ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Κυκλώματα στο χώρο του Laplace

(α΄) Είναι:

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} LCs^2Y(s) + RCsY(s) + Y(s) = X(s) \tag{1}$$

$$Y(s)(LCs^2 + RCs + 1) = X(s) \tag{2}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{3}$$

με πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}$, με s_0 τον πόλο με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος, καθώς μιλάμε για ένα πραγματικό κύκλωμα χωρίς αρχικές συνθήκες, άρα πρέπει να είναι αιτιατό.

(β΄) Οι ρίζες του παρονομαστή είναι:

$$s_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{4}$$

Αν οι τιμές των R, L, C είναι πάντα θετικές, τότε οι πόλοι θα βρίσκονται πάντα στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου (επειδή το πραγματικό μέρος των παραπάνω εξισώσεων θα είναι πάντα αρνητικό). Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο και συγκεκριμένα δεξιότερα από τον πιο δεξιό πόλο (τον πόλο με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος). Άρα θα περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $j2\pi f$ και έτσι το σύστημα είναι ευσταθές.

Εναλλακτικά, μπορούμε να εξετάσουμε τις περιπτώσεις, δεδομένου $R, L, C > 0$ (παθητικό κύκλωμα):

- Πραγματικοί, διαφορετικοί πόλοι: πρέπει

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0 \Longleftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5}$$

  και τότε είναι και οι δυο πόλοι πραγματικοί και αρνητικοί, αφού

$$0 < \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} < \frac{R}{2L} \tag{6}$$

  τότε

$$-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} < 0 \tag{7}$$

  και

$$-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} < 0 \tag{8}$$

- Μιγαδικοί πόλοι: πρέπει

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \Longleftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9}$$

και τότε είναι και οι δυο πόλοι μιγαδικοί με αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλ.

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{10}$$

- Διπλός πόλος: πρέπει

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 \Longleftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11}$$

και τότε υπάρχουν δυο πόλοι στην ίδια θέση

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \tag{12}$$

που είναι αρνητικοί.

Άρα αρκεί $R, L, C > 0$ για να είναι το κύκλωμα ευσταθές.

Άσκηση 2 - Αντίστροφος Μετασχ. Laplace

(α΄)

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2-5s+6} = \frac{s+2}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} \tag{13}$$

με

$$A = \frac{s+2}{(s-2)(s-3)}(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{s+2}{s-3}\Big|_{s=2} = -4 \tag{14}$$

$$B = \frac{s+2}{(s-2)(s-3)}(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{s+2}{s-2}\Big|_{s=3} = 5 \tag{15}$$

Οπότε

$$X(s) = -\frac{4}{s-2} + \frac{5}{s-3} \tag{16}$$

- Για $\mathrm{Re}\{s\} > 3$, το σήμα θα είναι αιτιατό, όχι όμως και ευσταθές, αφού δεν περιλαμβάνεται σε αυτό ο φανταστικός άξονας.

$$x(t) = -4e^{2t}u(t) + 5e^{3t}u(t) \tag{17}$$

- Για $\mathrm{Re}\{s\} < 2$, το σήμα θα είναι άντι-αιτιατό και ευσταθές, αφού περιλαμβάνεται σε αυτό ο φανταστικός άξονας.

$$x(t) = 4e^{2t}u(-t) - 5e^{3t}u(-t) \tag{18}$$

- Για $2 < \mathrm{Re}\{s\} < 3$, το σήμα θα είναι αμφίπλευρο και μη ευσταθές, αφού δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

$$x(t) = -4e^{2t}u(t) - 5e^{3t}u(-t) \tag{19}$$

(β΄) Διαιρώντας τα πολυώνυμα έχουμε

$$\begin{array}{r|l} s^2 - 1 & 2s^2+2s-2 \\ \cline{2-2} s^2+s-1 & \hfill \tfrac{1}{2} \\ \cline{1-1} -s & \end{array}$$

και άρα

$$
\begin{aligned}
H(s) = \frac{s^2-1}{2s^2+2-2} \xrightarrow{\text{πολυωνυμική διαίρεση*}} H(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s}{2s^2+2s-2} && (20)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{s}{2(s-s_1)(s-s_2)}, \text{ όπου } s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} && (21)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}\right) && (22)
\end{aligned}
$$

με

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{s}{(s-s_2)}\Big|_{s=s_1} = \frac{s_1}{s_1-s_2} = \frac{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} && (23)\\
B &= \frac{s}{(s-s_1)}\Big|_{s=s_2} = \frac{s_2}{s_2-s_1} = \frac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} && (24)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς

$$
H(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{1}{s-s_2} \tag{25}
$$

- Για $\mathrm{Re}\{s\} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, το σήμα θα είναι αιτιατό, όχι όμως και ευσταθές, αφού δεν περιλαμβάνεται σε αυτό ο φανταστικός άξονας.

$$
h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1+\sqrt{5}}{4}e^{s_1 t}u(t) - \frac{1-\sqrt{5}}{4}e^{s_2 t}u(t) \tag{26}
$$

- Για $\mathrm{Re}\{s\} < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, το σήμα θα είναι άντι-αιτιατό όχι όμως ευσταθές, αφού δεν περιλαμβάνεται σε αυτό ο φανταστικός άξονας.

$$
h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1+\sqrt{5}}{4}e^{s_1 t}u(-t) + \frac{1-\sqrt{5}}{4}e^{s_2 t}u(-t) \tag{27}
$$

- Για $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \mathrm{Re}\{s\} < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, το σήμα θα είναι αμφίπλευρο και ευσταθές, αφού περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

$$
h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1+\sqrt{5}}{4}e^{s_1 t}u(t) + \frac{1-\sqrt{5}}{4}e^{s_2 t}u(-t) \tag{28}
$$

(γ') Είναι

$$
H(s) = \frac{2s-2}{s^2+2s+1} = \frac{2(s-1)}{(s+1)^2} = \frac{2s}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^2} \qquad \text{, αφού έχουμε διπλή ρίζα στο } s=-1 \tag{29}
$$

- Για $\mathrm{Re}\{s\} > -1$, το σύστημα θα είναι δεξιόπλευρο, αιτιατό και ευσταθές αφού περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα στο πεδίο σύγκλισης.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 2\frac{d}{dt}te^{-t}u(t) - 2te^{-t}u(t) && (30)\\
&= 2t'e^{-t}u(t) + 2t(e^{-t}u(t))' - 2te^{-t}u(t) && (31)\\
&= 2e^{-t}u(t) + 2t(e^{-t})'u(t) + 2te^{-t}u'(t) - 2te^{-t}u(t) && (32)\\
&= 2e^{-t}u(t) - 2te^{-t}u(t) + \cancelto{0}{2te^{-t}\delta(t)} - 2te^{-t}u(t) && (33)\\
&= 2e^{-t}u(t) - 4te^{-t}u(t) && (34)
\end{aligned}
$$

- Για $\mathrm{Re}\{s\} < -1$, το σύστημα είναι αντι-αιτιατό αλλά ασταθές αφού δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα στο πεδίο σύγκλισης.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= -2\frac{d}{dt}te^{-t}u(-t) + 2te^{-t}u(-t) && (35)\\
&= -2t'e^{-t}u(-t) - 2t(e^{-t}u(-t))' + 2te^{-t}u(-t) && (36)\\
&= -2e^{-t}u(-t) - 2t(e^{-t})'u(-t) - 2te^{-t}u'(-t) + 2te^{-t}u(-t) && (37)\\
&= -2e^{-t}u(-t) + 2te^{-t}u(-t) + \cancelto{0}{2te^{-t}\delta(t)} + 2te^{-t}u(-t) && (38)\\
&= 4te^{-t}u(-t) - 2e^{-t}u(-t) && (39)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Laplace και ΓΧΑ Συστήματα

(α΄) Πόλοι: $-1 \pm j$, μηδενικά: $-1, +\infty$

(β΄) Έχουμε

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{s^2+2s+1+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \qquad (40)$$

κι επιπλέον, αφού είναι αιτιατό,

$$h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) \qquad (41)$$

(γ΄) Είναι

$$
\begin{aligned}
Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{s+1}{s^2+2s+2}\frac{2}{1-s^2} = \frac{2(s+1)}{(s^2+2s+2)(s+1)(1-s)} && (42)\\
&= \frac{2}{(s^2+2s+2)(1-s)} = \frac{2}{(s-(-1+j))(s-(-1-j))(1-s)} && (43)\\
&= \frac{A}{s-(-1+j)} + \frac{B}{s-(-1-j)} + \frac{C}{1-s} && (44)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
A &= \left.\frac{2}{(1-s)(s-(-1-j))}\right|_{s=-1+j} && (45)\\
&= \frac{2}{(1-(-1+j))(-1+j+1+j)} = \frac{2}{(2+j)(2j)} = \frac{1}{j(2+j)} = \frac{1}{-1+2j} = \frac{-1-2j}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j && (46)\\
B &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j && (47)\\
C &= -\frac{2}{5} && (48)
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right)\frac{1}{s-(-1+j)} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right)\frac{1}{s-(-1-j)} - \frac{2}{5}\frac{1}{1-s} && (49)\\
&= -\frac{1}{5}\ \frac{1}{s-(-1+j)} - \frac{2}{5}j\ \frac{1}{s-(-1+j)} - \frac{1}{5}\ \frac{1}{s-(-1-j)} + \frac{2}{5}j\ \frac{1}{s-(-1-j)} + \frac{2}{5}\ \frac{1}{s-1} && (50)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{5}e^{(-1+j)t}u(t) - \frac{1}{5}e^{(-1-j)t}u(t) - \frac{2}{5}je^{(-1+j)t}u(t) + \frac{2}{5}je^{(-1-j)t}u(t) + \frac{2}{5}(-e^{t}u(-t)) && (51)\\
&= \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t) + \frac{4}{5}e^{-t}\sin(t) + \frac{2}{5}e^{t}u(-t) && (52)
\end{aligned}
$$

αφού $R_y \supseteq R_H \cap R_x = \{\mathrm{Re}\{s\} > -1\} \cap \{-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1\}$, οπότε

$$R_y = \{-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1\} = \{\mathrm{Re}\{s\} > -1\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} < 1\} \qquad (53)$$

(δ΄) Ναι, μπορούμε να τον υπολογίσουμε αφού ο φανταστικός άξονας συμπεριλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Αρα:

$$H(f) = \frac{j2\pi f + 1}{-4\pi^2 f^2 + j4\pi f + 2} \tag{54}$$

Άσκηση 4 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace - I

(α΄) Είναι

$$s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) = X(s) \tag{55}$$

$$Y(s)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = X(s) \tag{56}$$

συνεπώς

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{57}$$

Τότε

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{58}$$

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{1}{s+4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+3} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{s+1} \tag{59}$$

μετά από ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Άρα

$$y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) \tag{60}$$

(β΄) Από τις ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχ. Laplace, είναι:

$$s^3Y(s) - s^2y(0^-) - sy'(0^-) - y''(0^-) + 6s^2Y(s) - 6sy(0^-) - 6y(0^-) + 11sY(s) - 11y(0^-) + 6Y(s) = 0 \tag{61}$$

Άρα

$$Y_{zi}(s) = Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_{zi}(t) = e^{-t}u(t). \tag{62}$$

(γ΄) Συνολικά,

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \frac{7}{6}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \tag{63}$$

[⋆] Άσκηση 5 - Συστήματα Ανάδρασης στο χώρο του Laplace

(α΄) Είναι

$$w(t) = (x(t) - w(t) * h_2(t)) * h_1(t) \tag{64}$$

$$y(t) = w(t) * h_3(t) \tag{65}$$

(β΄) Είναι

$$W(s) = H_1(s)\left(X(s) - W(s)H_2(s)\right) = H_1(s)X(s) - H_1(s)H_2(s)W(s) \tag{66}$$

$$Y(s) = W(s)H_3(s) \tag{67}$$

(γ΄) Είναι

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= W(s)H_3(s) \\ W(s) + H_1(s)H_2(s)W(s) &= H_1(s)X(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} Y(s) &= W(s)H_3(s) \\ W(s) &= \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}X(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Y(s) = \frac{H_1(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}X(s) \tag{68}$$

Αρα

$$H(s) = \frac{H_1(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)} \tag{69}$$

(δ΄) Για καθένα από τα τρια,
$H_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$, ευσταθές και αιτιατό.
$H_2(s) = \frac{1}{s-1}$, $\mathrm{Re}\{s\} > 1$, ασταθές και αιτιατό.
$H_3(s) = \frac{1}{s+2}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -2$, ευσταθές και αιτιατό.

(ε΄) Το συνολικό σύστημα γράφεται ώς

$$H(s) = \frac{H_1(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)} = \frac{s-1}{s^2(s+2)} \tag{70}$$

Έχει δύο πόλους στη θέση $s = 0$ και έναν πόλο στη θέση $s = -2$. Επίσης, έχει ένα μηδενικό στο $s = 1$ (και ένα διπλό μηδενικό στο άπειρο). Το πεδίο σύγκλισης είναι το $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ αφού όλα τα επιμέρους πεδία είναι δεξιόπλευρα.

(ϛ΄) Το σύστημα είναι ασταθές, αφού υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα. Είναι όμως αιτιατό. Δεν μπορεί λοιπόν να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(ζ΄) Είναι

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \tag{71}$$

και με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα έχουμε:

$$H(s) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\,\frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = \frac{3}{4}u(t) - \frac{1}{2}tu(t) - \frac{3}{4}e^{-2t}u(t) \tag{72}$$

(η΄) Είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)}\frac{1}{s+1} \tag{73}$$

όμως $R_H = \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$ και $R_x = \{Re\{s\} < -1\}$, άρα δεν υπάρχει τομή των δύο πεδίων σύγκλισης, οπότε δεν μπορούμε να βρούμε το αποτελέσμα στο χώρο του Laplace.

[⋆] Άσκηση 6 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace - II

Αφού

$$e^{2t} \longrightarrow \boxed{\mathsf{S}} \longrightarrow \frac{1}{6}e^{2t}, \ \forall t \tag{74}$$

τότε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης είναι $H(s = 2) = \frac{1}{6}$.
Επίσης,

$$\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sH(s) + 2H(s) = \frac{1}{s+4} + bs \tag{75}$$

$$H(s)(s+2) = \frac{s + b(s+4)}{s(s+4)} \tag{76}$$

$$H(s) = \frac{s + bs + 4b}{s(s+4)(s+2)} \tag{77}$$

και αφού $H(2) = \frac{1}{6}$ τότε

$$H(2) = \frac{2+6b}{48} = \frac{1}{6} \to b = 1 \tag{78}$$

και

$$H(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+4)(s+2)} = \frac{2}{s(s+4)} \tag{79}$$

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, και οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = 0, s = -4$ θα είναι $R_H = \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$. Αφού $H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$, με $A = \frac{1}{2}$ και $B = -\frac{1}{2}$ μετά από ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, η κρουστική απόκριση θα έχει την μορφή

$$h(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}u(t) \tag{80}$$

Το σύστημα δεν είναι ευσταθές, αφού δεν περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j2\pi f$ στο πεδίο σύγκλισης του.

Άσκηση 7 - Δειγματοληψία και Σήματα Διακριτού Χρόνου - Ι

Θέτουμε $t = nT_s = n/f_s$ και έχουμε

$$x_1(nTs) = \cos(2\pi 10 nT_s) = \cos\left(2\pi 10 \frac{n}{40}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = x_1[n] \tag{81}$$

$$x_2(nTs) = \cos(2\pi 50 nT_s) = \cos\left(2\pi 50 \frac{n}{40}\right) = \cos\left(\frac{10\pi n}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n + 8\pi n}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 2\pi n\right) \tag{82}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = x_2[n] \tag{83}$$

αφού $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$, για $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε πως $x_1[n] = x_2[n]$. Αυτό επιβεβαιώνεται κι αν σχεδιάσουμε μερικά δείγματα στο χρόνο. Αυτό συμβαίνει γιατί το $x_2(t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα μικρότερη της $2f_{max} = 100$ Hz.

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία και Σήματα Διακριτού Χρόνου - ΙΙ

(α') Ο ρυθμός Nyquist είναι $2f_{max}$, δηλαδή $2 \cdot 6000 = 12000Hz$

(β') Θέτουμε $t = nT_s = \frac{n}{5000}$ και τότε:

$$\begin{aligned} x_a(nT_s) &= 3\cos\left(2\pi 1000 \frac{n}{5000}\right) + 5\sin\left(2\pi 3000 \frac{n}{5000}\right) + 10\cos\left(2\pi 6000 \frac{n}{5000}\right) \\ &= 3\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{6\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{12\pi n}{5}\right) \\ &= x[n] \end{aligned}$$

(γ') Αφού $f_s < f_{max}$, τότε δεν μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το $x_a(t)$ από το $x[n]$. Έχουμε

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{6\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{12\pi n}{5}\right) \tag{84}$$

$$= 3\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{10\pi n - 4\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{10\pi n + 2\pi n}{5}\right) \tag{85}$$

$$= 3\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 5\sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \tag{86}$$

$$= 13\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 5\sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \tag{87}$$

Θέτοντας $n = tf_s = 5000t$, το σήμα που ανακτούμε είναι το $x'_a(t) = 13\cos(2\pi 1000t) - 5\sin(2\pi 2000t)$.