ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 11Η

- Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

- **Μετασχηματισμός Fourier και Σήματα Ισχύος**
- Ο μετασχ. Fourier είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο ανάλυσης **απεριοδικών** σημάτων
- Μήπως θα μπορούσαμε να βάλουμε «κάτω από την ομπρέλα» του και άλλες κατηγορίες σημάτων?
- Π.χ. **Σήματα ισχύος**?
  - Δηλ. περιοδικά και απεριοδικά σήματα ισχύος
- Μα τα σήματα ισχύος **ΔΕΝ** έχουν μετασχ. Fourier!!
- Το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού **ΔΕ** συγκλίνει ομοιόμορφα (για κάθε f) για αυτήν την κατηγορία σημάτων
- Παρ’ όλα αυτά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier σε συνδυασμό με συναρτήσεις Δέλτα για να περιγράψουμε συχνοτικά ΚΑΙ τέτοιού είδους σήματα (ισχυός)!! ☺
- Αρχικά θα περιγράψουμε με όρους μετασχ. Fourier **περιοδικά σήματα που αναπτύσσονται σε σειρά Fourier**!
- Μετά θα δούμε μια τεχνική που μπορεί να περιγράψει συχνοτικά ΚΑΙ **απεριοδικά σήματα ισχύος**, όπως η βηματική συνάρτηση! ☺

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**
- Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Μ.F. ενός απλού ημιτόνου $\cos(2\pi f_0 t)$
- Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται (δε συγκλίνουν για κάθε f)

$$= \frac{1}{2}\, \mathrm{F}\{\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}\, \mathrm{F}\{\mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}\}$$

- Όμως ξέρουμε ότι

$$e^{\pm j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f \mp f_0)$$

- Οπότε

$$\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, και αφού μπορούμε να περιγράψουμε “κάθε” περιοδικό σήμα ως μια Σειρά Fourier, θα έχουμε

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

- Όμως πάλι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το X_k για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω
  - Κάτι που είναι «επίπονο»... ☺

- **Μπορούμε άραγε να βρούμε τους συντελεστές Fourier πιο εύκολα?**
  - Μέσω του Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος ίσως?

- Στο παραπάνω θα μας βοηθήσει η γνωστή μας σχέση από τις σειρές Fourier

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ο μετασχ. Fourier της τελευταίας σχέσης θα είναι

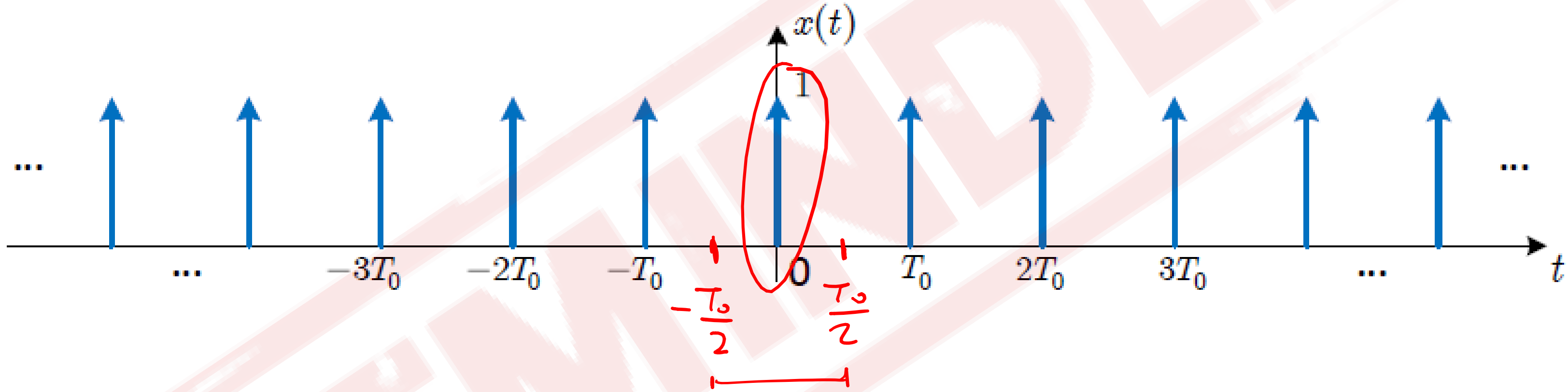
$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta(f - k f_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- **Παράδειγμα:**
  - Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

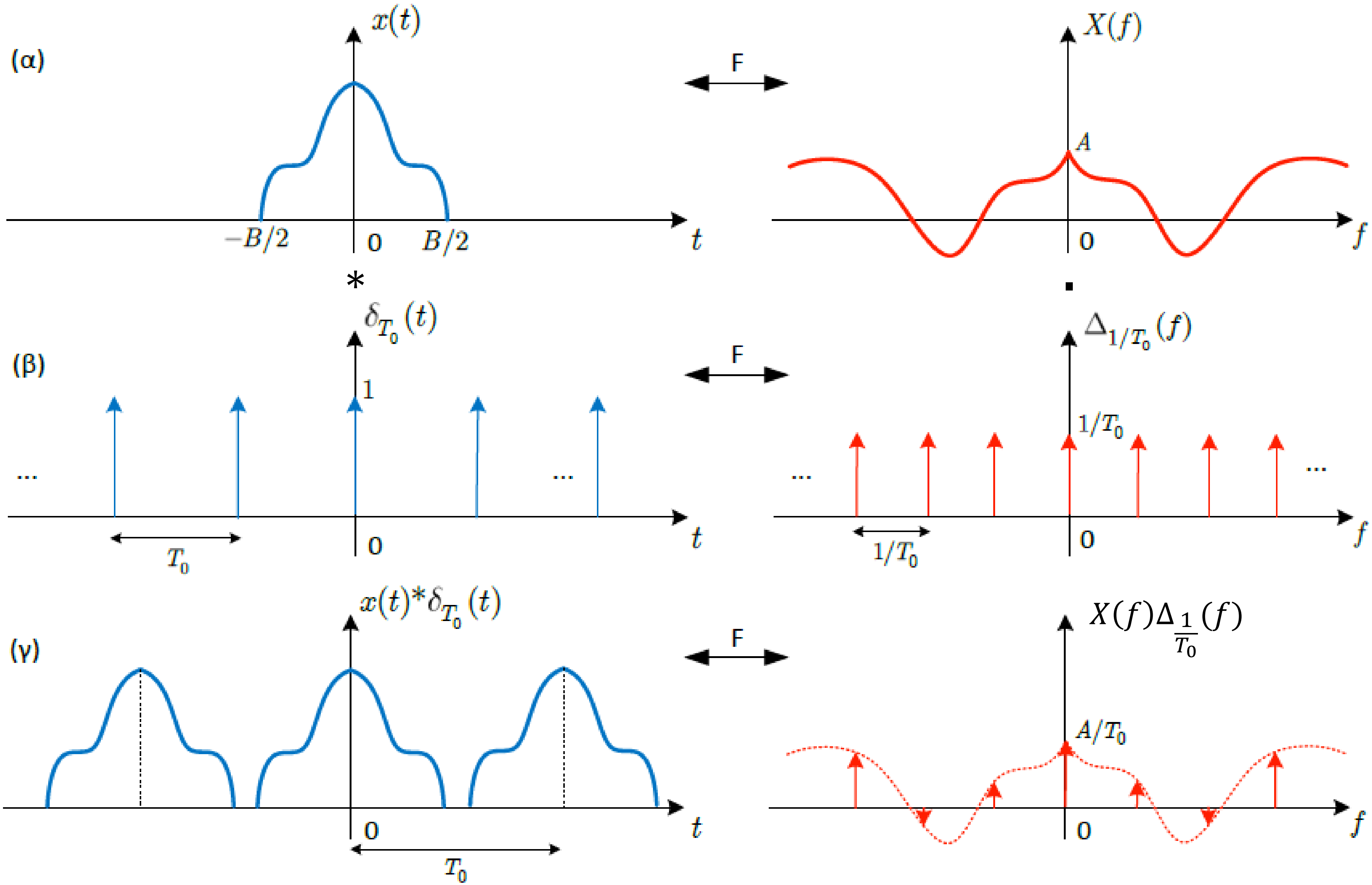


Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

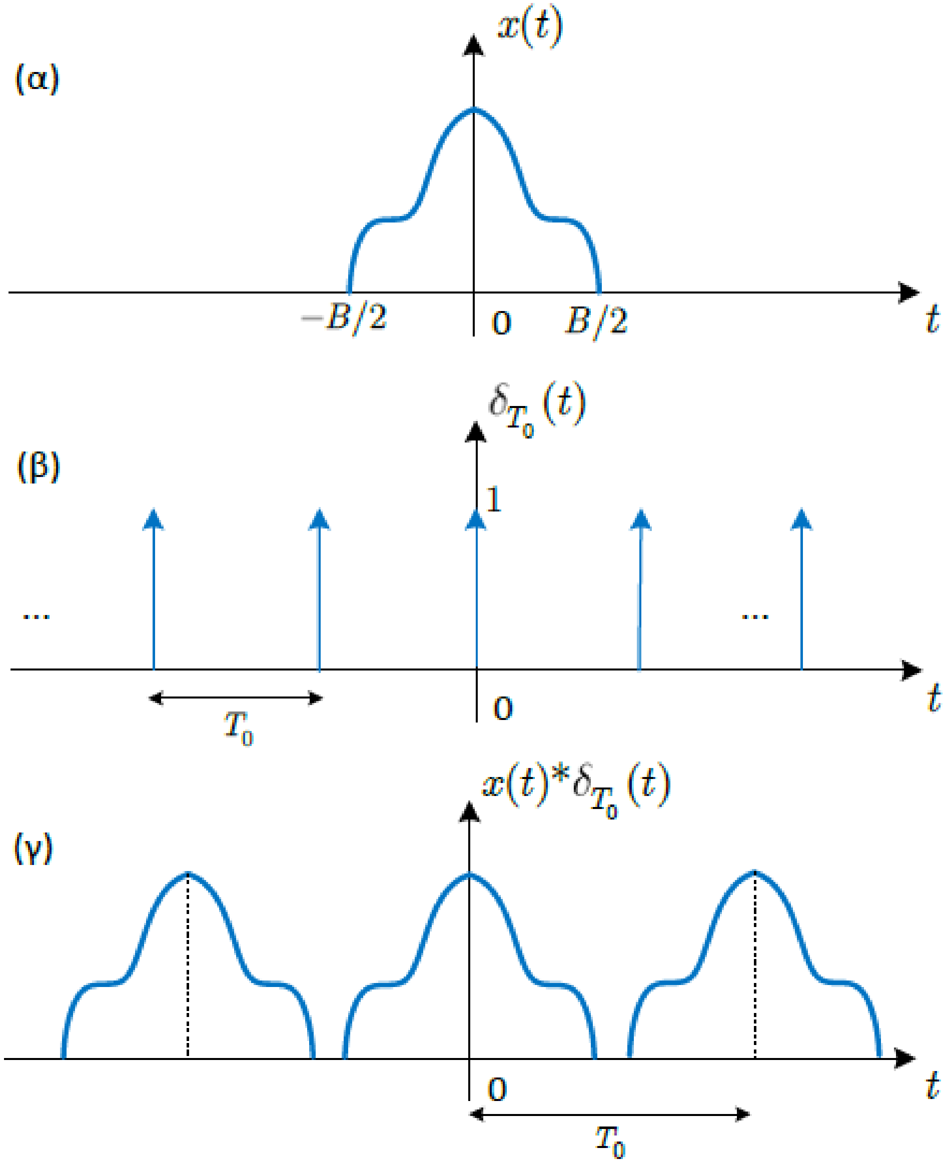
$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} e^{0} = \frac{1}{T_0} \longrightarrow \boxed{X_k = \frac{1}{T_0}}$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα



- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$



$$x(t)$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$x(t) * \delta_{T_0}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0)$$

Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$X(f)\delta(f-f_0) = X(f_0)\delta(f-f_0)$$

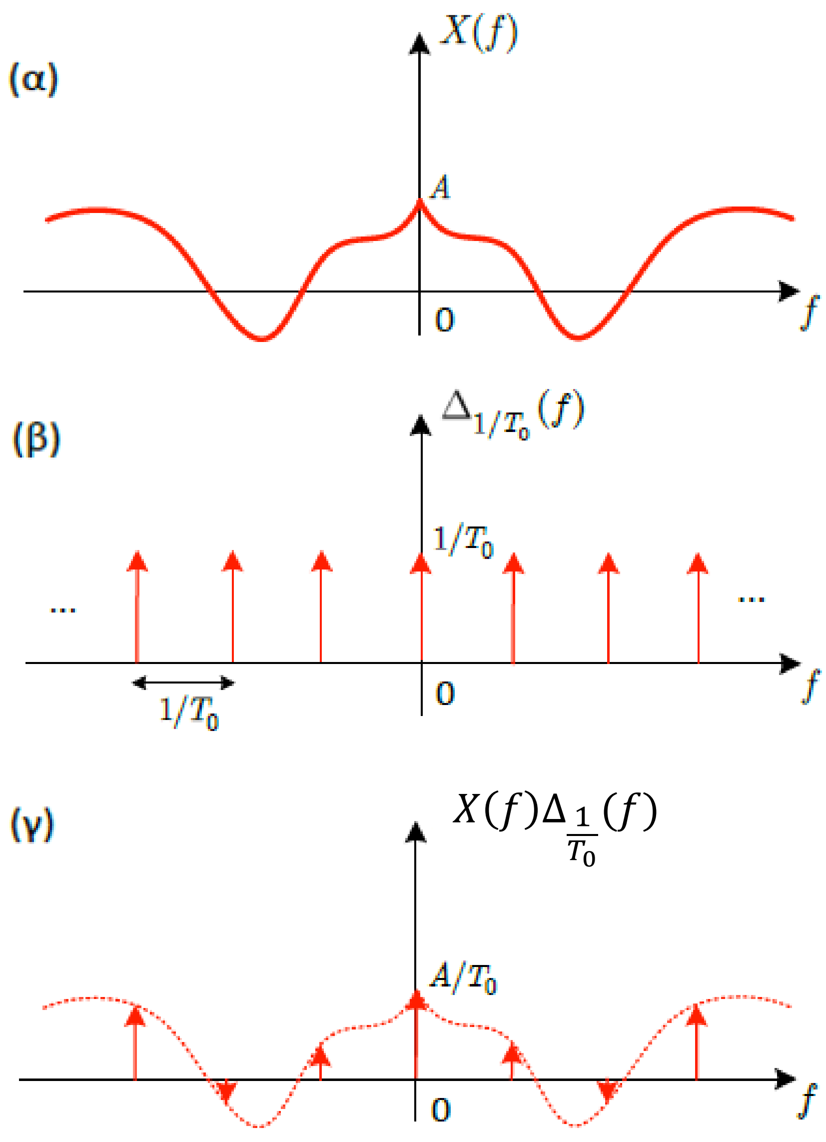
$$X(f)$$

$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

$$X(f)\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = X(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}X(f)\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}X\left(k\frac{1}{T_0}\right)\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$



- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- Άρα αφού

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X_k} \delta\left(f - k f_0\right)$$

και

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{1}{T_0} X\left(k\frac{1}{T_0}\right)} \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$$

οι συντελεστές Fourier μπορούν να προκύψουν από το Μετασχ. Fourier <u>μιας περιόδου</u> του περιοδικού σήματος από τη σχέση

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)}$$

δηλ. **αρκεί να δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ανά $\frac{k}{T_0}$ και ό,τι προκύψει να το πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{T_0}$!!!!**

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Συνοψίζοντας:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

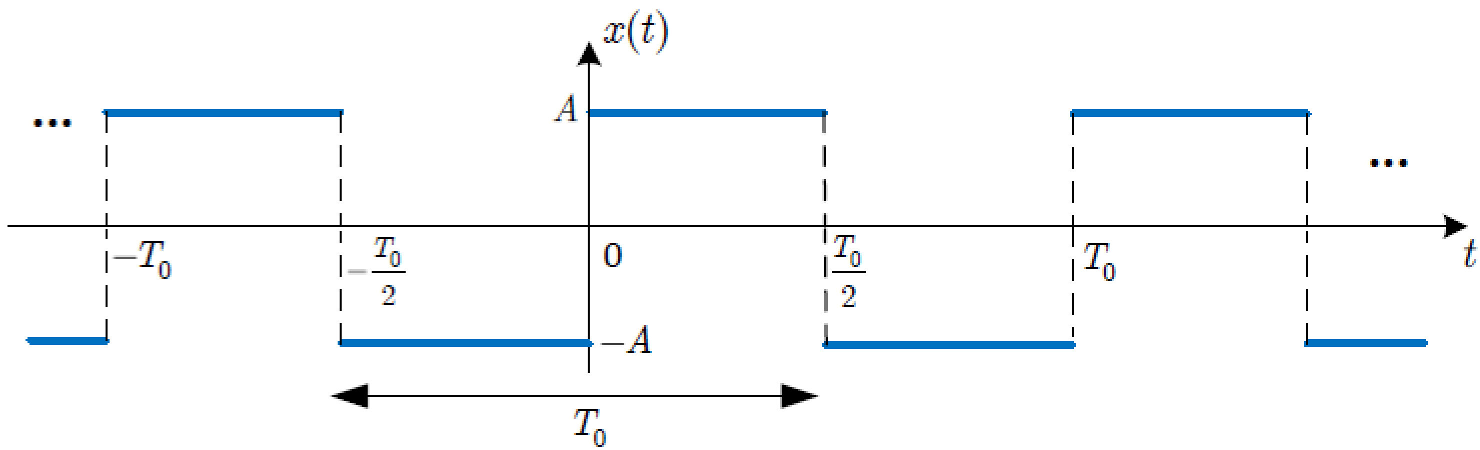
- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε *μια* περίοδο του σήματος $x(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = kf_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$

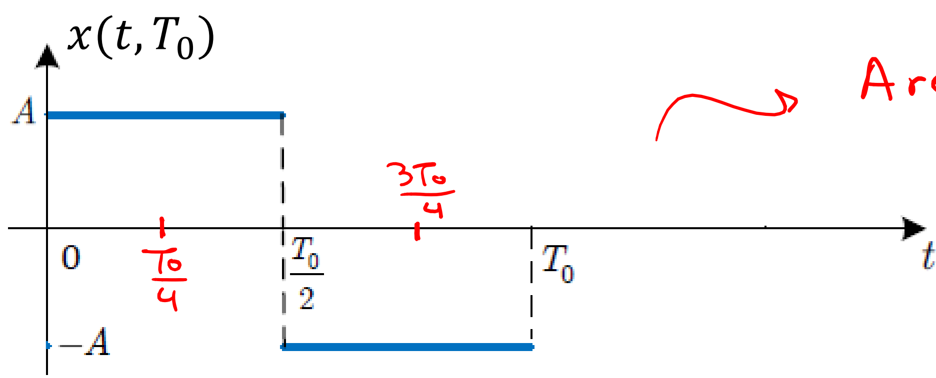
$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- **Παράδειγμα:** υπολογίστε τους συντελεστές Fourier για το περιοδικό σήμα με τιμές $\{A, -A\}$ που αναλύσατε στις διαφάνειες των Σειρών Fourier και δείξτε ότι ισούνται με

$$X_k = \frac{A}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)e^{-\frac{j\pi}{2}}, \qquad k \neq 0$$





$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{T_0/2}\right) - A\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{3T_0}{4}}{T_0/2}\right)$$

ΜΙΑ περίοδος του περιοδικού σήματος

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Το σήμα μιας περιόδου του περιοδικού σήματος γράφεται ως

$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\right) - A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{3T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\right)$$

με μετασχ. Fourier

$$X(f) = A\frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{T_0}{4}} - A\frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{3T_0}{4}}$$

$$= \frac{AT_0}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)\left(e^{-j\pi f\frac{T_0}{2}} - e^{-j3\pi f\frac{T_0}{2}}\right)$$

$$= \frac{AT_0}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)e^{-j\pi f T_0}\left(e^{j\pi f\frac{T_0}{2}} - e^{-j\pi f\frac{T_0}{2}}\right)$$

$$= \frac{AT_0}{\cancel{2}}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)e^{-j\pi f T_0}\,\cancel{2}j\,\sin\left(\pi f\frac{T_0}{2}\right)$$

$$= jAT_0\,e^{-j\pi f T_0}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\pi f\frac{T_0}{2}\right)$$

Άρα

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{\cancel{T_0}}jA\cancel{T_0}\,e^{-j\pi\frac{k}{\cancel{T_0}}\cancel{T_0}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{k}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{2}\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

$$= jAe^{-j\pi k}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \quad (1)$$

- $e^{-j\pi k} = \left(e^{-j\pi}\right)^k = (-1)^k \quad (2)$

- $\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\pi\frac{k}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}} =$

$$= \frac{\pi k}{2}\cdot\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2}\right) = \frac{\pi k}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

Όμως $\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \frac{4}{\pi^2k^2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \frac{2}{\pi^2k^2}\left(1-(-1)^k\right), \ \forall\, k$

άρα $\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{\cancel{\pi k}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\pi^{\cancel{2}}k^{\cancel{2}}}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{1}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right). \quad (3)$

Η (1) λόγω (2),(3) δίνει

$$X_k = jA(-1)^k\frac{1}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)$$

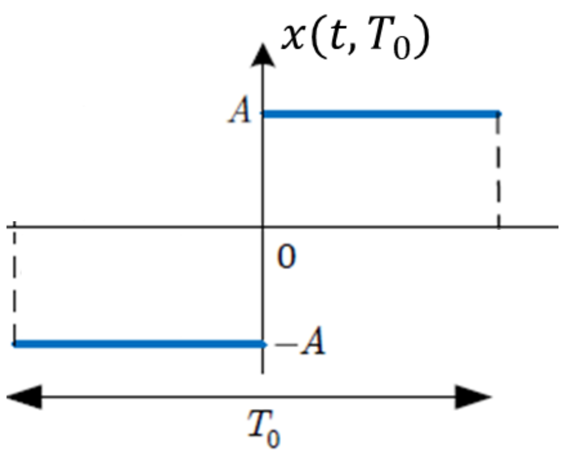
- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

$$= jA\frac{1}{\pi k}\left((-1)^k - (-1)^{2k}\right)$$

$$= j\frac{A}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= -j\frac{A}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= \frac{A}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$



Στο αμφιθέατρο, επιλέξαμε αυτήν την περίοδο και καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα (όπως αναμενόταν)

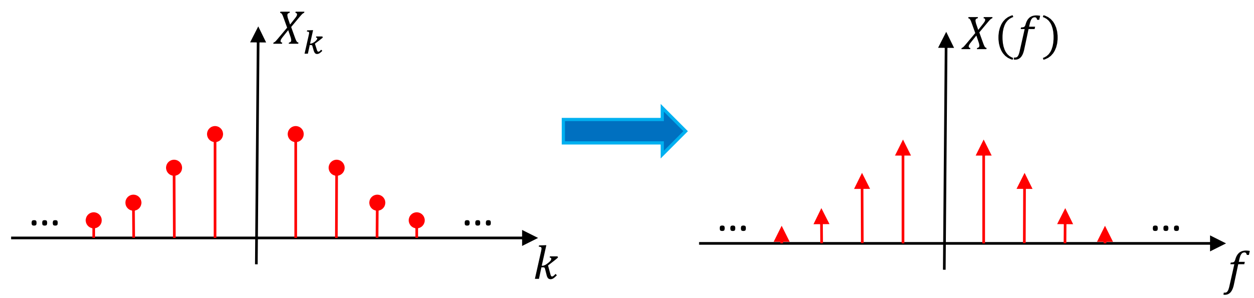
- **Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος – Review ως τώρα**

- <u>Ερώτηση</u>: μπορούμε να βάλουμε «κάτω από την ομπρέλα» του μετασχ. Fourier και σήματα που δεν «έχουν» μετασχ. Fourier?

- Για **περιοδικά** σήματα που αναπτύσσονται σε σειρά Fourier, είναι απλό! ☺

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

χρησιμοποιώντας το ζεύγος $e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)$



- Side-αποτέλεσμα:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}}$$

με $X(f, T_0)$ ο μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του περιοδικού σήματος

- Και όσον αφορά τα **απεριοδικά** σήματα ισχύος??

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**

- Γνωρίζουμε ότι τα σήματα ισχύος δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα, οπότε δεν έχουν Μετασχ. Fourier

- Μπορούμε άραγε να εκμεταλλευτούμε τη χρήση «ιδιαίτερων» συναρτήσεων όπως η συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε μια τέτοια έκφραση?

- Μπορούμε να γράψουμε ένα **απεριοδικό** σήμα **ισχύος** ως

$$x(t) = x_0 + x_z(t)$$

με

- x_0 τη μέση τιμή του σήματος (αριθμός)

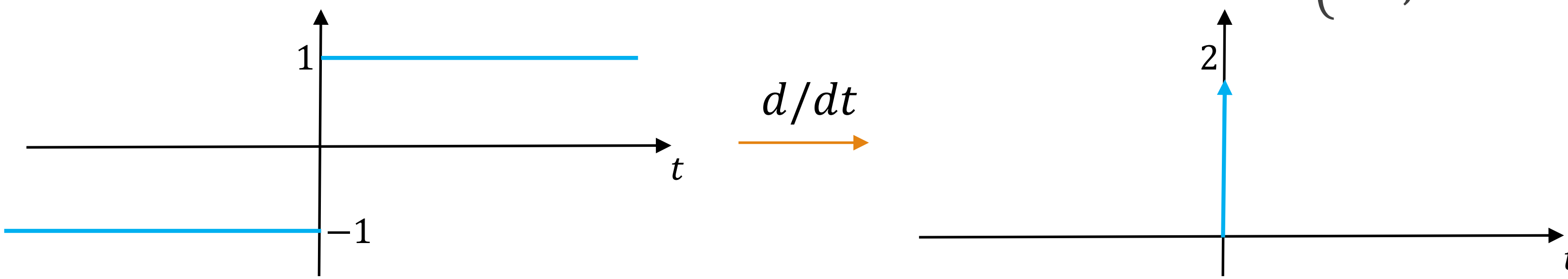
$$x_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

- $x_z(t)$ το υπόλοιπο σήμα μηδενικής μέσης τιμής, $x_z(t) = x(t) - x_0$

- Τότε

$$X(f) = x_0\delta(f) + X_z(f)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**
- Ως παράδειγμα, για το μετασχ. Fourier του σήματος $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x_0 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{sgn}(t)\, dt = 0$$

- Άρα

$$\mathrm{sgn}(t) = x(t) = 0 + x_z(t) \leftrightarrow X(f) = 0 \cdot \delta(f) + X_z(f) = X_z(f)$$

- Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_z(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Leftrightarrow X_Z(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

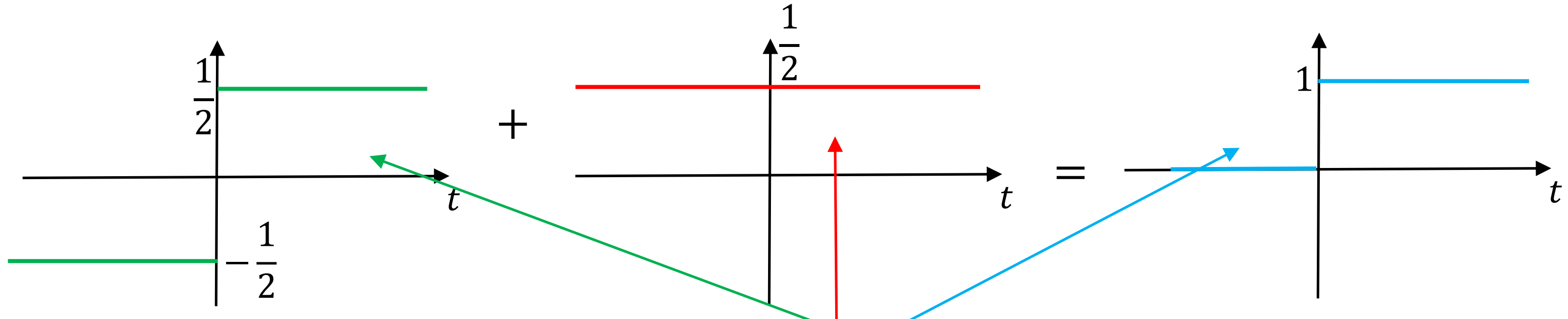
σύμφωνα με την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier

- Οπότε

$$X(f) = X_z(f) = F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- Το σήμα $u(t)$ γράφεται ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$$

- Άρα

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Οπότε

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}(fT)$
$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t),\ a > 0$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t),\ a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a\|t\|},\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Για την αντίστροφη διαδικασία εύρεσης του σήματος στο χρόνο από το μετασχ. Fourier του, συνήθως ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:

  - Χρήση του ορισμού

  - Χρήση ιδιοτήτων (π.χ. δυϊκότητα)

  - Χρήση πινάκων γνωστών μετασχηματισμών

ενώ χρησιμοποιείται συχνά η τεχνική του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω ότι γνωρίζετε τα παρακάτω:

- Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές
- Ισχύει

$$F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t), \qquad A \in \Re$$

- Ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15}$$

$\rightsquigarrow$ Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Βρείτε το $x(t)$

Είναι

$$F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t)$$

$$F\{F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\}\} = F\{Ae^{-3t}u(t)\}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Είναι $(2+j2\pi f)X(f) = \dfrac{A}{3+j2\pi f} \Rightarrow X(f) = \dfrac{A}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$

Άρα

$$X(f) = A\left(\frac{A_1}{3+j2\pi f} + \frac{A_2}{2+j2\pi f}\right) = A\,G(f)$$

$$G(f) = \frac{1}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$$

με

$$A_1 = G(f)(3+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-3} = -1$$

$$A_2 = G(f)(2+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-2} = 1$$

οπότε

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f+2} - \frac{A}{j2\pi f+3}$$

και από πίνακες ζευγών

θα είναι $x(t) = A\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t).$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Από Parseval, θα έχατε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{4}{15}$

× ✓

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) u(t) \right)^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)^2 \underbrace{u^2(t)}_{= u(t)} dt = \int_0^{+\infty} A^2 \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)^2 \cdot 1 \cdot dt$$

$$= A^2 \int_0^{+\infty} \left(e^{-4t} - 2e^{-2t} \cdot e^{-3t} + e^{-6t} \right) dt$$

$$= A^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-4t} dt - 2\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-6t} dt \right)$$

$$= A^2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{4}{15} \Rightarrow A^2 = 16 \Rightarrow A = \pm 4$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Άρα

$$x(t) = 4\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

ή

$$x(t) = -4\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

$$= 4\left(e^{-3t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

Όμως το $x(t) > 0 \ \forall t$, κι επειδή $e^{-2t} > e^{-3t}$, το σήμα μας θα είναι το

$$x(t) = 4\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ