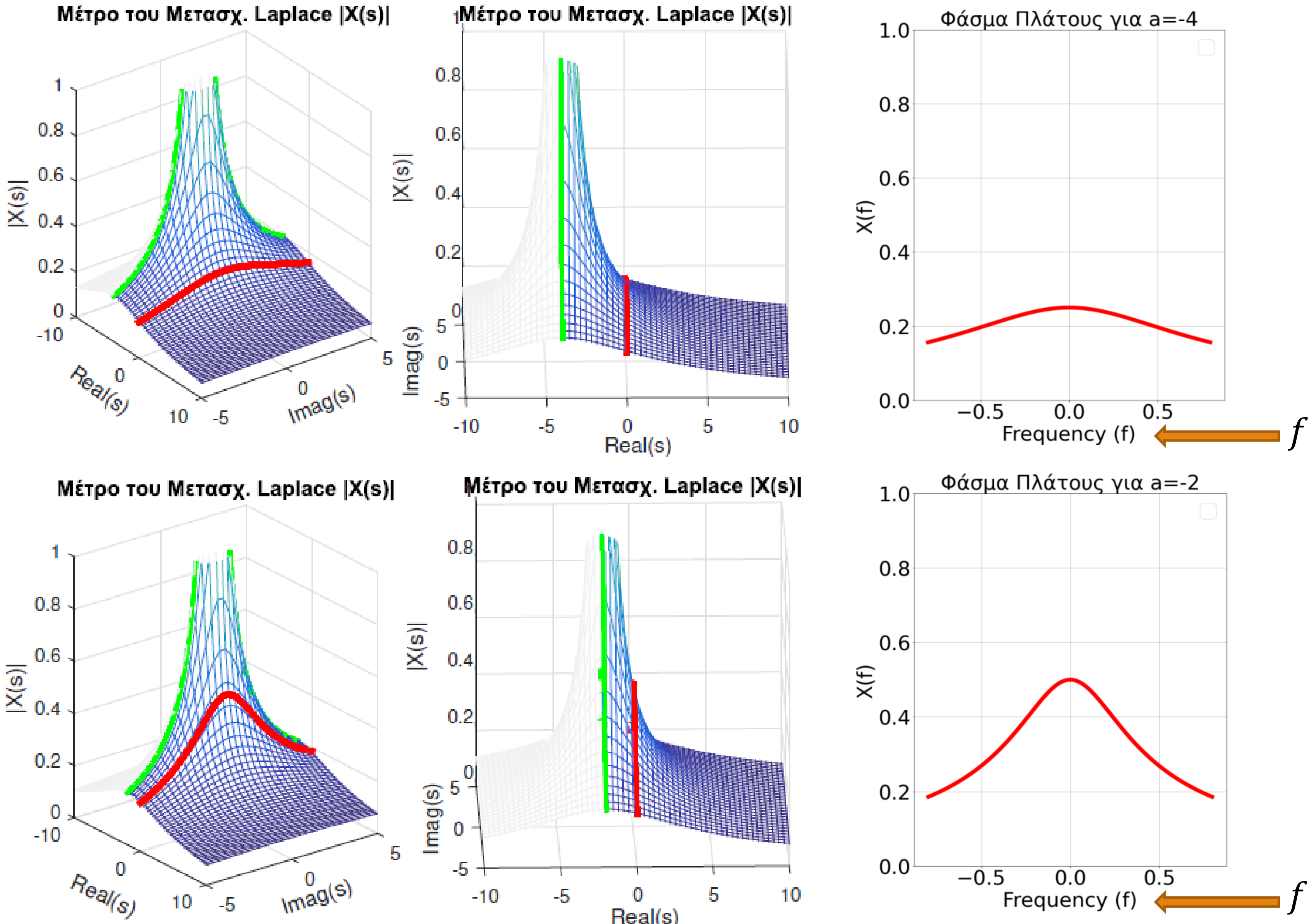
- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

$a=4$
$s=-4$

$a=2$
$s=-2$



• **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**



- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Η προηγούμενη συζήτηση αποκαλύπτει την κύρια χρήση του μετασχ. Laplace: ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων!**

- Το προηγούμενο παράδειγμα μας υποδεικνύει ότι αν θέλουμε να «ενισχύσουμε» πολύ τις συχνότητες γύρω από το μηδέν, μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύστημα της μορφής

$$H(s) = \frac{A}{s+0.5}, \sigma > -0.5$$

Ματιά στο μέλλον

- Το σύστημα αυτό θα έχει μετασχ. Fourier

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 0.5}$$

εφ' όσον το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα

$$\sigma = 0$$

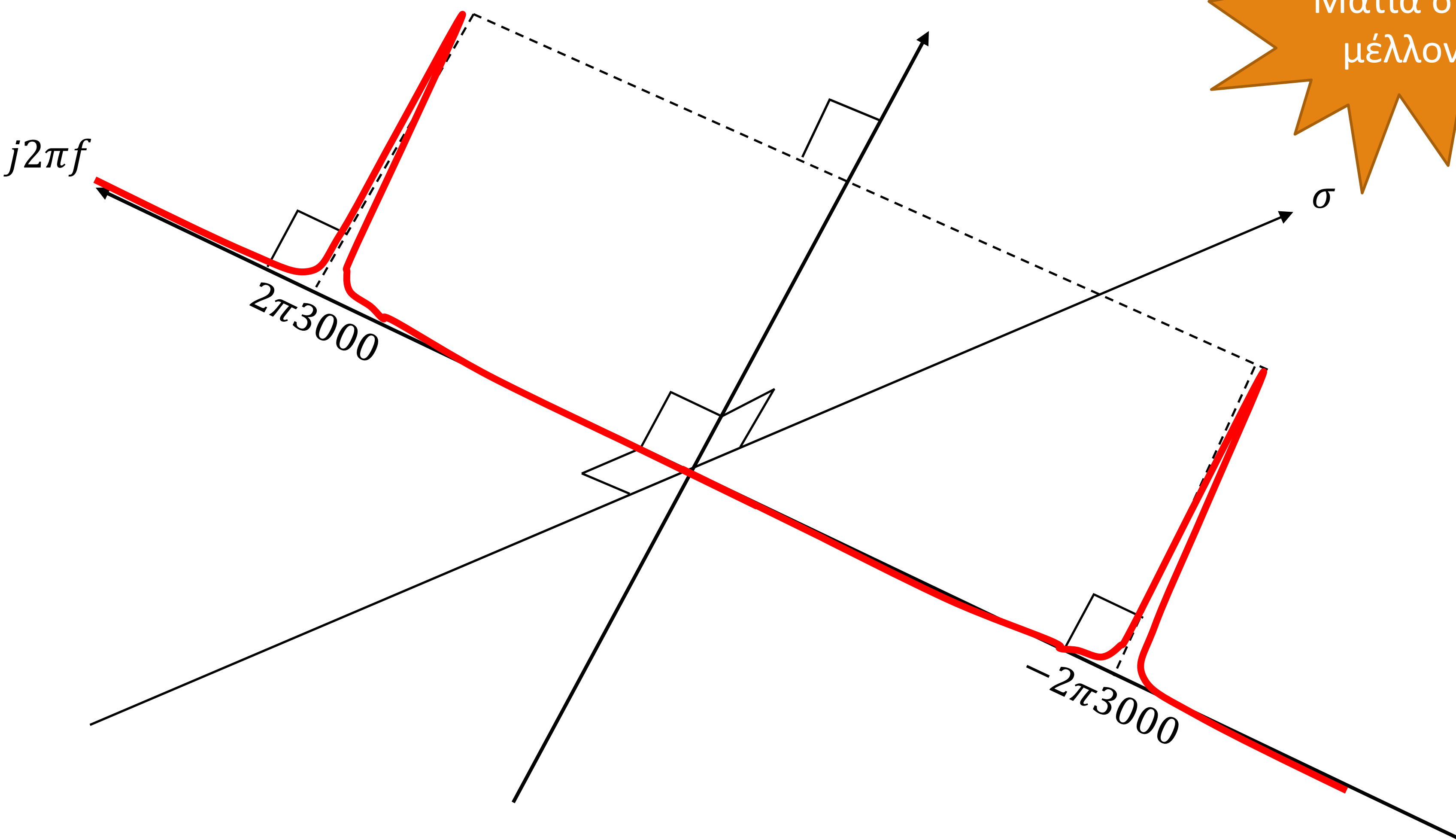
- Η κρουστική του απόκριση θα είναι λοιπόν

$$h(t) = Ae^{-0.5t}u(t)$$

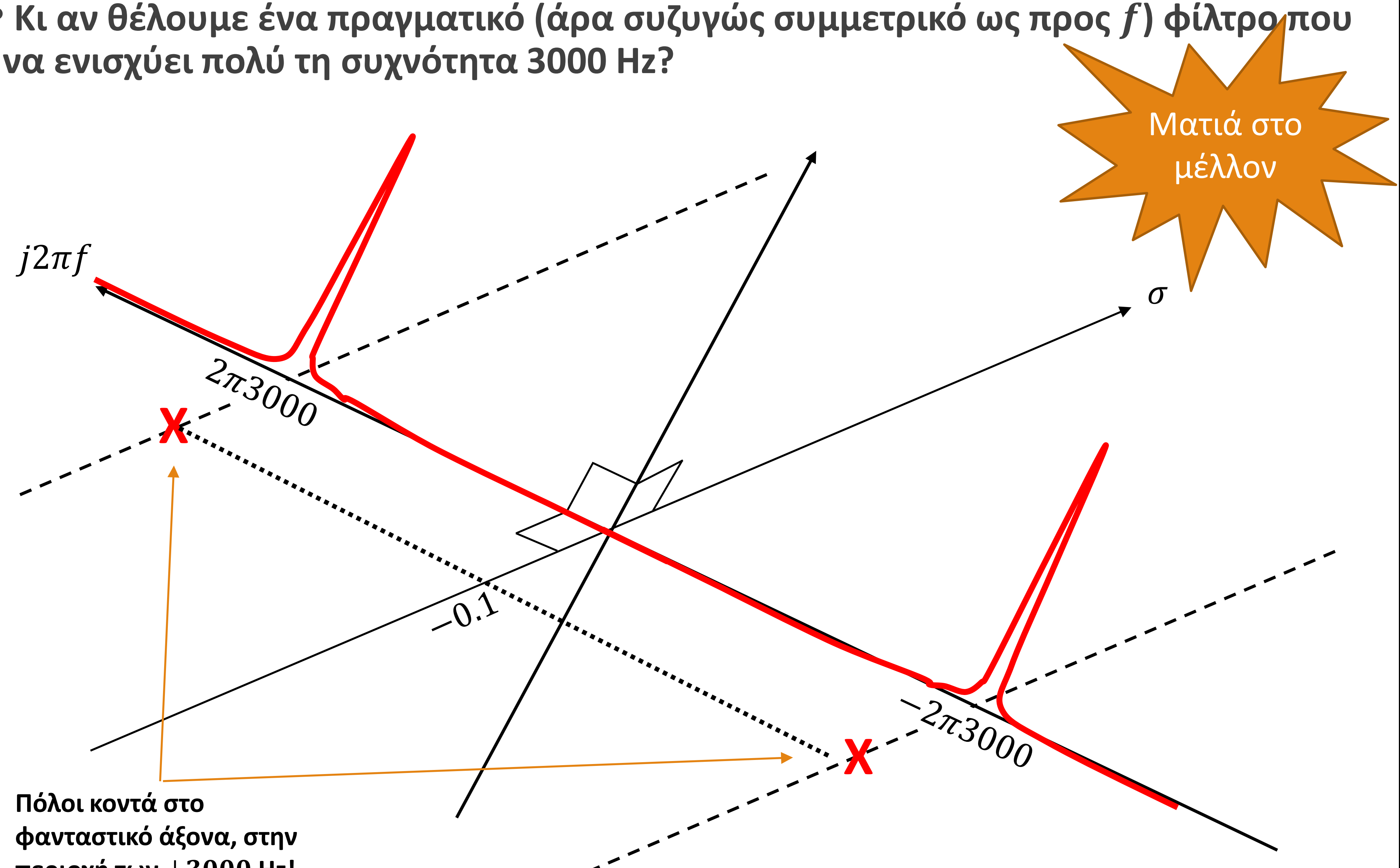
- Αν κάνουμε συνέλιξη ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου (π.χ. ήχο) με την παραπάνω κρουστική απόκριση, οι συχνότητες γύρω από το μηδέν θα ενισχυθούν πολύ σε πλάτος!
  - Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται **χαμηλές**
  - Αντίστοιχα, όλες οι άλλες θα μείνουν περίπου ίδιες (κατά πλάτος) ή (ανάλογα το φίλτρο) θα μεταβληθούν κι αυτές αλλά πολύ λιγότερο σε σχέση με τις χαμηλές

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Κι αν θέλουμε ένα πραγματικό (άρα συζυγώς συμμετρικό ως προς f) φίλτρο που να ενισχύει πολύ τη συχνότητα 3000 Hz?**

Ματιά στο μέλλον



- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Κι αν θέλουμε ένα πραγματικό (άρα συζυγώς συμμετρικό ως προς f) φίλτρο που να ενισχύει πολύ τη συχνότητα 3000 Hz?**



Πόλοι κοντά στο φανταστικό άξονα, στην περιοχή των ± 3000 Hz!

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Ποιό θα είναι το φίλτρο μας στην τελευταία περίπτωση?**

Ματιά στο μέλλον

- Ο ένας πόλος θα αντιστοιχεί σε ένα σύστημα της μορφής

$$H_1(s) = \frac{A_1}{s + (-0.1 + j2\pi 3000)}, \sigma > -0.1$$

και ο άλλος πόλος σε ένα σύστημα της μορφής

$$H_2(s) = \frac{A_2}{s + (-0.1 - j2\pi 3000)}, \sigma > -0.1$$

- Ο συνδυασμός σε σειρά των δυο συστημάτων θα δώσει το σύστημα

$$H(s) = \frac{A_1}{[s + (-0.1 + j2\pi 3000)]} \frac{A_2}{[s + (-0.1 - j2\pi 3000)]}, \sigma > -0.1$$

- Με λίγες πράξεις παίρνουμε

$$H(s) = \frac{A_1 A_2}{s^2 - 0.2s + 3.55\text{x}10^8}, \sigma > -0.1$$

- Σύντομα θα δούμε πως αντιστρέφουμε στο χρόνο ένα τέτοιο κλάσμα.... ☺
  - Στην πράξη, η παραπάνω μορφή μας είναι αρκετή για να υλοποιήσουμε το φίλτρο!!
  - Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με συστήματα στο χώρο του Laplace αργότερα...

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$,	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n-οστη παραγώγιση στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

- Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z(s) = ?$$

$$Z(s) = \int z(t)e^{-st}dt = \int \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-st}dt$$

$$= \int Ax(t)e^{-st}dt + \int By(t)e^{-st}dt$$

$$= A\int x(t)e^{-st}dt + B\int y(t)e^{-st}dt\,, \qquad \mu\varepsilon\ R_x, R_y$$

!?

$$= AX(s) + BY(s), \qquad \mu\varepsilon\ R \supseteq R_x \cap R_y$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Βρείτε το μετασχ. Laplace του αθροίσματος των σημάτων

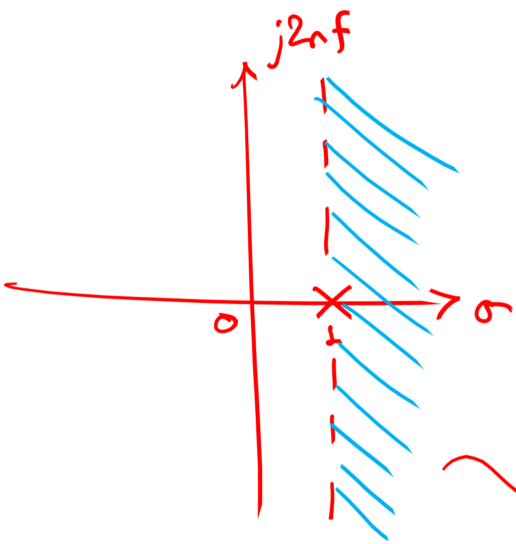
$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \underbrace{\sigma > 2}_{R_x}, \qquad Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)}, \underbrace{\sigma > 2}_{R_y}$$

Είναι

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{(s-1)-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{\cancel{s-2}}{(s-1)\cancel{(s-2)}}$$

$$= \frac{1}{s-1}, \quad R_z = ?$$



$\sigma > 1$

$\sigma < 1$

✓ **Μόνο στην περίπτωση αλληλοεξουδετέρωσης πόλου-μηδενικού είναι πιθανό να έχουμε πεδίο σύγκλισης μεγαλύτερο της τομής των επιμέρους!**

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x

- Απόδειξη:

$$z(t) = x^*(t) \to Z(s) = ?$$

$$Z(s) = \int z(t) e^{-st} dt = \int x^*(t)\, e^{-st} dt$$

$$= \int \left(x(t) e^{-s^* t}\right)^* dt = \left(\int x(t) e^{-s^* t} dt\right)^*$$

$$= \left(X(s^*)\right)^* = X^*(s^*)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Έστω ένα σήμα $x(t) \in \Re$ με ρητό Μετασχ. Laplace $X(s)$. Για το σήμα γνωρίζετε ότι:

- ❑ έχει ένα πόλο στη θέση $s_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{3}}$ κι άλλον ένα πόλο στη θέση s_2, και κανέναν άλλο
- ❑ έχει ένα μηδενικό στη θέση $s_3 = -1$
- ❑ $X(0) = 2$

Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε για το $X(s)$

Επειδή $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = x^*(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = X^*(s^*)$ ①

Ξέραμε ότι ο $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ είναι πόλος του $X(s)$, δηλ:

$X(s_1) \to \infty \overset{①}{\Longrightarrow} X^*(s_1^*) \to \infty$, άρα ο s_1^* είναι επίσης πόλος του $X(s)$! Άρα ο πόλος s_2 είναι ο s_1^*, δηλ. $s_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$.

Συμπέρασμα: οι πόλοι – και τα μηδενικά – του Μετασχηματισμού Laplace ενός πραγματικού σήματος $x(t)$ έρχονται σε συζυγή ζεύγη! Άρα οι δύο πόλοι είναι οι: $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$, $s_1^* = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

$z \cdot z^* = |z|^2$

$s_1 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}$

Άρα

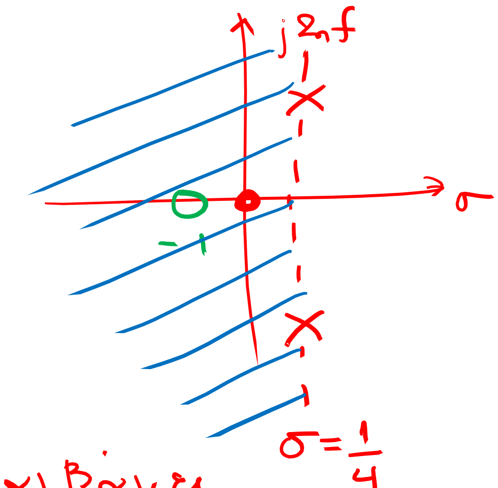
$$X(s) = A \frac{(s+1)}{(s-s_1)(s-s_1^*)}, \quad A \in \mathbb{R}$$

Έχουμε $X(0) = 2 \Leftrightarrow A \dfrac{(0+1)}{(0-s_1)(0-s_1^*)} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{|s_1|^2} = 2 \Leftrightarrow A = 2|s_1|^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s-s_1)(s-s_1^*)}, \quad R_x = ?$$



Πιθανά RCC:

- $\sigma > \frac{1}{4}$ ✗
- $\sigma < \frac{1}{4}$ ✓ γιατί περιλαμβάνει το $X(0) = 2$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

- Απόδειξη:

$$z(t) = x(t) * y(t) \rightarrow Z(s) = ?$$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t) * y(t)\big) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, e^{-st} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(s) e^{-s\tau}\, d\tau, \qquad \mu\varepsilon\ R_y$$

$$= Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau = Y(s) X(s), \qquad \mu\varepsilon\ R \supseteq R_x \cap R_y$$

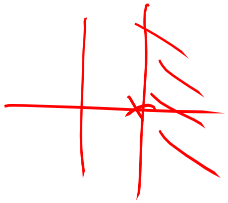
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Έστω δυο σήματα $x(t) = e^{at}u(t)$, $y(t) = e^{2at}u(t)$, $\alpha > 0$. Υπολογίστε τη συνέλιξη τους.

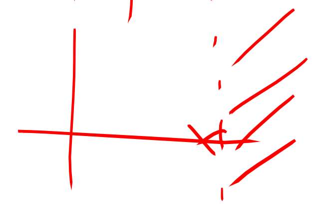
• 1η μέθοδος: $C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \dots$

• 2η μέθοδος:

$$x(t) = e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a} = X(s), \quad \sigma > a$$



$$y(t) = e^{2at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-2a} = Y(s), \quad \sigma > 2a$$



$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-2a)(s-a)}, \quad R_{xy} = R_x \cap R_y = \{\sigma > 2a\}.$$

Άρα $C_{xy}(s) = \dfrac{A}{s-2a} + \dfrac{B}{s-a}$

$$A = C_{xy}(s)(s-2a)\Big|_{s=2a} = \frac{1}{\cancel{(s-2a)}(s-a)}\cancel{(s-2a)}\Big|_{s=2a} = \frac{1}{s-a}\Big|_{s=2a} = \frac{1}{a}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Όμοια, $B = -\frac{1}{a}$, άρα:

$\{\sigma > a\} \cap \{\sigma > 2a\}$ (*)

$$C_{xy}(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s-2a} - \frac{1}{a} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > 2a$$

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

Από πίνακες έτοιμων μετασχηματισμών

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{a} e^{2at} u(t) - \frac{1}{a} e^{at} u(t)$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{2at} - e^{at}\right)u(t)$$

(*) $\frac{1}{a} \frac{1}{s-2a} - \frac{1}{a} \frac{1}{s-a}$, $\sigma > 2a$

- $\sigma > 2a$ ✓
- $\sigma < 2a$ ×

- $\sigma > a$ ✓
- $\sigma < a$ ×

⟶ έτσι ώστε η τομή τους να είναι το $\{\sigma > 2a\}$!

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2}-e^{-sT/2})$	Όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$

- **Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace**

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$e^{-a\|t\|},\ a>0$	$\frac{2a}{a^2-s^2}$	$a > \mathrm{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$t\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-(2\pi f_0)^2}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

- **Ο Μονόπλευρος Μετασχ. Laplace**

- Μονόπλευρος μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Ουσιαστικά αποτελεί το μετασχ. Laplace που ξέρουμε ήδη, αλλά για αιτιατά σήματα

- Κάποιες ιδιότητες είναι λίγο διαφορετικές

- **Εν αντιθέσει με το (δίπλευρο) μετασχ. Laplace, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace λαμβάνει υπ'οψη του τις (όποιες) αρχικές συνθήκες!**
  - **Πράγμα πολύ χρήσιμο όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε Μετασχ. Laplace σε διαφορικές εξισώσεις! ☺**

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big]_{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$
$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}, \qquad \sigma < -2$$

Είναι $s^2 - 3s - 10 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$ → $s_1 = 5$, → $s_2 = -2$

Άρα

$$X(s) = \frac{s+7}{(s-5)(s+2)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+2}, \quad \sigma < -2$$

$$A = X(s)(s-5)\Big|_{s=5} = \frac{s+7}{\cancel{(s-5)}(s+2)}\cancel{(s-5)}\Big|_{s=5} = \frac{s+7}{s+2}\Big|_{s=5} = \frac{12}{7}$$

$$B = X(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{(s-5)\cancel{(s+2)}}\cancel{(s+2)}\Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{s-5}\Big|_{s=-2} = -\frac{5}{7}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{12/7}{s-5} - \frac{5/7}{s+2}, \quad \sigma < -2$$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

Ξανά,

$$X(s) = \frac{12/7}{s-5} - \frac{5/7}{s+2}, \quad \underbrace{\sigma < -2}_{R_x}$$

- $\sigma > 5$
- $\sigma < 5$

- $\sigma > -2$
- $\sigma < -2$

$\longrightarrow \{\sigma < 5\} \cap \{\sigma < -2\} = R_x$

Από έτοιμα ζεύγη Μετ. Laplace

$$x(t) = -\frac{12}{7}e^{5t}u(-t) + \frac{5}{7}e^{-2t}u(-t)$$

$$= \left(\frac{5}{7}e^{-2t} - \frac{12}{7}e^{5t}\right)u(-t).$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

$$\sin(2\pi f_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$$

- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}, \sigma > 0$$

• 1η μέθοδος: $X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2j} + \frac{C}{s+2j}, \sigma > 0 = \dots$

• 2η μέθοδος: Είναι $X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{s} Y(s)$, $Y(s) \to \frac{1}{s^2+4}$

$= \frac{Y(s)}{s} \xleftrightarrow{L^{-1}} \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$ (1)

Αναζητείται το $y(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{s^2+4}, \sigma > 0 = \frac{1}{s^2+2^2}, \sigma > 0$

$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{s^2+2^2}, \sigma > 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2}, \sigma > 0 \xleftrightarrow{L^{-1}} \underbrace{\frac{1}{2}\sin(2t)u(t)}_{y(t)}$ (2)

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

$$\sin(2\pi f_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$$

Η ① λόγω ②:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau \\ y(t) &= \frac{1}{2}\sin(2t)u(t) \end{aligned}\right\} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\sin(2\tau)\underbrace{u(\tau)}_{\substack{1,\ \tau>0 \\ 0,\ \tau<0}}d\tau =$$

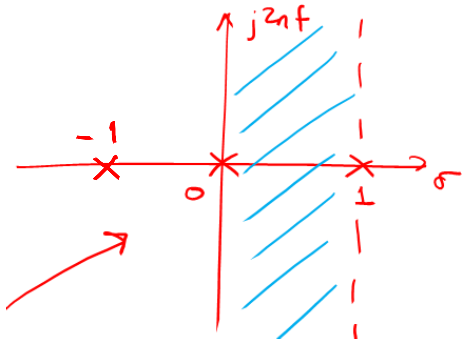
$$= \int_{0}^{t} \frac{1}{2}\sin(2\tau)\cdot 1\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \sin(2\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2\tau)\right)\Bigg|_{0}^{t} = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t),$$

$\underline{t > 0}$, άρα

$$x(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t)\right)u(t)$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του



$$X(s) = \frac{s^2+2}{s^3-s}, \qquad 0 < \sigma < 1$$

→ προβλέπουμε ότι το x(t) θα είναι αμφίπλευρο!

Είναι

$$X(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2-1)} = \frac{s^2+2}{s(s-1)(s+1)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{\Gamma}{s+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

$$A = X(s)\,s\Big|_{s=0} = -2, \quad B = X(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{3}{2}, \quad \Gamma = \frac{3}{2}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{-2}{s} + \frac{\frac{3}{2}}{s-1} + \frac{\frac{3}{2}}{s+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$
$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

Άρα

$$X(s) = -2\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1}, \quad 0<\sigma<1$$

Ποιά τα πιθανά πεδία σύγκλισης των επιμέρους κλασμάτων?

- $\sigma > 0$
- $\sigma < 0$
- $\sigma > -1$
- $\sigma < -1$
- $\sigma > 1$
- $\sigma < 1$

Πρέπει να επιλέξουμε τα R_1, R_2, R_3 τέτοια ώστε

$$R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{0<\sigma<1\}$$

Άρα τελικά, από πίνακες ζευγών:

$$x(t) = -2u(t) + \frac{3}{2}e^{-t}u(t) - \frac{3}{2}e^{t}u(-t)$$

Αμφίπλευρο!
(όπως αναμενόταν)

- **Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής**
- **Θεώρημα Αρχικής Τιμής**
- Προϋποθέσεις

i. Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό

ii. Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0^+)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

- **Θεώρημα Τελικής Τιμής**
- Προϋποθέσεις

i. Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό

ii. Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ