ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

• Ιδιότητες Σειρών Fourier

REMINDER

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 **$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0**	**X_k** **Y_k**
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$, $a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k \rvert = \lvert X_{-k} \rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k \rvert^2$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\|=\|X(-f)\|, \\ \phi_x(f)=-\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t)=x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Re$
Περιττό σήμα	$x(t)=-x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t)=\mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t)=\mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}\|X(f)\|^2df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z(f) =?$$

$$Z(f) = \int z(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi ft}dt$$

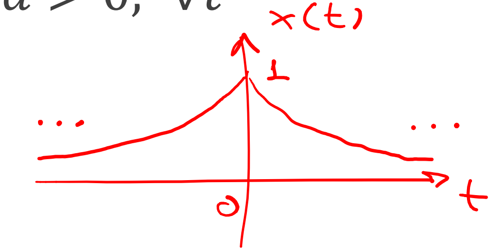
$$= \int Ax(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int By(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= A\int x(t)e^{-j2\pi ft}dt + B\int y(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= AX(f) + BY(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|},\ \ a > 0,\ \forall t$



$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad |t| = \begin{cases} t, & t > 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$= e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \right) e^{-j2\pi f t}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{F\{e^{-at}u(t)\}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{F\{e^{at}u(-t)\} = ?} \qquad (1)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Γνωρίζω ότι $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{a+j2\pi f}, \quad a>0$

αλλά $\mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\} = ?$ ← ας το βρούμε!

Είναι
$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{-\infty} e^{at}u(-t)e^{-j2\pi ft}\,dt\\ &u(-t)=\begin{cases}1, & t<0\\ 0, & t>0\end{cases}\end{aligned}\right\} = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\cdot 1\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}\,dt = \frac{1}{a-j2\pi f}\,e^{(a-j2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f}\left(1-\lim_{t\to-\infty} e^{at}\cdot e^{-j2\pi ft}\right).$$

Όμοια με προηγ. παράδειγμα, $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{(a-j2\pi f)t} = 0$, άρα $\mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\} = \dfrac{1}{a-j2\pi f}$.

(2)

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Από τις 1, 2

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} + \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$= \frac{a-j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} + \frac{a+j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)}$$

$$= \frac{2a}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} = \frac{2a}{|a+j2\pi f|^2}$$

$$= \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}.$$

Άρα

$$e^{-a|t|},\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$\left.\begin{aligned} Z(f) &= \int x(t-t_0)e^{-j2\pi f t}dt \\ u &= t - t_0 \Rightarrow du = dt \end{aligned}\right\} = \int x(u)e^{-j2\pi f(u+t_0)}du$$

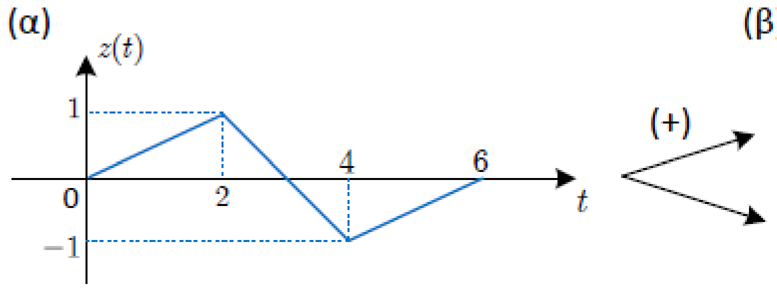
$$= \int x(u)e^{-j2\pi f u}e^{-j2\pi f t_0}du$$

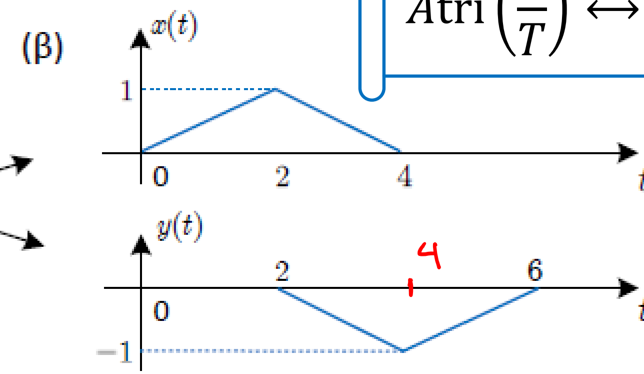
$$= e^{-j2\pi f t_0}\left[\int x(u)e^{-j2\pi f u}du\right]$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT\mathrm{sinc}^2(fT)$$





Είναι

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$= 1 \cdot \mathrm{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) - 1 \cdot \mathrm{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

$$x(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

άρα

$$Z(f) = 1 \cdot 2 \cdot \mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{-j2\pi f \cdot 2}$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot \mathrm{sinc}^2(2f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot 4}$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\left(e^{-j4\pi f} - e^{-j8\pi f}\right).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$

Απόδειξη:

$$z(t) = e^{j2\pi f_0 t}x(t) \to Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}x(t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt$$

$$= X(f-f_0)$$

Σημείωση: η συχνότητα f_0 <u>**δεν**</u> έχει να κάνει με τη θεμελιώδη συχνότητα κάποιου περιοδικού σήματος. Είναι απλά μια τυχαία συχνότητα.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

Είναι

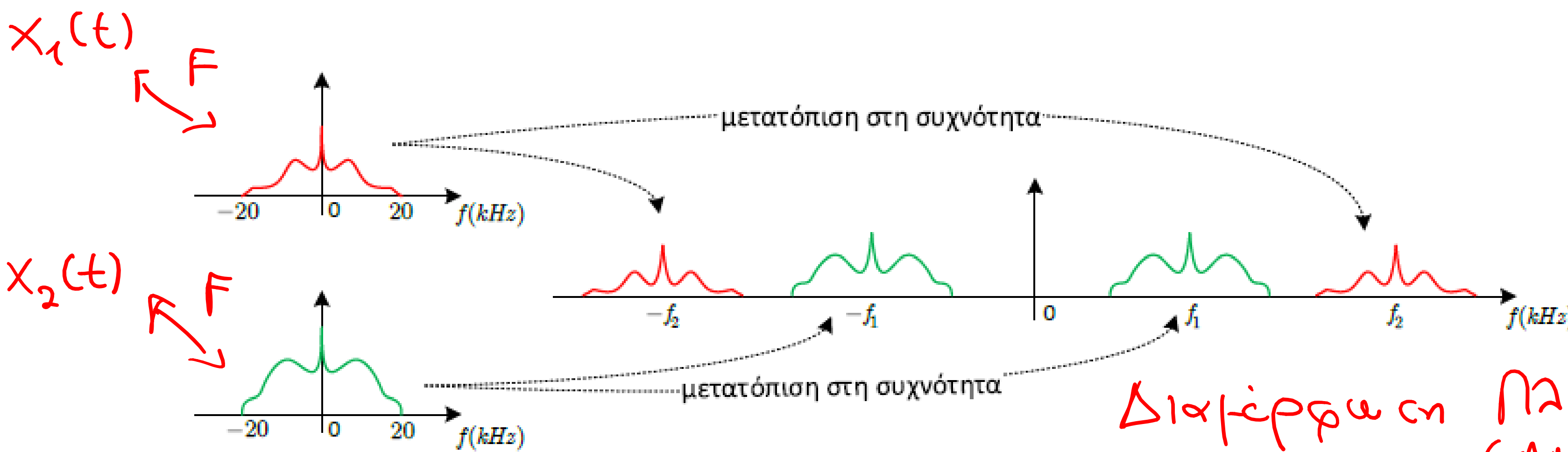
$$y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t) \qquad \text{(Euler)}$$

$$= 2x(t)\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

$$= x(t)e^{j2\pi f_0 t} + x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \qquad \text{(Μετατ. στη συχνότητα)}$$

Άρα

$$Y(f) = X(f-f_0) + X(f+f_0)$$



Διαμόρφωση Πλάτους (AM)

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(at)\,, a \in \Re \to Z(f) = ?$$

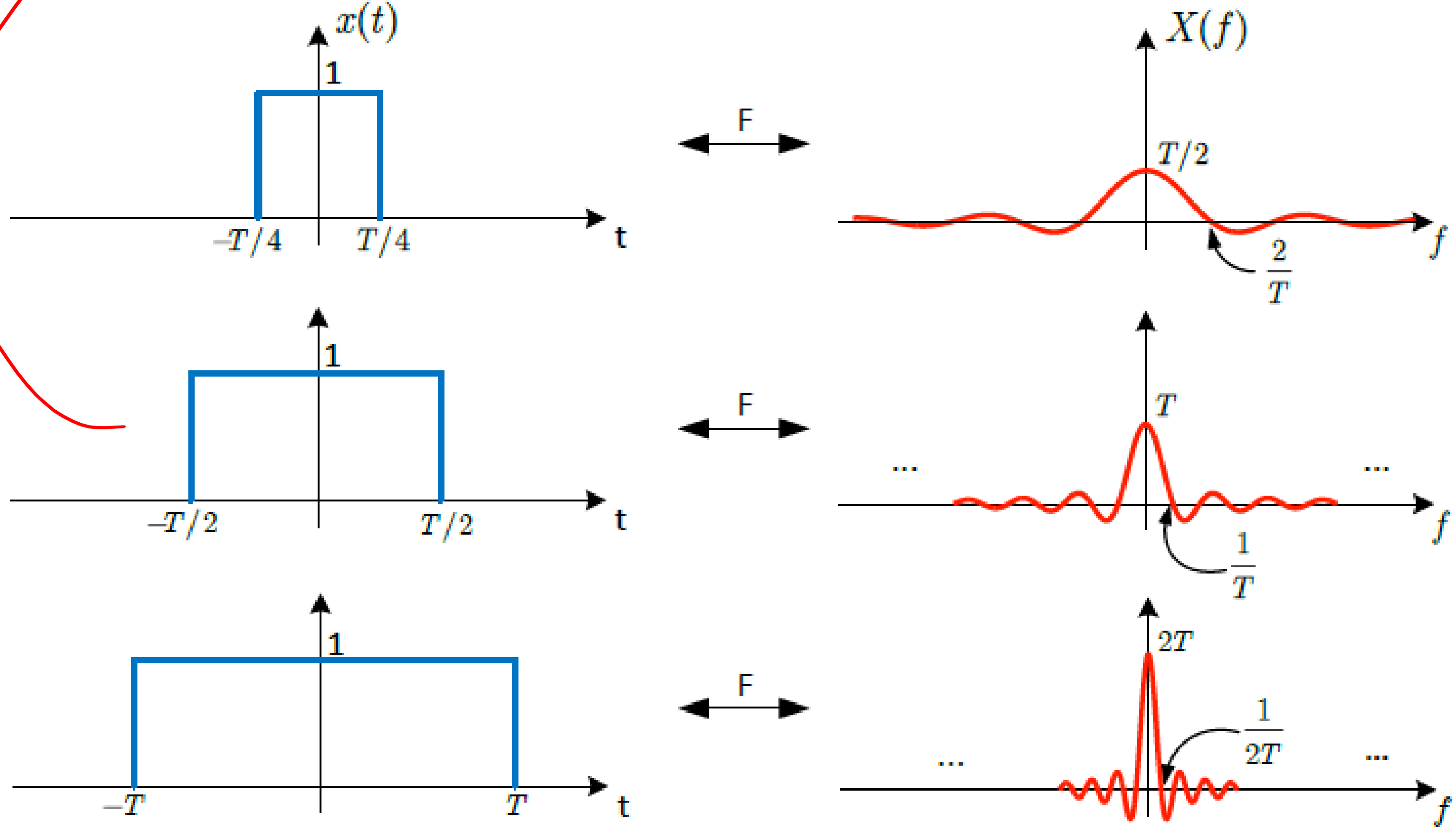
Έστω $a > 0$:

$$\left.\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi f t}dt \\ u &= at \Rightarrow du = adt \end{aligned}\right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi\left(\frac{f}{a}\right)u}du = \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Όμοια είναι η απόδειξη για $a < 0$.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$



Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t) * y(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t) * y(t)\big) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t} dt \right) d\tau \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = Y(f) X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$

1ος τρόπος: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \, d\tau$

2ος τρόπος:

$$\left.\begin{aligned} x(t) = e^{-t}u(t) &\xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \\ h(t) = e^{-2t}u(t) &\xleftrightarrow{F} H(f) = \frac{1}{2+j2\pi f} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

$$= \frac{1}{1+j2\pi f} \cdot \frac{1}{2+j2\pi f} = \frac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}.$$ Θέτω $w = j2\pi f$, τότε

$$Y(w) = H(w)X(w) = \frac{1}{(1+w)(2+w)} = \frac{A}{1+w} + \frac{B}{2+w}, \text{ με}$$

$$A = Y(w)(1+w)\Big|_{w=-1} = \frac{1}{\cancel{(1+w)}(2+w)}\cancel{(1+w)}\Big|_{w=-1} = \frac{1}{2+w}\Big|_{w=-1} = 1$$

$$B = Y(w)(2+w)\Big|_{w=-2} = \frac{1}{(1+w)\cancel{(2+w)}}\cancel{(2+w)}\Big|_{w=-2} = \frac{1}{1+w}\Big|_{w=-2} = -1$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Άρα $Y(w) = \frac{1}{1+w} + \frac{-1}{2+w}$, θέταμε $j2\pi f := w$

και

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{-1}{2+j2\pi f}$$

$$\frac{1}{1+j2\pi f} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-t}u(t), \qquad \frac{-1}{2+j2\pi f} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} -e^{-2t}u(t)$$

Οπότε τελικά

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι

$$\left.\begin{array}{c} x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\ u = -t \Rightarrow du = -dt \end{array}\right\} \Rightarrow x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f u} df$$

Αν αλλάξουμε μεταξύ τους τις μεταβλητές $u \leftrightarrow f$, τότε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-j2\pi f u} du \overset{u:=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt = F\{X(t)\}$$

Άρα αν

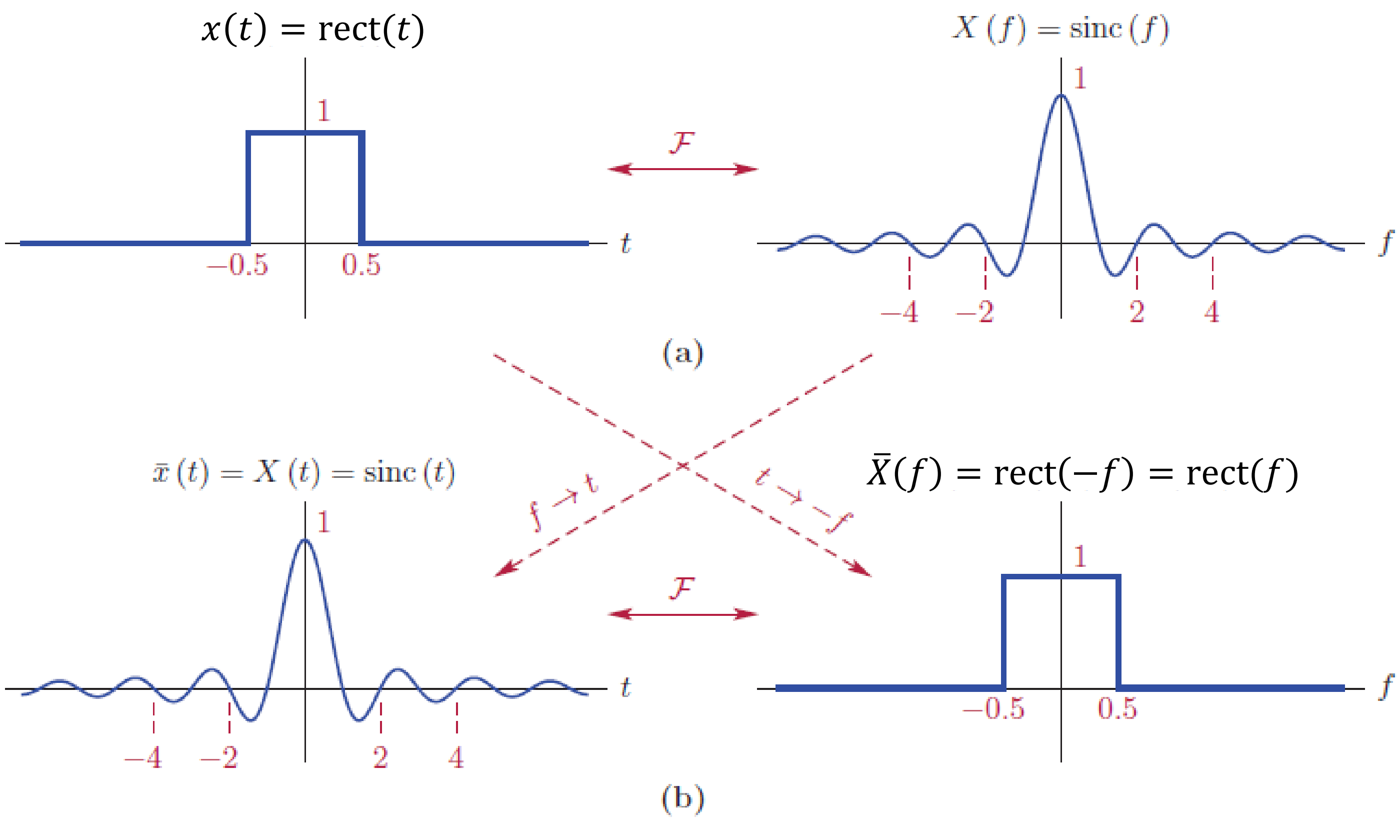
$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

τότε

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα:



Άλλο παράδειγμα:

$$e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$\frac{1}{a + j2\pi t}, a > 0 \leftrightarrow e^{-a(-f)}u(-f) = e^{af}u(-f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t)y(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t)y(t)\big)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du\right) y(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi(f-u)t}dt\right)du = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)\, du$$

$$= X(f) * Y(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) * y(t)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \pm f_0)$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$
$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT)$$

- Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

Είναι

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \qquad (\text{Euler})$$
$$= \cancel{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{\cancel{2}}e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$
$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{j2\pi f_0 t} + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

δηλ.

$$X(f) = F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * F\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} + F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * F\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}$$
$$= T\mathrm{sinc}(fT) * \delta(f - f_0) + T\mathrm{sinc}(fT) * \delta(f + f_0)$$
$$= T\mathrm{sinc}((f - f_0)T) + T\mathrm{sinc}((f + f_0)T).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

Είναι

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f_0 t}$$

Ξέραμε ότι

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\text{sinc}(fT)$$

Άρα

$$X(f) = T\text{sinc}((f-f_0)T) + T\text{sinc}((f+f_0)T)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα:

$$e^{j2\pi f_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(f-f_0)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

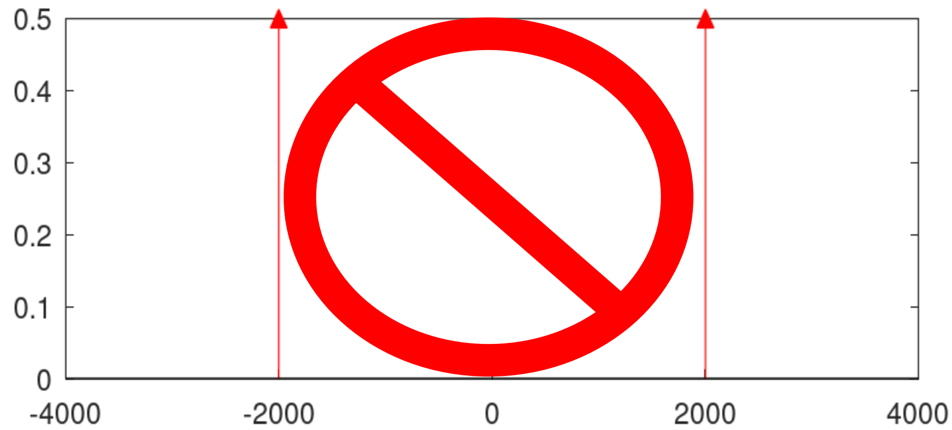
Θα δούμε αργότερα ότι

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,, \quad \boxed{-\infty < t < +\infty}$$

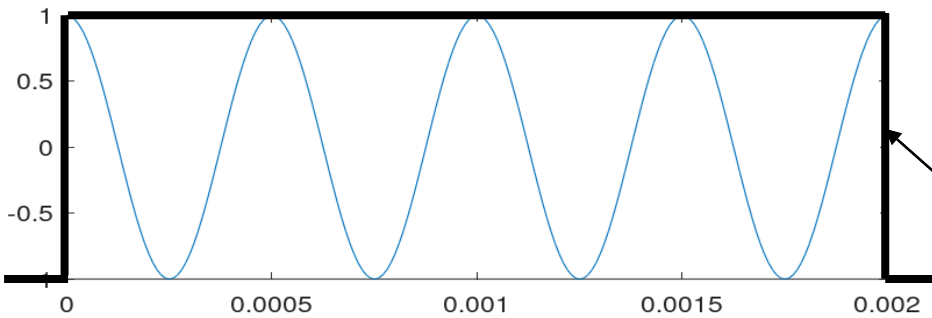
$$\updownarrow$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

Έστω $f_0 = 2000$ Hz

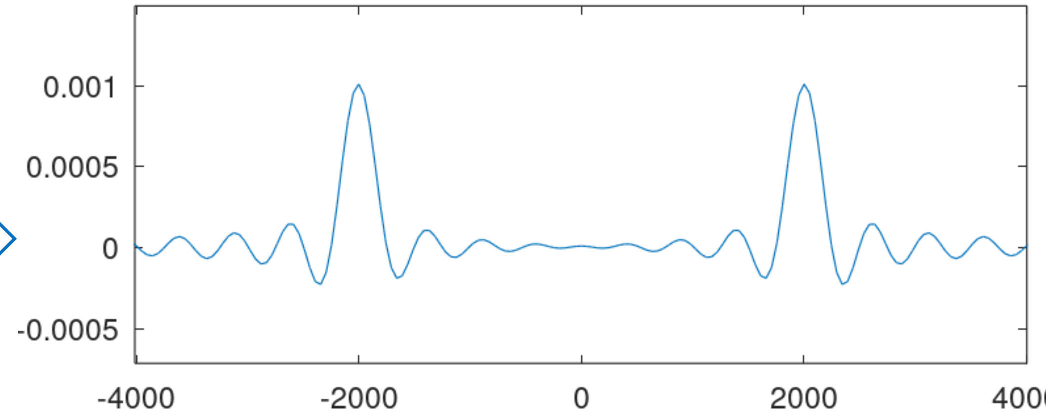


Φάσμα ημιτόνου ***άπειρης*** διάρκειας



$$\mathrm{rect}\left(\frac{t - 0.001}{0.002}\right)$$

Φάσμα ***παραθυροποιημένου*** ημίτονου



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

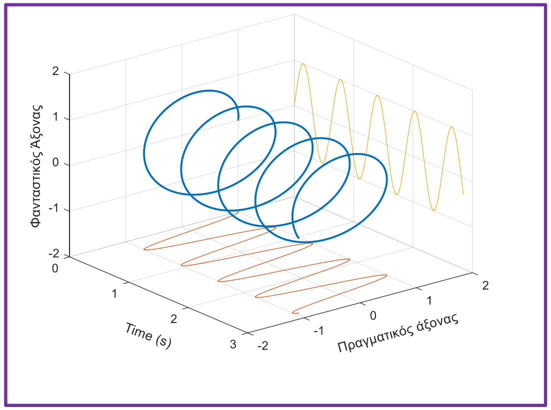
$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt = x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-j2\pi f t}dt$$

$$= x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi f)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$= x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right]$$

$$= \underbrace{x(t)}_{x(\pm\infty)=0}e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f X(f)$$

$$= \mathbf{0} + j2\pi f X(f) = j2\pi f X(f)$$

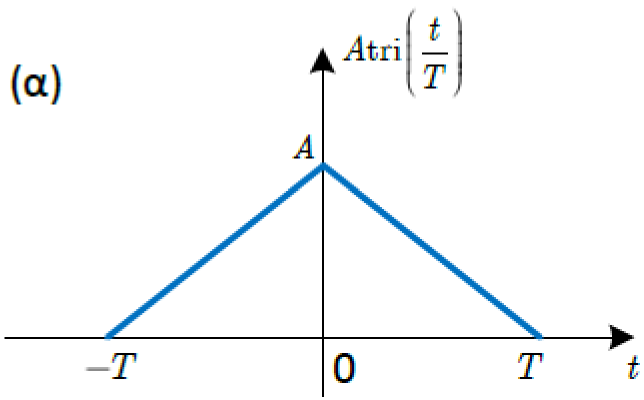


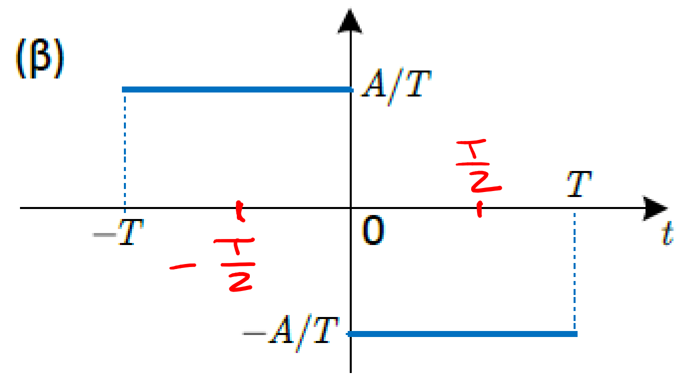
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$
$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT)$$

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού

$$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$





Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{A}{T}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

άρα

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = \frac{A}{\cancel{T}}\cdot \cancel{T}\cdot \mathrm{sinc}(fT)\cdot e^{j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} - \frac{A}{\cancel{T}}\cdot \cancel{T}\cdot \mathrm{sinc}(fT)\cdot e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\left(2j\sin(\pi fT)\right)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Άρα

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = 2jA\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT)$$

$$\|$$

$$j2\pi f\,X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Οπότε

$$\cancel{j2}\pi f\,X(f) = \cancel{j2}A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT)$$

$$X(f) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

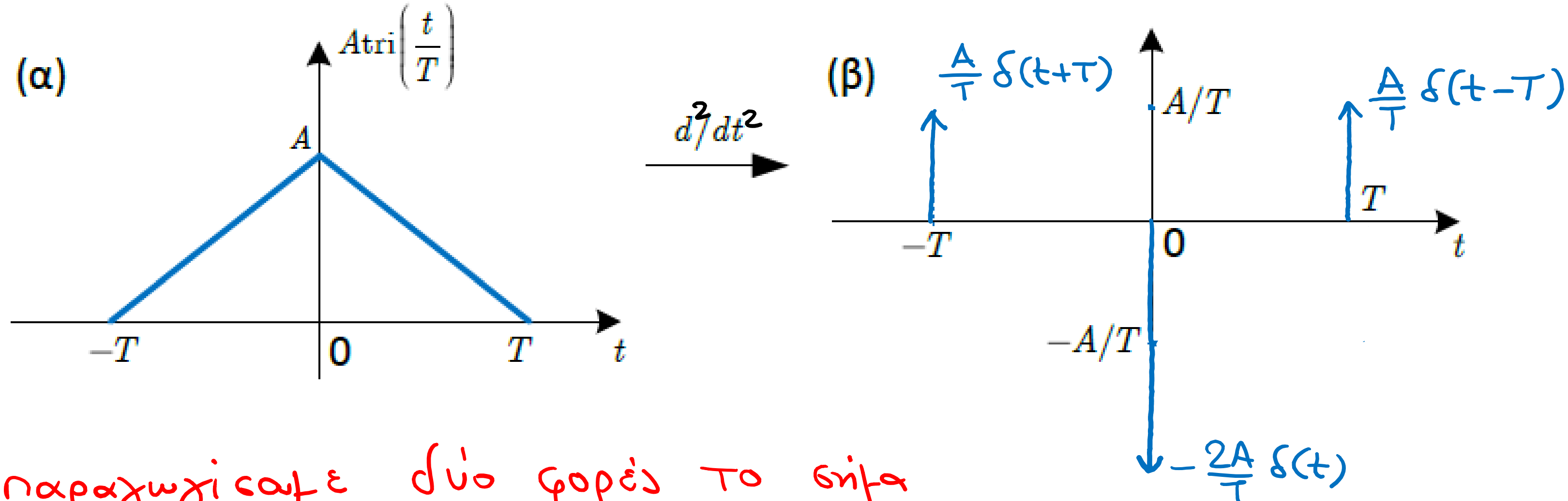
$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot T\cdot\underbrace{\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}}_{\mathrm{sinc}(fT)}$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\mathrm{sinc}(fT)$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



Αν παραγωγίσατε δύο φορές το σήμα $x(t)$, θα πάρατε μόνο συναρτήσεις Δέλτα στα σημεία ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου (2 slides πριν). Τότε θα έχατε

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{A}{T}\delta(t+T) - \frac{2A}{T}\delta(t) + \frac{A}{T}\delta(t-T)$$

Από ιδιότητα παραγώγισης: $F\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = (j2\pi f)^2 X(f)$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση**

$$\delta(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j2\pi f t_0}$$

δηλ.

$$F\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = -4\pi^2 f^2 X(f)$$

Όμως

$$F\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = F\left\{\frac{A}{T}\delta(t+T)\right\} - F\left\{\frac{2A}{T}\delta(t)\right\} + F\left\{\frac{A}{T}\delta(t-T)\right\}$$

$$= \frac{A}{T}e^{j2\pi fT} - \frac{2A}{T} + \frac{A}{T}e^{-j2\pi fT}$$

$$= \frac{A}{T}\Big(\underbrace{e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}}_{\text{Euler}} - 2\Big)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(2\cos(2\pi fT) - 2\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\cos(2\pi fT) - 1\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(-2\sin^2(\pi fT)\right)$$

→ τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$-4\pi^2 f^2 X(f) = \frac{2A}{T}\left(-2\sin^2(\pi fT)\right)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση**

$$-\cancel{4}\pi^2 f^2 X(f) = \frac{\cancel{-4}A}{T} \sin^2(\pi f T)$$

$$X(f) = \frac{A}{T} \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f)^2}$$

$$= \frac{AT}{T^2} \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f)^2}$$

$$= AT \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

$$= AT \operatorname{sinc}^2(fT).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Απόδειξη:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) e^{-j2\pi u t} du \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (f-u) t} dt \right) du df$$

$$\delta(f - f_0) = \int 1 e^{j2\pi (f - f_0) t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \right) \delta(f-u) \, du df$$

$$\int x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\, \delta(f-u) du \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \Big|_{u=f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

- Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\,df$$

Γνωρίζω ότι

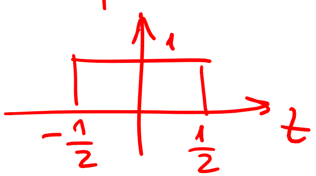
$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$A=1,\ T=1$

$$\mathrm{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f)$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{sinc}(f))^2\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{rect}(t))^2\,dt =$$



$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2\,dt = t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ