ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

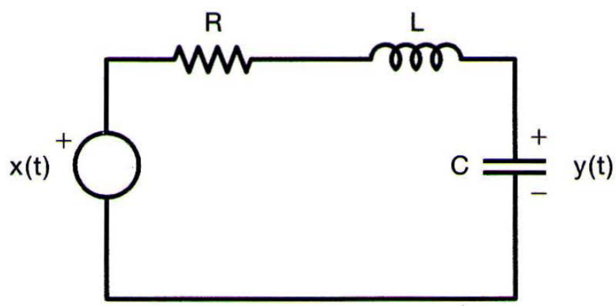
ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/5/2026 Ημερομηνία Παράδοσης: 9/6/2026, 12:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $80/60$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Κυκλώματα στο χώρο του Laplace
Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 1, το οποίο αντιπροσωπεύει ένα ΓΧΑ σύστημα. Αν σας δίνεται ότι η διαφορική εξίσωση



Σχήμα 1: *Κύκλωμα RLC.*

που το περιγράφει είναι η

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{1}$$

με $x(t)$ την τάση εισόδου (πηγή), $y(t)$ την τάση εξόδου (άκρα πυκνωτή), R η αντίσταση του αντιστάτη, L ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου, και C η χωρητικότητα του πυκνωτή, τότε

(α') υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του κυκλώματος.

(β') βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τις τιμές των R, L, C ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Άσκηση 2 - Αντίστροφος Μετασχ. Laplace
Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace των παρακάτω συστημάτων

(α') $H(s) = \dfrac{s+2}{s^2-5s+6}$

(β') $H(s) = \dfrac{s^2-1}{2s^2+2s-2}$

(γ') $H(s) = \dfrac{2s-2}{s^2+2s+1}$

για όλα τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Χαρακτηρίστε κάθε περίπτωση ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

Άσκηση 3 - Μετασχ. Laplace και ΓΧΑ Συστήματα
Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{(s+1)}{s^2+2s+2} \tag{2}$$

(α') Σχεδιάστε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά της συνάρτησης.

(β') Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

Απ.: $h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$

(γ') Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-|t|}$.

Απ.: $y(t) = \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t)u(t) + \frac{4}{5}e^{-t}\sin(t)u(t)$

(δ') Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του συστήματος (δηλ. την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$) μέσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$; Αν ναι, βρείτε το $H(f)$. Αν όχι, εξηγήστε.

Άσκηση 4 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace - I

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) \tag{3}$$

(α') Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για το σύστημα αυτό, δεδομένου ότι $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Απ.: $y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$

(β') Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου για το σύστημα αυτό, αν γνωρίζετε ότι

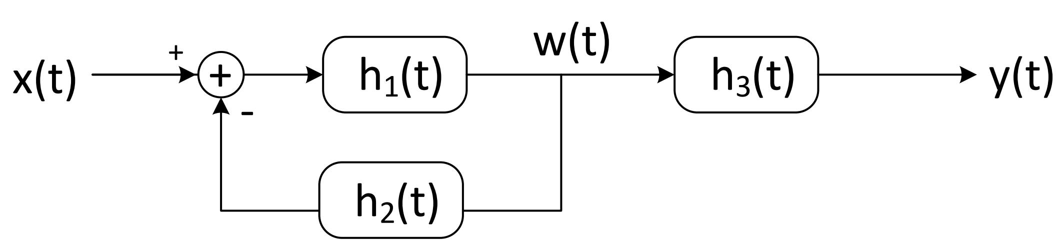
$$y(0^-) = 1 \tag{4}$$
$$\frac{d}{dt}y(0^-) = -1 \tag{5}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}y(0^-) = 1 \tag{6}$$

Απ.: $y_{zi}(t) = e^{-t}u(t)$

(γ') Βρείτε τη συνολική έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος $x(t)$ είναι αυτή του πρώτου ερωτήματος και οι αρχικές συνθήκες είναι αυτές του δεύτερου ερωτήματος.

[⋆] Άσκηση 5 - Συστήματα Ανάδρασης στο χώρο του Laplace

Έστω το σύστημα του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: Σύστημα Άσκησης 5.

Τέτοια συστήματα ονομάζονται *συστήματα ανάδρασης - feedback systems* και έχουν σπουδαίες εφαρμογές σε συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

(α΄) Χρησιμοποιώντας την ενδιάμεση μεταβλητή $w(t)$, η οποία είναι έξοδος του $h_1(t)$ και είσοδος του $h_2(t)$ και του $h_3(t)$ (αλλά έμμεσα λειτουργεί και ως είσοδος στο $h_1(t)$), γράψτε τις *δυο* σχέσεις που περιγράφουν το σύστημα αυτό στο πεδίο του χρόνου. Στη μια εξίσωση, το αριστερό μέλος θα είναι $w(t)$, και στην άλλη θα είναι $y(t)$, δηλ.

$$w(t) = f\{x(t), h_1(t), h_2(t), w(t)\} \tag{7}$$
$$y(t) = f\{h_3(t), w(t)\} \tag{8}$$

με $f\{\cdot\}$ να συμβολίζει τη σχέση συνάρτησης.

(β΄) Μετατρέψτε αυτές τις εξισώσεις στο χώρο του Laplace.

(γ΄) Απαλείψτε το $W(s)$ από τις παραπάνω εξισώσεις, και βρείτε μια εξίσωση που να περιλαμβάνει μόνο τα $Y(s), H_1(s), H_2(s), H_3$
Ποιό είναι το συνολικό σύστημα $H(s)$ συναρτήσει των $H_1(s), H_2(s), H_3(s)$;

Απ.: $H(s) = \dfrac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} H_3(s)$

(δ΄) Αν τα $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ δίνονται ως

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1},\ \Re\{s\} > -1 \tag{9}$$
$$H_2(s) = \frac{1}{s-1},\ \Re\{s\} > 1 \tag{10}$$
$$H_3(s) = \frac{1}{s+2},\ \Re\{s\} > -2 \tag{11}$$

χαρακτηρίστε τα ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

(ε΄) Βρείτε το συνολικό σύστημα $H(s)$ για τα παραπάνω συστήματα, και σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του. Αποφανθείτε για το πεδίο σύγκλισής του (βρείτε πρώτα το πεδίο σύγκλισης του συστήματος χωρίς το $H_3(s)$ και συνεχίστε με βάση αυτό).

Απ.: $H(s) = \dfrac{s-1}{s^2(s+2)},\ \Re\{s\} > 0$

(ϛ΄) Είναι το σύστημα ευσταθές και αιτιατό; Μόνο ευσταθές; Μόνο αιτιατό;

(ζ΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

Απ.: $h(t) = \frac{3}{4}u(t) - \frac{1}{2}tu(t) - \frac{3}{4}e^{-2t}u(t)$

(η΄) Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(t) = e^{-t}u(-t)$, τότε μπορείτε να βρείτε την έξοδο $Y(s)$ στο χώρο του Laplace;

[$\star$] Άσκηση 6 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace - II

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α΄) Για είσοδο $x(t) = e^{2t},\ \forall t$, παράγει έξοδο $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t},\ \forall t$.

(β΄) Η κρουστική του απόκριση ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t) \tag{12}$$

με b άγνωστη σταθερά.

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος η οποία είναι συνεπής με τις παραπάνω πληροφορίες. Προσέξτε ότι στο αποτέλεσμά σας *δεν* πρέπει να υπάρχουν άγνωστες μεταβλητές (δηλ. η σταθερά b δεν πρέπει να υπάρχει στην απάντησή σας). Στη συνέχεια υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;

Απ.: $H(s) = \dfrac{2}{s(s+4)}$, $\Re\{s\} > 0$, $h(t) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4t}\Big)u(t)$

Άσκηση 7 - Δειγματοληψία και Σήματα Διακριτού Χρόνου - I

Θεωρήστε τα παρακάτω σήματα

$$x_1(t) = \cos(2\pi 10 t) \tag{13}$$
$$x_2(t) = \cos(2\pi 50 t) \tag{14}$$

τα οποία δειγματοληπτούνται με ρυθμό $f_s = 40$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή των διακριτών σημάτων $x_1[n]$, $x_2[n]$. Σχεδιάστε κάποια δείγματα ως προς το διακριτό χρόνο n. Τι παρατηρείτε; Εξηγήστε.

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία και Σήματα Διακριτού Χρόνου - II

Θεωρήστε το σήμα

$$x_a(t) = 3\cos(2\pi 1000 t) + 5\sin(2\pi 3000 t) + 10\cos(2\pi 6000 t) \tag{15}$$

(α') Ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το παραπάνω σήμα;

(β') Έστω ότι δειγματοληπούμε το σήμα με ρυθμό $f_s = 5000$ Hz. Ποιά είναι η μαθηματική μορφή του διακριτού σήματος $x[n]$ μετά τη δειγματοληψία;

(γ') Ποιό είναι το σήμα συνεχούς χρόνου που μπορούμε να ανακατασκευάσουμε από τα δείγματα του $x[n]$; Είναι ίδιο με το $x_a(t)$; Γιατί;

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ΕΝΑ ενιαίο αρχειο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

patsoura@csd.uoc.gr

με τίτλο: [HY215] Παράδοση 5ης σειράς ασκήσεων
ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.