

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/3/2026

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/3/2026

Ως την ώρα λήξης της προόδου, είτε γραπτά είτε ηλεκτρονικά.

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Απλή Σειρά Fourier - I

Δίδονται τρία πραγματικά, περιοδικά σήματα τα οποία αναπτύσσονται σε σειρά Fourier. Οι μη μηδενικοί συντελεστές Fourier για $k > 0$ δίδονται ακολούθως, και σας ζητείται να βρείτε τις σειρές Fourier $x_i(t)$ σε τριγωνομετρική μορφή.

(α) $x_1(t) : T_0 = 2, X_1 = -1, X_3 = 1$

Απ: $x_1(t) = 2 \cos(\pi t + \pi) + 2 \cos(3\pi t)$

(β) $x_2(t) : T_0 = 1, X_1 = 1/j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{2}, X_4 = -j\frac{1}{2}$

Απ: $x_2(t) = 2 \cos(2\pi t - \pi/2) + \cos(4\pi t - \pi/2) + \cos(6\pi t + \pi/2) + \cos(8\pi t - \pi/2)$

(γ) $x_3(t) : T_0 = 1/2, X_2 = 2e^{j\pi/3}, X_3 = -e^{-j\pi/4}$

Απ: $x_3(t) = 4 \cos(8\pi t + \pi/3) + 2 \cos(12\pi t + 3\pi/4)$

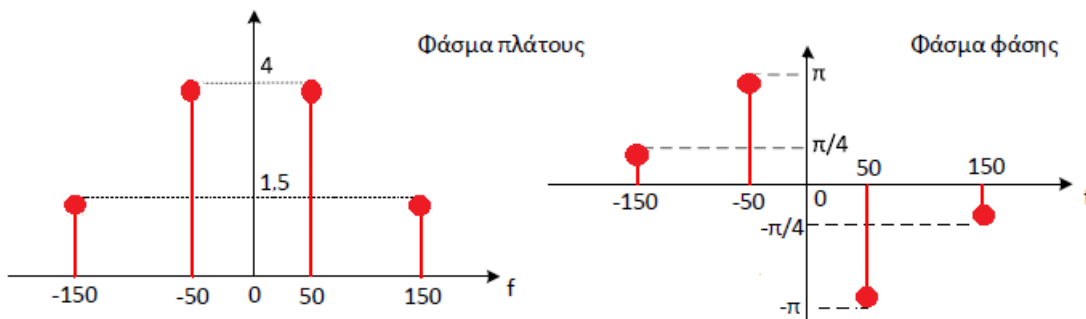
Άσκηση 2 - Απλή Σειρά Fourier - II

I. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = -2 + 2 \cos(2\pi 100t + \pi/3) - \sin(2\pi 250t + \pi/4) \quad (1)$$

δείχνοντας αναλυτικά τα βήματά σας.

II. Σας δίνονται τα παρακάτω φάσματα πλάτους και φάσης, στην “καταχρηστική” μορφή με τον οριζόντιο άξονα σε f (Hz) κι όχι σε k^1 .



Σχήμα 1: Φάσματα Άσκησης 2.

¹Δε σημαίνει κάτι αυτό, απλά το αναφέρω, καθώς συμφωνήσαμε στο μάθημα να χρησιμοποιούμε τον άξονα k αντί του f , ως σωστότερου.

Βρείτε το σήμα στο χρόνο $x(t)$ στο οποίο αυτά αντιστοιχούν.

$$\underline{\text{Απ:}} x(t) = 8 \cos(2\pi 50t - \pi) + 3 \cos(2\pi 150t - \pi/4)$$

Άσκηση 3 - Σειρές Fourier

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδο του ως

$$x(t) = \frac{2}{T_0}t, \quad 0 \leq t < T_0 \quad (2)$$

Σας δίνεται ότι $\int_a^b t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} \left(t - \frac{1}{a} \right) \Big|_a^b$

- i. Σχεδιάστε το σήμα στο χρόνο (2-3 περιόδους του).
- ii. Αναπτύξτε αναλυτικά το περιοδικό σήμα σε εκθετική σειρά Fourier.

$$\underline{\text{Απ:}} X_0 = 1, \quad X_k = \frac{1}{k\pi} e^{j\pi/2}$$

- iii. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του (σχεδιάστε ως $k = \pm 4$).
- iv. Γράψτε αναλυτικά το περιοδικό σήμα σε τριγωνομετρική σειρά Fourier.

$$\underline{\text{Απ:}} x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi} \cos(2\pi k f_0 t + \pi/2)$$

- v. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την παράγωγο του σήματος της Σχέσης (2), $\frac{d}{dt}x(t)$ με χρήση ιδιοτήτων.

$$\underline{\text{Απ:}} \frac{d}{dt}x(t) = \frac{2}{T_0} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{2}{T_0} \right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

[*] Άσκηση 4 - Σειρές Fourier και Ιδιότητες - I

Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $T_0 = 2\pi$, σήμα που δίνεται σε μια περίοδο του ως

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2, \quad 0 \leq t < T_0 \quad (3)$$

Η σχεδίαση του σήματος και η ιδιότητα της παραγωγίσης θα σας βοηθήσουν.

$$\underline{\text{Απ:}} X_0 = \frac{\pi^2}{3}, \quad X_k = \frac{1}{2k^2} + \frac{\pi}{2k} e^{j\pi/2}$$

Άσκηση 5 - Σειρές Fourier και Ιδιότητες - II

Δίνεται το περιοδικό σήμα που σε μια περίοδο $T_0 = 1$ εκφράζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 2, & |t| \leq 0.25 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4)$$

Βρείτε με δοκιμές τον αριθμό των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier που περιέχει τουλάχιστον το 97% της συνολικής μέσης ισχύος του σήματος. Αν θέλετε, χρησιμοποιήστε Python ή αριθμομηχανή, αλλά δείξτε όλα τα βήματα της λύσης σας.

Απ: 9 μη μηδενικοί όροι, από $k = -7$ ως 7 για k περιττά.

Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - I

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες και τους πίνακες με ζεύγη μετασχ. Fourier των σημειώσεών σας για να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

$$(α) X(f) = \frac{j4\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

$$(β) X(f) = \frac{4 \sin^2(2\pi f)}{(2\pi f)^2}$$

Απ: (α) $e^t u(-t) - e^{-t} u(t)$, (β) $2\text{tri}(t/2)$

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - II

Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$ ως

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2}, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5)$$

Έστω το σήμα

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 4\pi^2 x(t) \quad (6)$$

Δείξτε - χωρίς να υπολογίσετε το $x(t)$ - ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{64}{15} \quad (7)$$

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ENA ενιαίο αρχείο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

csd4876@csd.uoc.gr

με τίτλο: **[HY215] Παράδοση 3ης σειράς ασκήσεων**

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.