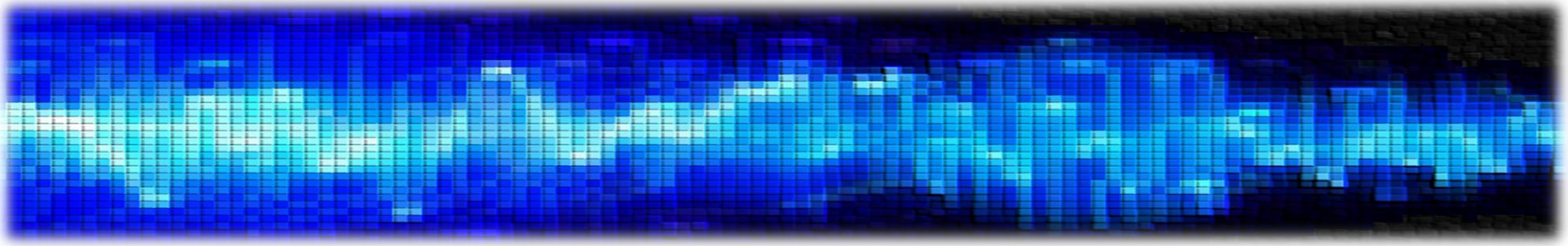
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η



- Μετασχηματισμός Fourier

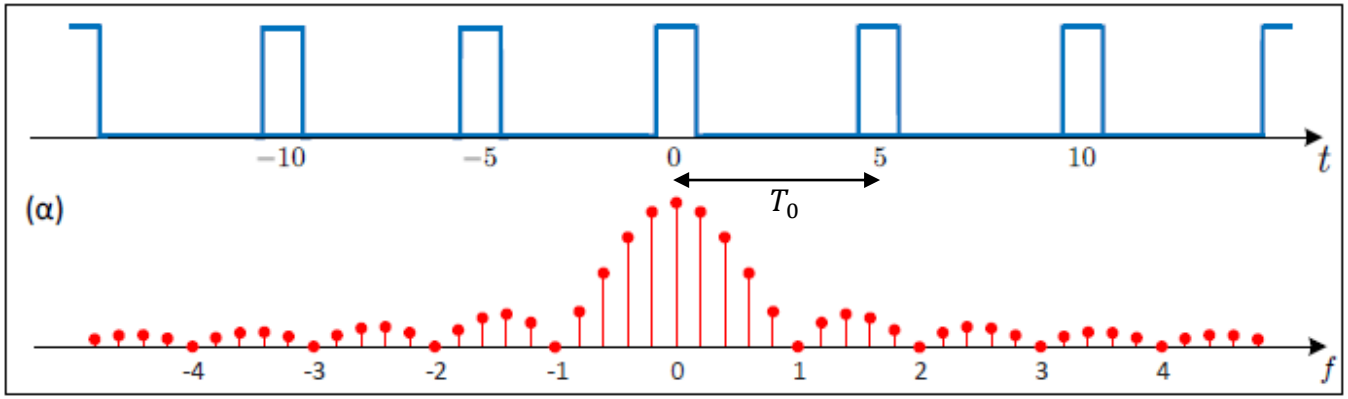
- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \to +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

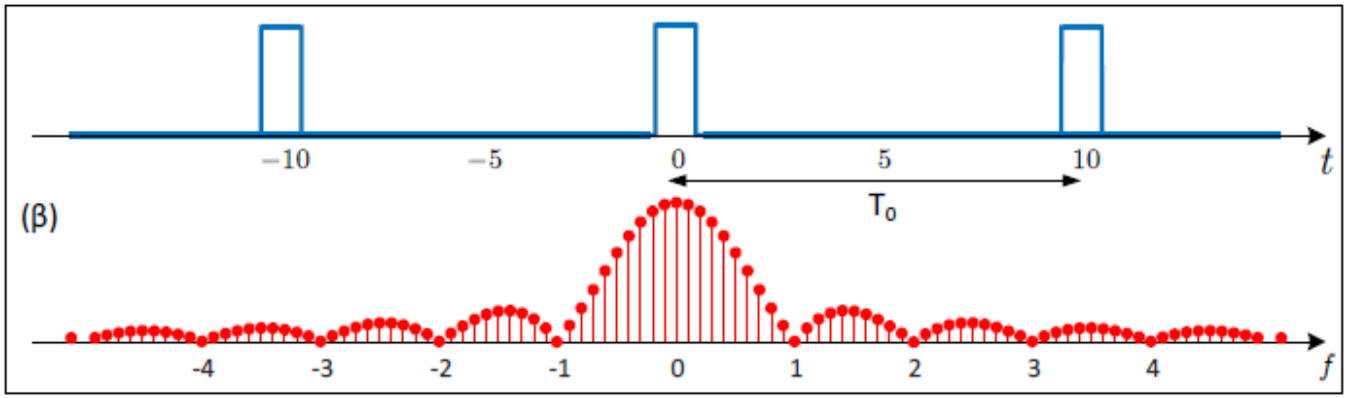
- **Προς το μετασχ. Fourier…**



Περίοδος $T_0 = 5$ s

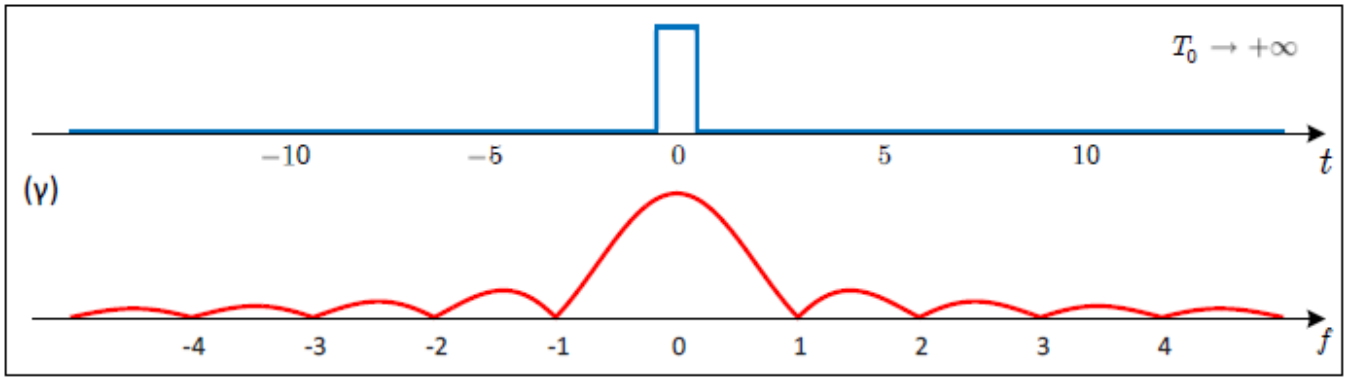
Θεμελ. συχν. $f_0 = \frac{1}{5}$ Hz

$x(t) \rightarrow X_k$



$T_0 \rightarrow 2T_0 = 10$ s

θεμελ. συχν. $f_0 = \frac{1}{10}$ Hz



Αν περίοδος $T_0 \rightarrow +\infty$

τότε η θεμελ. συχν.

$f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$ Hz

και άρα $kf_0 \rightarrow kdf \rightarrow f$

- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\overbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}^{X_k} \right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Όταν $T_0 \to +\infty$, τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \to df$ και $k f_0 \to f$

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Συντελεστές Fourier:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
  - Έχει μέτρο και φάση
  - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$$e^{j\theta(t)} = \cos\big(\theta(t)\big) + j\sin\big(\theta(t)\big)$$

- Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\boxed{e^{-j2\pi ft}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι για **πραγματικά σήματα**

$$\Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}$$
$$\Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}$$

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

Άρτιο πραγματικό μέρος ως προς f

Περιττό φανταστικό μέρος ως προς f

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Μέτρο (φάσμα πλάτους):

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση (φάσμα φάσης):

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

$$|X_k| = \sqrt{\Re\{X_k\}^2 + \Im\{X_k\}^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\{X_k\}}{\Re\{X_k\}}\right)$$

$$X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι **για πραγματικά σήματα**

$$X^*(f) = X(-f)$$

$$X_{-k} = X_k^*$$

Συζυγής συμμετρία

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι άρτια συνάρτηση του f, ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι περιττή συνάρτηση του f
- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**

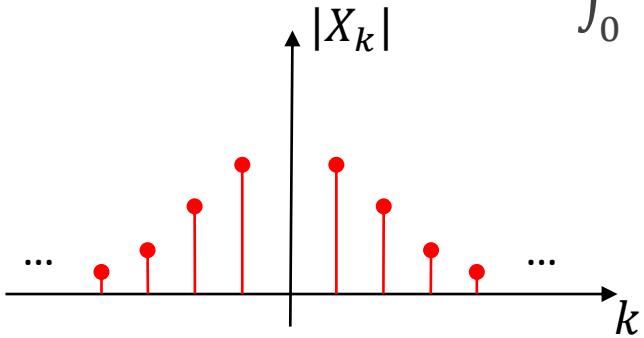
- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα

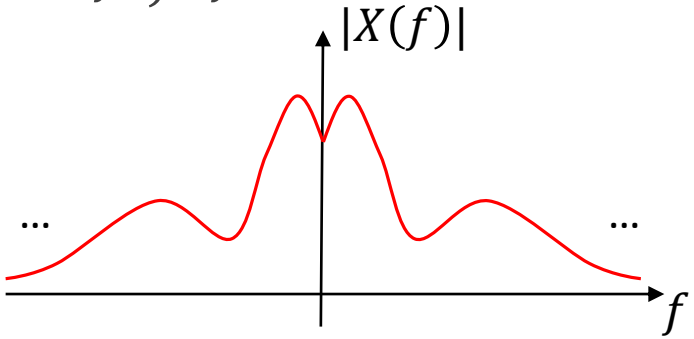
- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα *μετρήσιμων* διακριτών συχνοτήτων kf_0, με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις φ_k:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Ο (αντίστρ.) μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* «άθροισμα» (ολοκλήρωμα) ***κάθε*** συχνότητας f, με πλάτη $2|X(f)|df$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} 2|X(f)| \cos\big(2\pi f t + \angle X(f)\big)\, df$$





- **Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη**
- Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

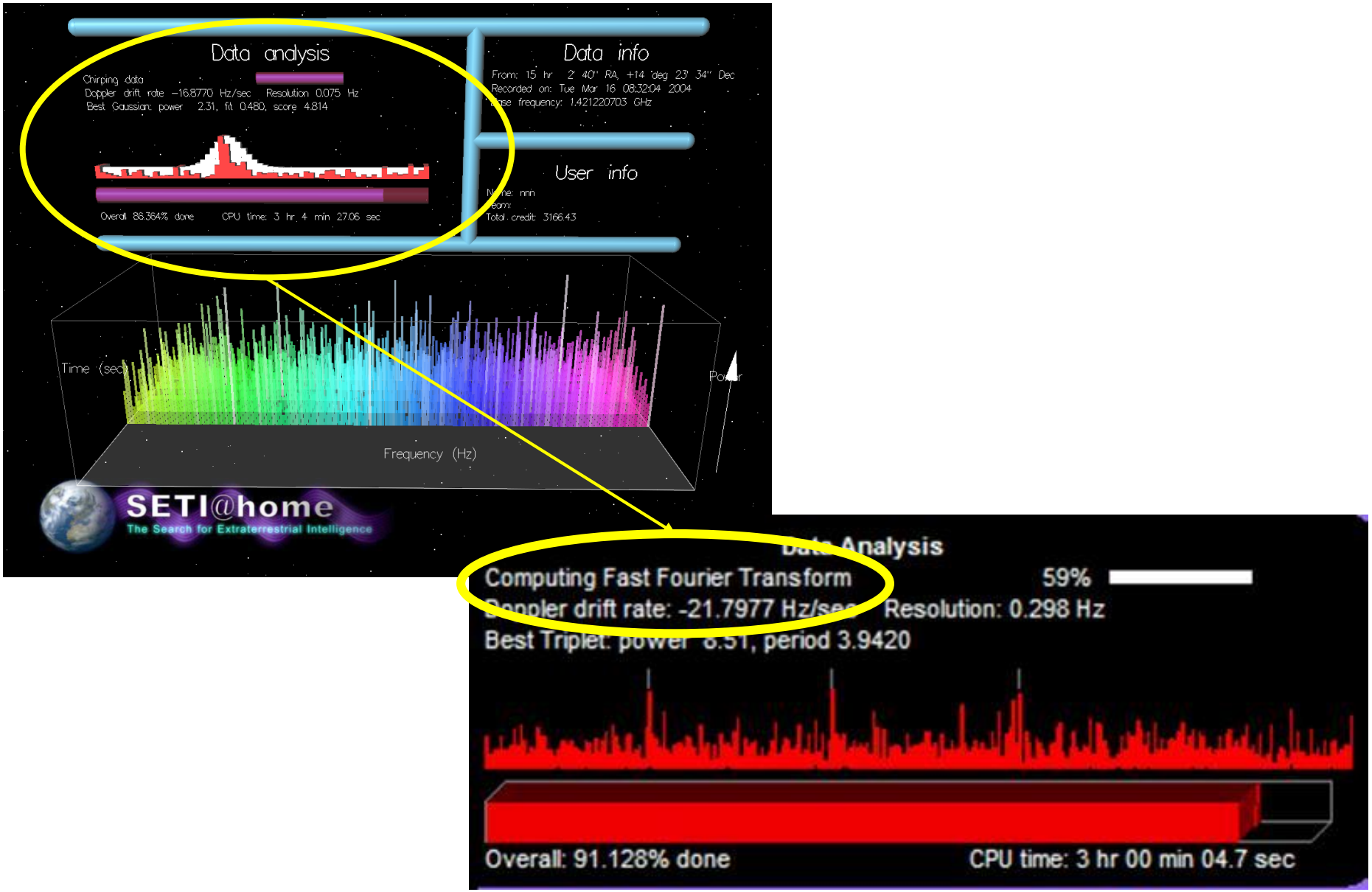
  - Το σήμα $x(t)$ αρκεί να είναι **απολύτως ολοκληρώσιμο**
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
  - Δεν είναι αναγκαία συνθήκη
- Επίσης αν

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- **Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετ. Fourier**

- **Μετασχηματισμός Fourier – Μια Εφαρμογή**

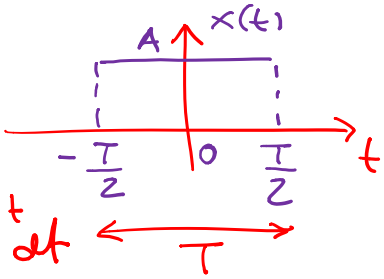


- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

(1) $$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$$

$A > 0$

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left(e^{-j\cancel{2}\pi f \frac{T}{\cancel{2}}} - e^{j\cancel{2}\pi f \frac{T}{\cancel{2}}}\right) = \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi f} \cdot \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T) = A\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}.$$

Είναι $$X(f) = AT\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \overset{(1)}{=} AT\,\mathrm{sinc}(fT).$$

Άρα $$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Ο $X(f)$ που βρήκαμε είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση του f.

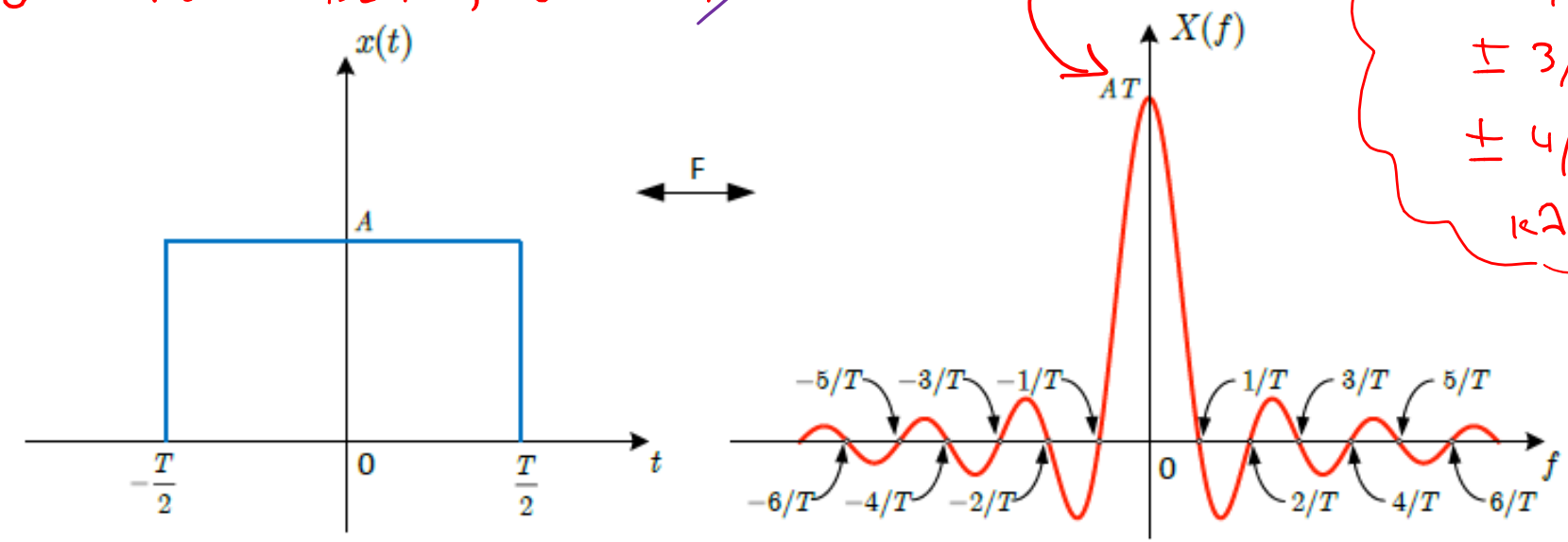
Σημεία μηδενισμού: $X(f) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(\pi f T) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\pi} f T = k\cancel{\pi},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_k = \dfrac{k}{T},\ k \in \mathbb{Z}$

$\pm 1/T$
$\pm 2/T$
$\pm 3/T$
$\pm 4/T$
κλπ

Στο $f=0$, έχαμε $\dfrac{0}{0}$, απροσδιοριστία, και άρα

$$\lim_{f\to 0} \frac{A\sin(\pi f T)}{\pi f} \overset{0/0}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{f\to 0} \frac{A\cancel{\pi} T\cos(\pi f T)}{\cancel{\pi}} = AT$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

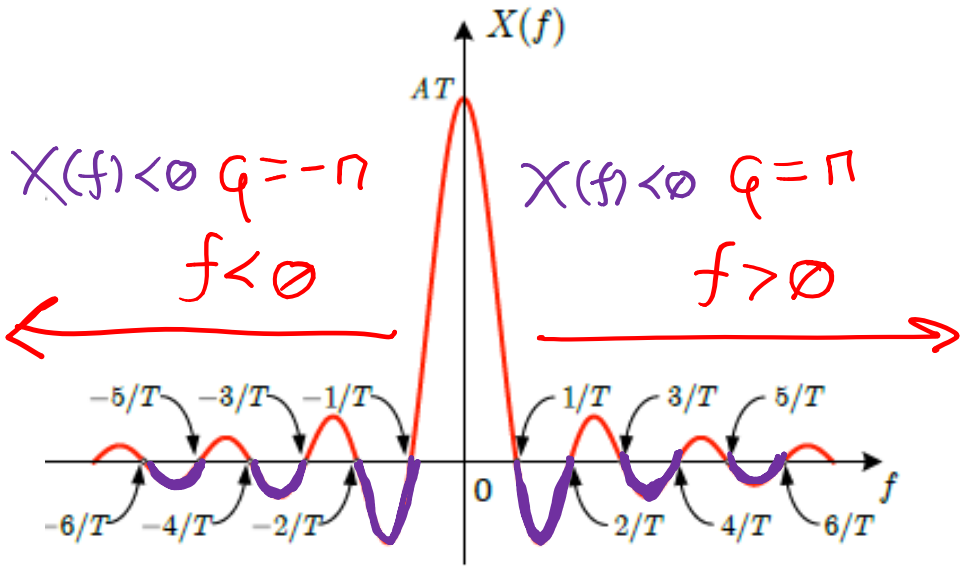
Επειδή $X(f) \in \mathbb{R}$, $X_R(f) = X(f)$, $X_I(f) = 0$

$$|X(f)| = |AT\,\mathrm{sinc}(fT)| = AT\,|\mathrm{sinc}(fT)|.$$

$$\varphi_x(f) = \measuredangle X(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\frac{0}{(\dots)} = \tan^{-1}(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(0) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{k=0} 0,\quad \xrightarrow{k=1} \pi,\quad \xrightarrow{k=-1} -\pi$$

φάση



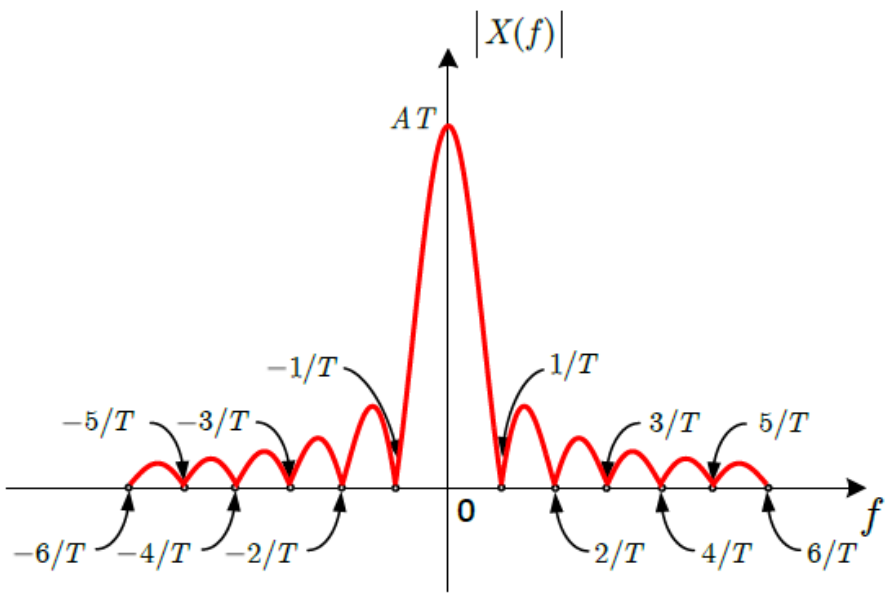
Σύμβαση:

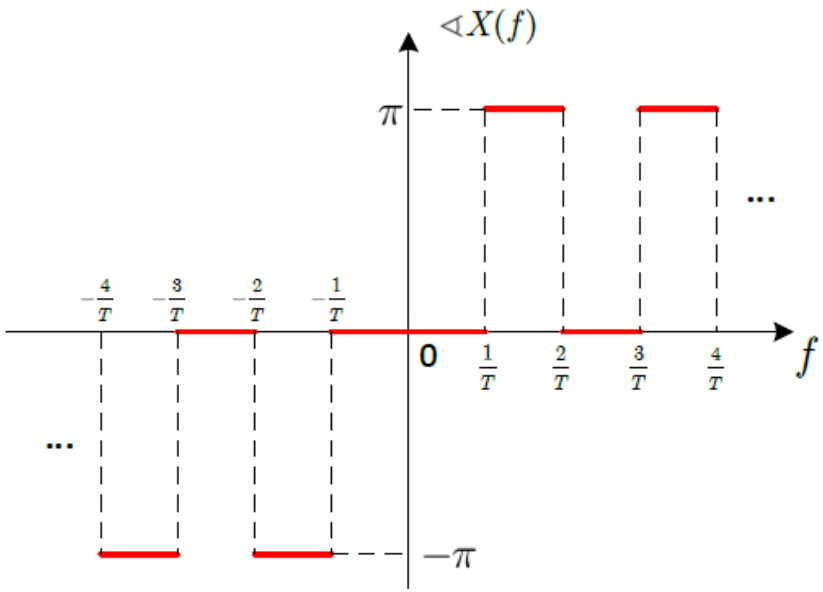
- Αν $f>0$, $X(f)<0$, τότε $\varphi_x = \pi$
- Αν $f<0$, $X(f)<0$, τότε $\varphi_x = -\pi$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$|X(f)| = A\,T\left|\mathrm{sinc}(fT)\right|$$

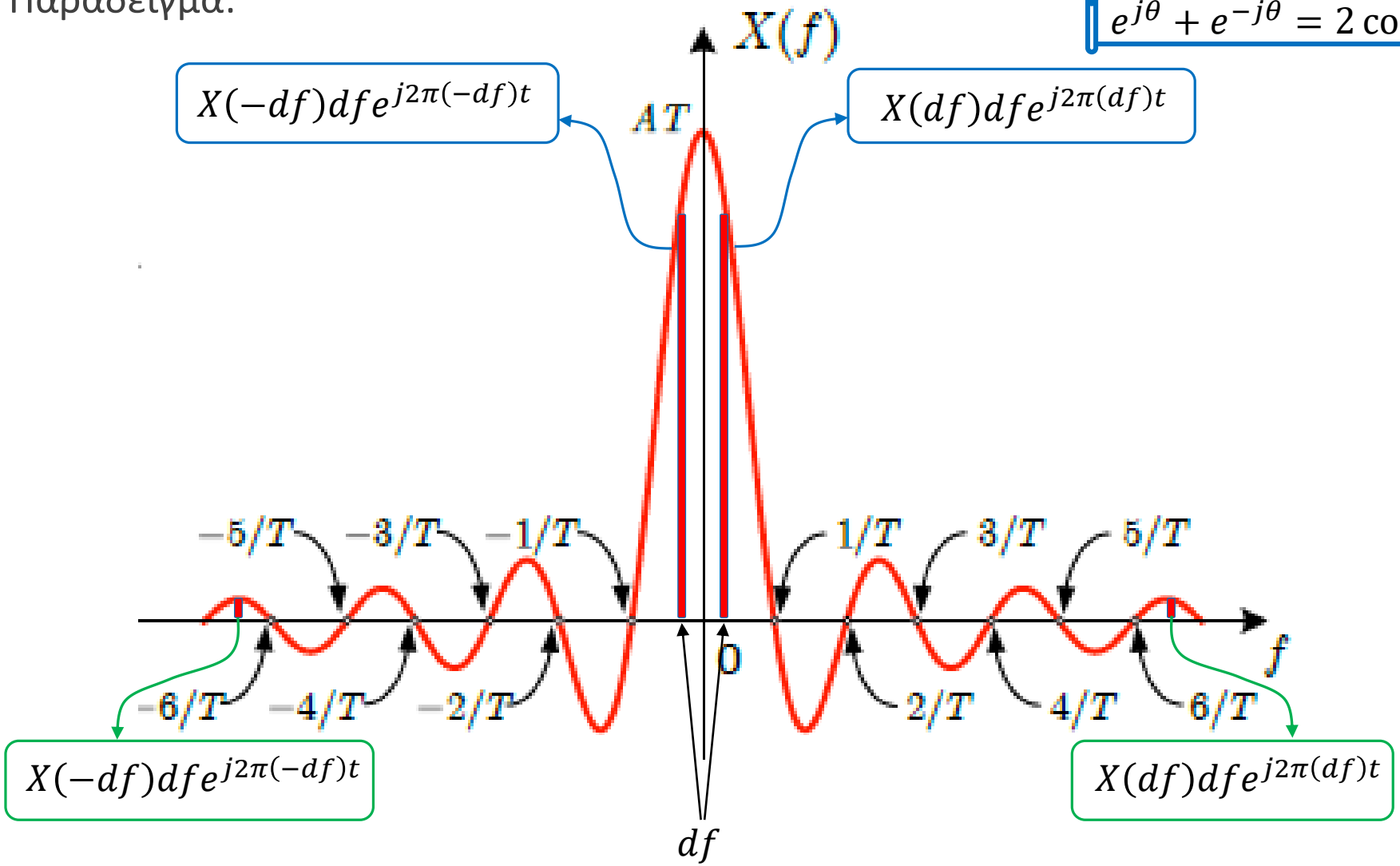
$$\sphericalangle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$





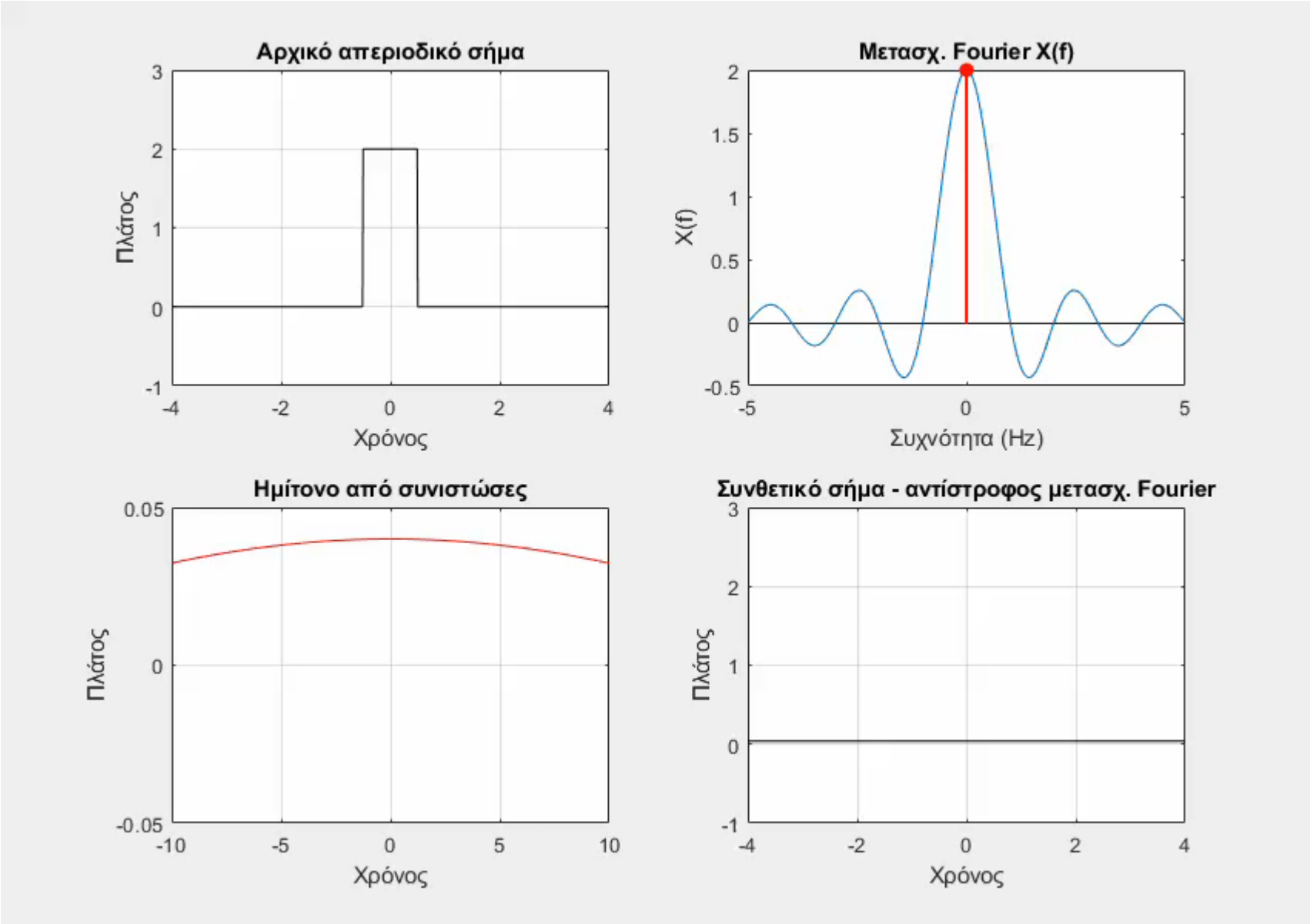
- Παράδειγμα:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

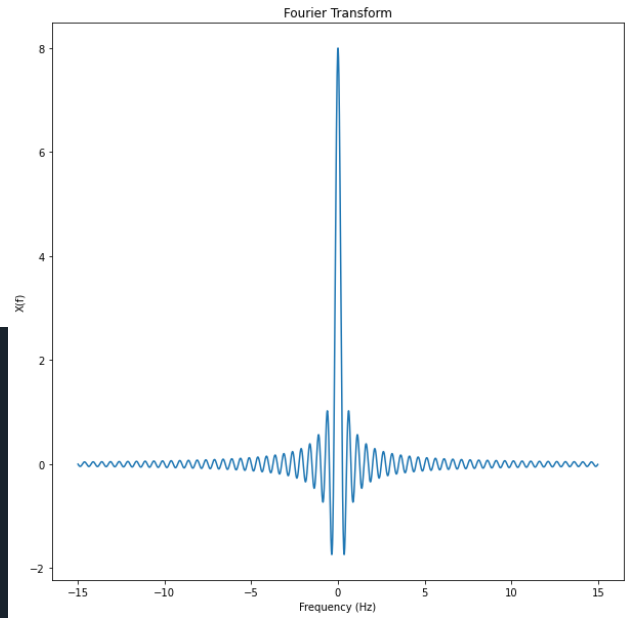


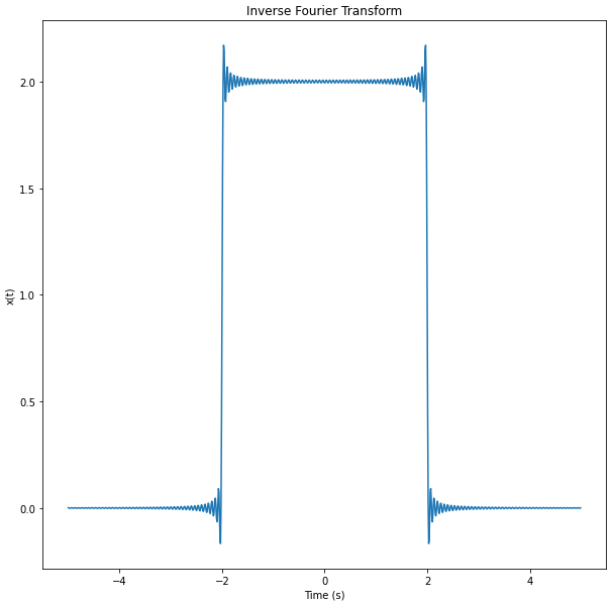
$$x(t) = 2|X(df)|df\cos\big(2\pi dft + \angle X(df)\big) + 2|X(df)|df\cos\big(2\pi dft + \angle X(df)\big) + \ldots$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Κώδικας Python





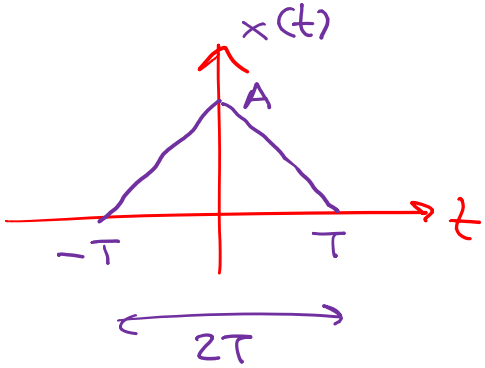

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-15, 15, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

```python
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**

$A > 0$

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



$$= \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t| < T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$= \ldots$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$

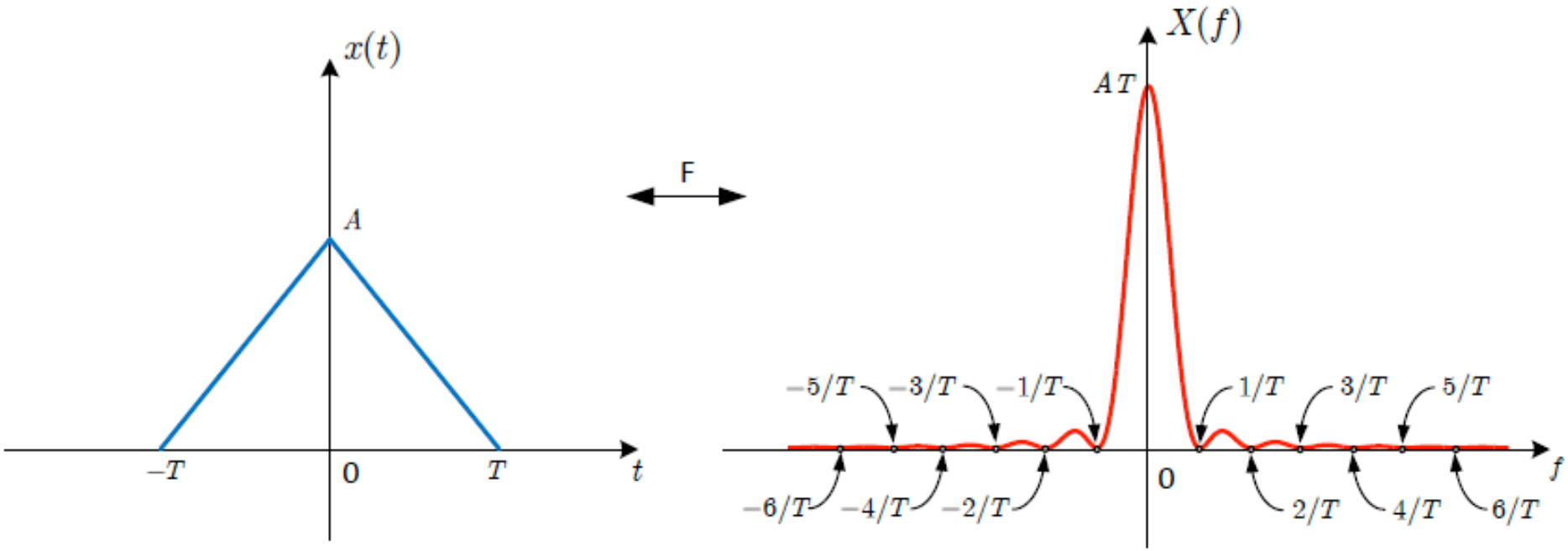
Άρα

$$A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

Ο $X(f)$ που βρήκαμε είναι θετική και άρτια συνάρτηση του f.

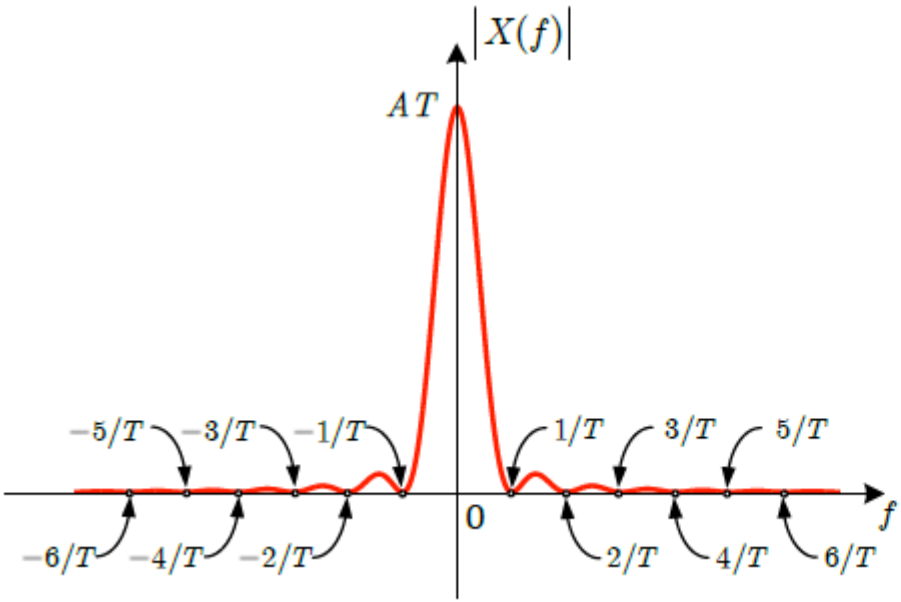
Σημεία μηδενισμού: $f_k = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

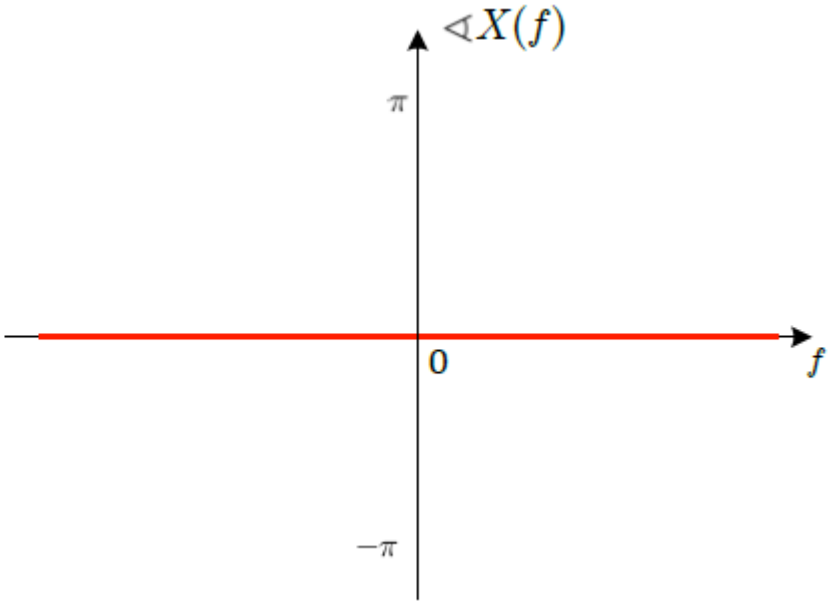


- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

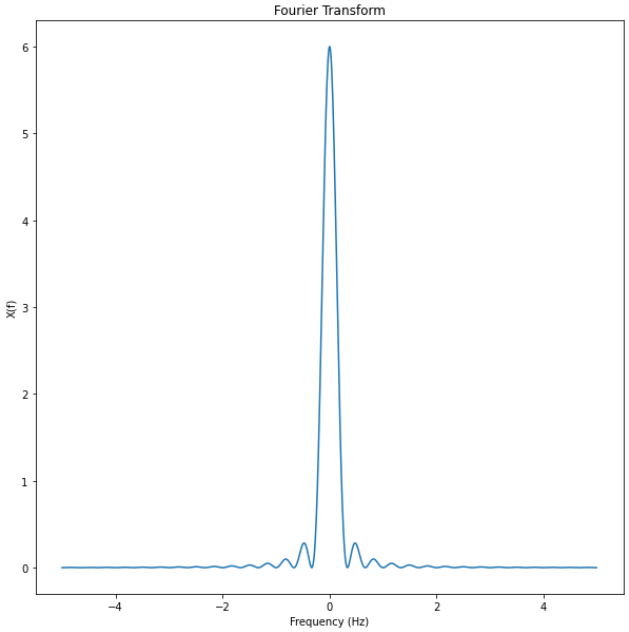
$$|X(f)| = |AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)| = X(f)$$

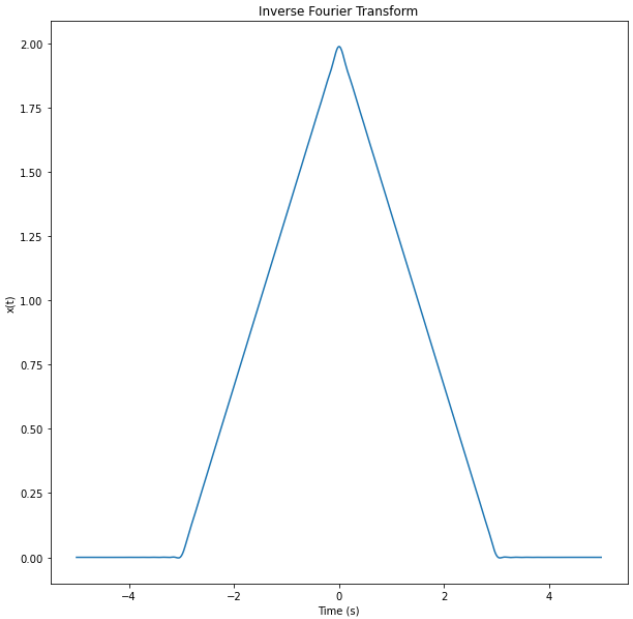
$$\varphi_x(f) = \measuredangle X(f) = 0, \quad \forall f$$





- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Κώδικας Python

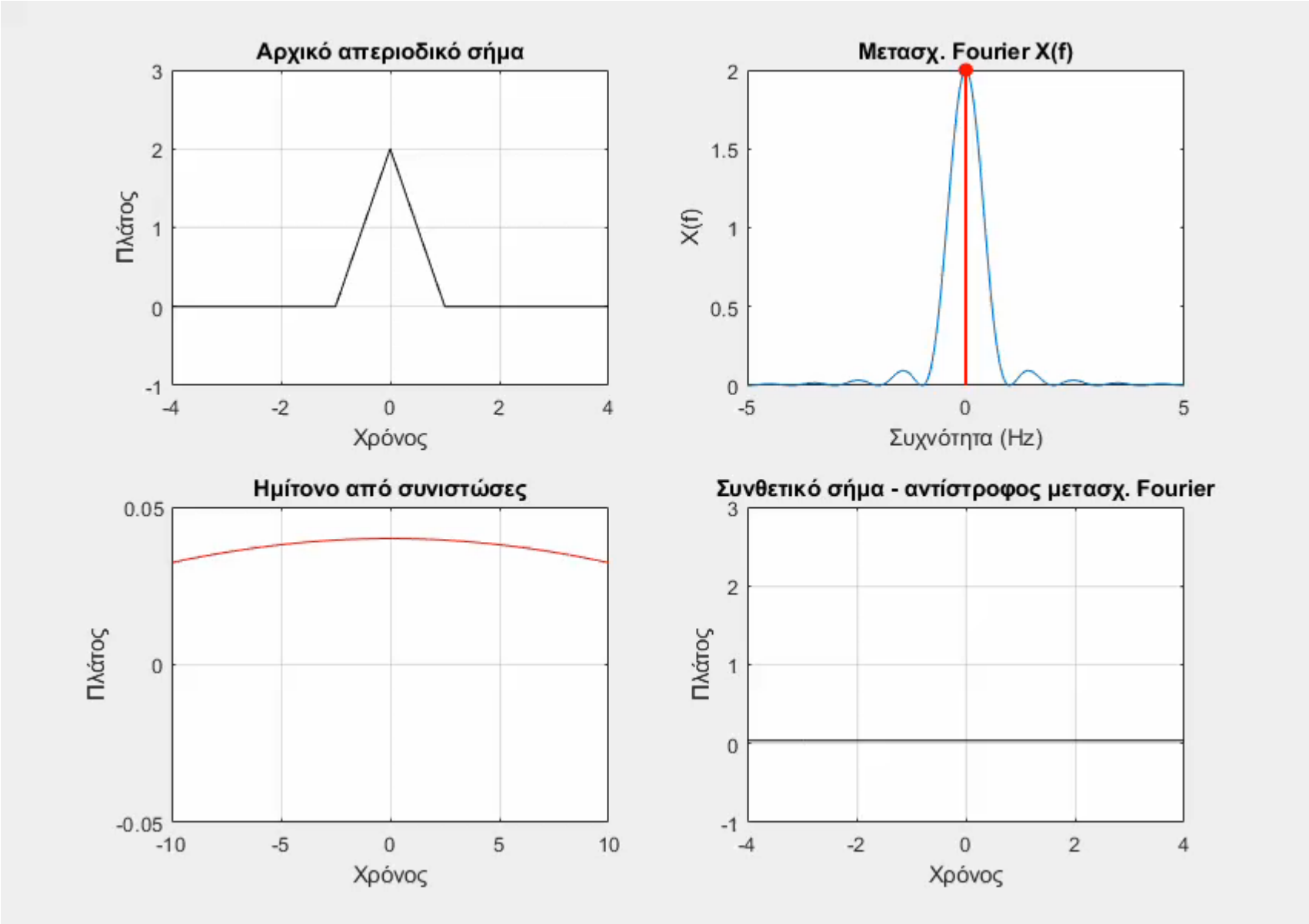
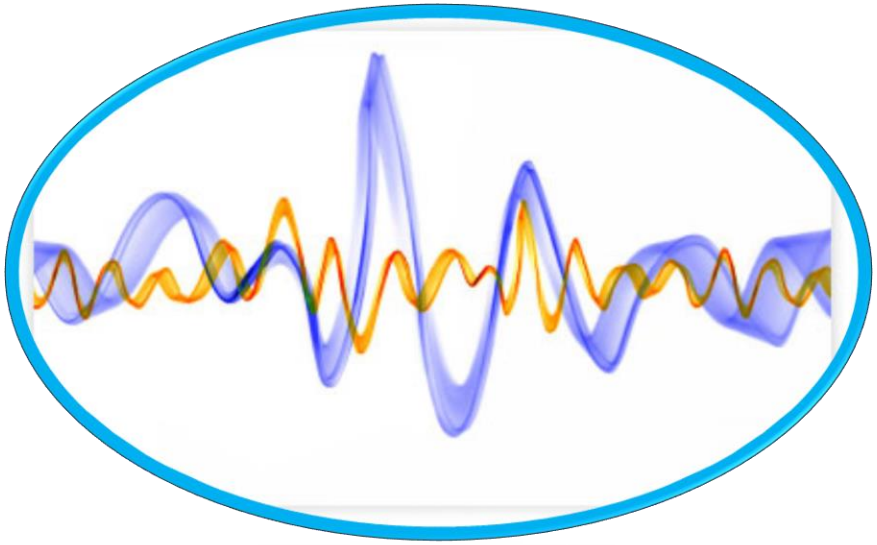





```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Μισή διάρκεια παλμού (-3 ως 3)
T = 3
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-5, 5, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)**2
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

```python
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

- **Μετασχηματισμός Fourier**



Συνεχίζεται… ☺