ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ $12^{\text{Η}}$

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$

- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το **μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης** για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού

- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και “απλά” πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος ονομάζεται

απόκριση σε συχνότητα

ή

συχνοτική απόκριση

- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

- **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- **Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως το σύστημα επηρεάζει το πλάτος της εισόδου**
- **Η απόκριση φάσης περιγράφει πως το σύστημα επηρεάζει τη φάση της εισόδου**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου***
- **Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου***

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

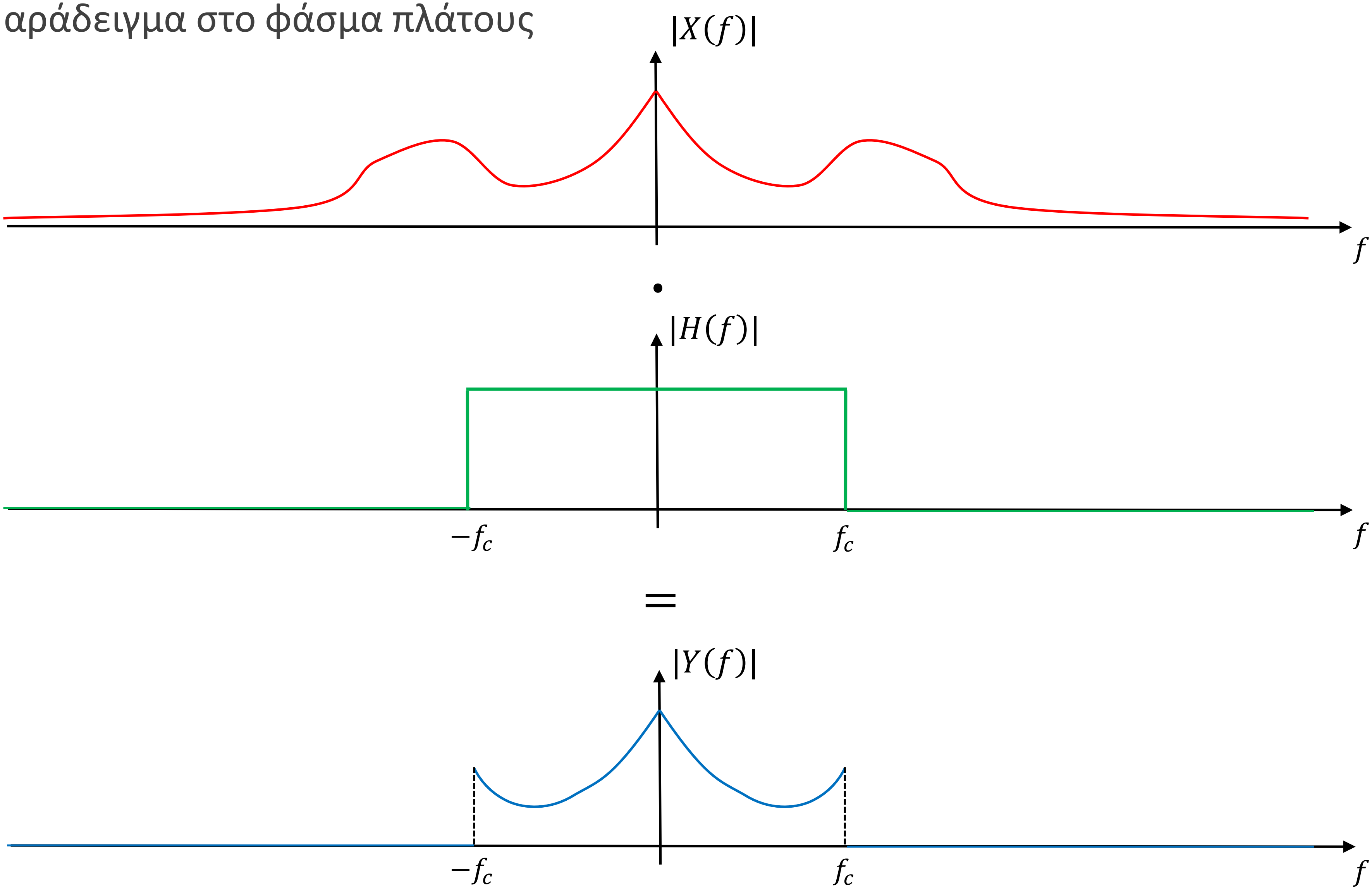
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

$$\boxed{\begin{gathered} |Y(f)| = |X(f)||H(f)| \\ \phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f) \end{gathered}}$$

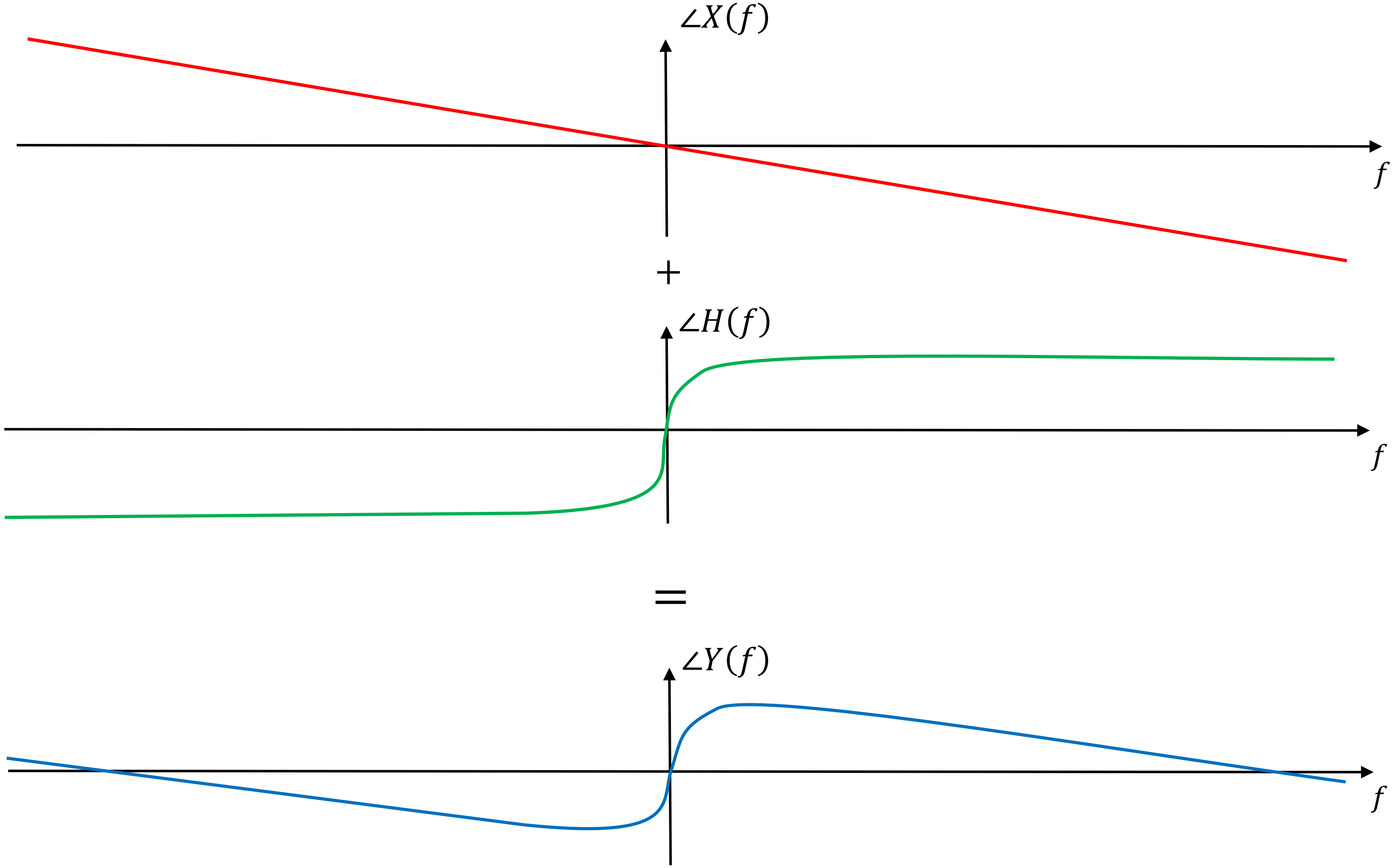
- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

Ένα σύστημα μπορεί να μειώνει/ενισχύει το πλάτος κάποιων συχνοτήτων και να αλλάζει τη φάση τους

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$Y(f)\sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i = X(f)\sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l \Leftrightarrow \frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί – υποθέτοντας απλές ρίζες – να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Είναι

$$y'(t) + 2y(t) = -6x'(t) + 3x(t)$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = -6 \cdot j2\pi f X(f) + 3X(f)$$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Διαιρώντας τα πολυώνυμα

$$
\begin{array}{r|l}
-\cancel{6j2\pi f} + 3 & j2\pi f + 2 \\ \hline
-(-\cancel{6j2\pi f} - 12) & -6 \\ \hline
15 &
\end{array}
$$

Άρα

$$H(f) = -6 + \frac{15}{2 + j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$h(t) = -6\,\delta(t) + 15\,e^{-2t}u(t)$$

από πίνακες έτοιμων ζευγών Μετασχ. Fourier.

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – **εναλλακτική λύση**:

Όμοια με πριν, καταλήξαμε στο $H(f) = \frac{3-6j2\pi f}{2+j2\pi f}$.

Είναι $H(f) = \frac{3}{2+j2\pi f} - j2\pi f \frac{6}{2+j2\pi f}$ (1)

Ξέραμε ότι $\frac{3}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} 3e^{-2t}u(t)$ (3) αλλά πως θα βρούμε τον

A.M.F. του $j2\pi f \frac{6}{2+j2\pi f}$? Από την ιδιότητα της παραγώγισης!

Έστω $Y(f) = j2\pi f \frac{6}{2+j2\pi f} = j2\pi f\, Z(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} y(t) = \frac{d}{dt} z(t)$

με $z(t) = F^{-1}\left\{\frac{6}{2+j2\pi f}\right\} = 6e^{-2t}u(t)$. Άρα $y(t) = \frac{d}{dt} 6e^{-2t}u(t)$

$= 6\cdot(e^{-2t})'u(t) + 6e^{-2t}u'(t) = -12e^{-2t}u(t) + 6e^{-2t}\delta(t)$

$= -12e^{-2t}u(t) + 6\delta(t)$ (2)

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – **εναλλακτική λύση**:

Από τις 1, 2, 3 θα έχουμε

$$H(f) = \frac{3}{2+j2\pi f} - j2\pi f \frac{6}{2+j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$h(t) = 3e^{-2t}u(t) - \left(-12e^{-2t}u(t) + 6\delta(t)\right)$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?

- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο ⟷ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε (υποθέτοντας απλές ρίζες)

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

- Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Είναι

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{F} H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}$$

$$x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}.$$

Οπότε

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \frac{5+3\overbrace{j2\pi f}^{\omega}}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

1ου β.

3ου β.

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{\Gamma}{3+j2\pi f}, \text{ με}$$

$$A = Y(f)(1+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5+3j2\pi f}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5-3}{2} = 1$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi f}, \quad a>0$$

Όμοια, $B=1$, $\Gamma=-2$. Άρα

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{-2}{3+j2\pi f}$$

Από πίνακες έτοιμων μετασχηματισμών Fourier

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t).$$

Συνεχίζεται... ☺