

**HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2025-26**

**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων**

**Άσκηση 1 - Απλή Σειρά Fourier - I**

(i) Είναι  $T_0 = 2$ ,  $X_1 = -1$ ,  $X_3 = -1$  και λόγω του ότι  $x(t) \in \mathbb{R}$  θα είναι

$$X_{-1} = X_1^* = -1 \quad (1)$$

$$X_{-3} = X_3^* = -1 \quad (2)$$

οπότε:

$$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_k X_k e^{j2\pi k \frac{1}{2} t} = \sum_k X_k e^{j\pi k t} \quad (3)$$

$$= 1e^{-j3\pi t} + (-1)e^{-j\pi t} + (-1)e^{j\pi t} + 1e^{j3\pi t} \quad (4)$$

$$= 1e^{-j3\pi t} + e^{-j\pi} e^{-j\pi t} + e^{j\pi} e^{j\pi t} + 1e^{j3\pi t} \quad (5)$$

$$= 2 \cos(3\pi t) + 2 \cos(\pi t + \pi) \quad (6)$$

(ii) Όπως και πριν

$$X_1 = \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \implies X_{-1} = X_1^* = j = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (7)$$

$$X_2 = -\frac{j}{2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \implies X_{-2} = X_2^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (8)$$

$$X_3 = \frac{j}{2} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \implies X_{-3} = X_3^* = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (9)$$

$$X_4 = -\frac{j}{2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \implies X_{-4} = X_4^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (10)$$

Άρα

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j2\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j4\pi t} \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j6\pi t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j6\pi t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j8\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j8\pi t} \quad (12)$$

Τελικά

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (13)$$

(iii) Όμοια με πριν

$$X_2 = 2e^{j\frac{\pi}{3}} \implies X_{-2} = X_2^* = 2e^{-j\frac{\pi}{3}} \quad (14)$$

και

$$X_3 = -e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{3\pi}{4}} \implies X_{-3} = X_3^* = -e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{-j\frac{3\pi}{4}} \quad (15)$$

οπότε

$$x(t) = 4 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(12\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \quad (16)$$

**Άσκηση 2 - Απλή Σειρά Fourier - II**

(I) Έχουμε

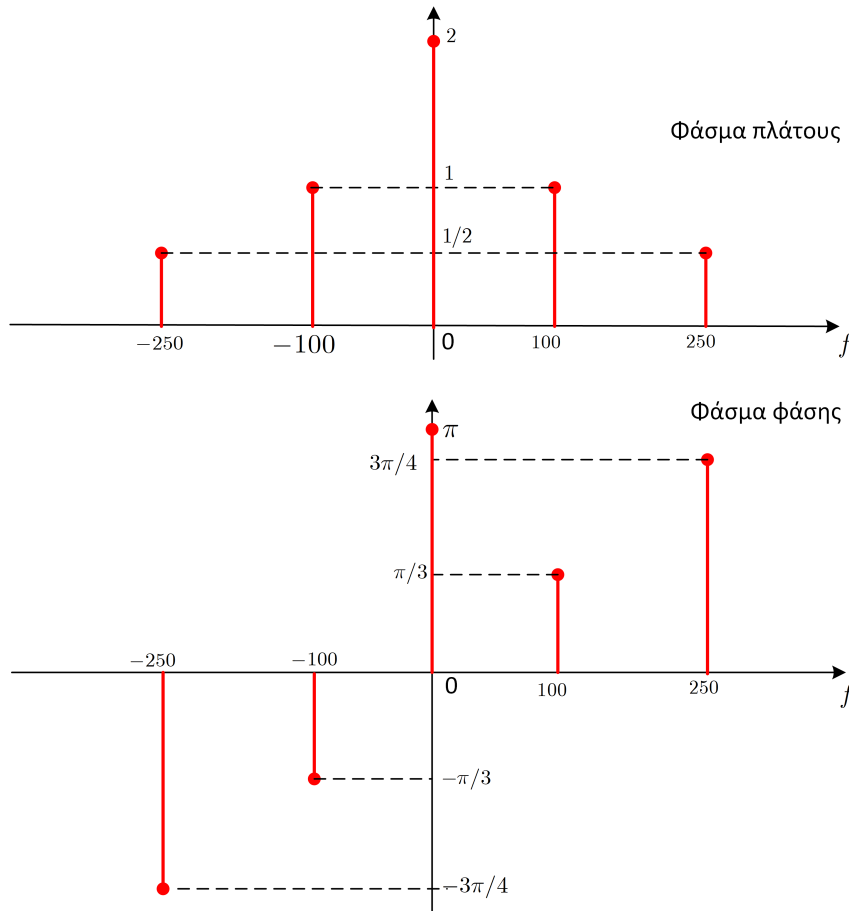
$$x(t) = -2 + 2 \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\pi 250t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (17)$$

$$= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} \quad (18)$$

$$= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} \quad (19)$$

$$= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} \quad (20)$$

και άρα τα φάσματα θα είναι όπως στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσματα Άσκησης 2.

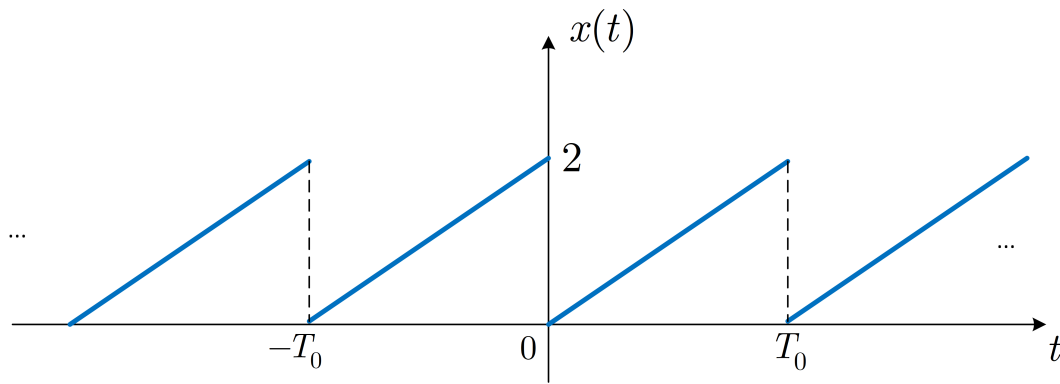
(II) Από τα φάσματα και τις φασματικές γραμμές, έχουμε

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 150t} + \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 150t} + 4e^{-j\pi} \cdot e^{j2\pi 50t} + 4e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi 50t} \quad (21)$$

$$= 3 \cos\left(2\pi 150t - \frac{\pi}{4}\right) + 8 \cos(2\pi 50t - \pi) \quad (22)$$

**Άσκηση 3 - Σειρές Fourier**

(i) Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σχήμα Ασκήσης 3.

(ii) Θα έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{2}{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (23)$$

$$= \frac{2}{T_0^2} \left( \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \left( t + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) \right) \Big|_0^{T_0} \quad (24)$$

$$= \left( \frac{2}{T_0^2} t \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} + \frac{2}{T_0^2} \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \frac{1}{-j2\pi k f_0} \right) \Big|_0^{T_0} \quad (25)$$

$$= \frac{2}{T_0^2} T_0 \frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0}}{-j2\pi k f_0} + \frac{2}{T_0^2} \frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0}}{-j2\pi k f_0} \cdot \frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{2}{T_0^2} \frac{1}{-j2\pi k f_0} \cdot \frac{1}{j2\pi k f_0} \quad (26)$$

$$= \frac{2}{T_0} \frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{2}{T_0^2} \frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k} \cdot \frac{1}{j2\pi k} + \frac{2}{T_0^2} \frac{1}{(j2\pi k f_0)^2} \quad (27)$$

$$= \frac{2}{-j2\pi k f_0 T_0} - \frac{2}{T_0^2 (-j2\pi k f_0)^2} + \frac{2}{T_0^2 (j2\pi k f_0)^2} \quad (28)$$

$$= -\frac{2}{-j2\pi k} = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (29)$$

ενώ

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{2}{T_0} t dt = \frac{2}{T_0^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{T_0} = 1 \quad (30)$$

(iii) Είναι

$$X_k = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}}, & k > 0 \\ \frac{1}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k < 0 \end{cases} \quad (31)$$

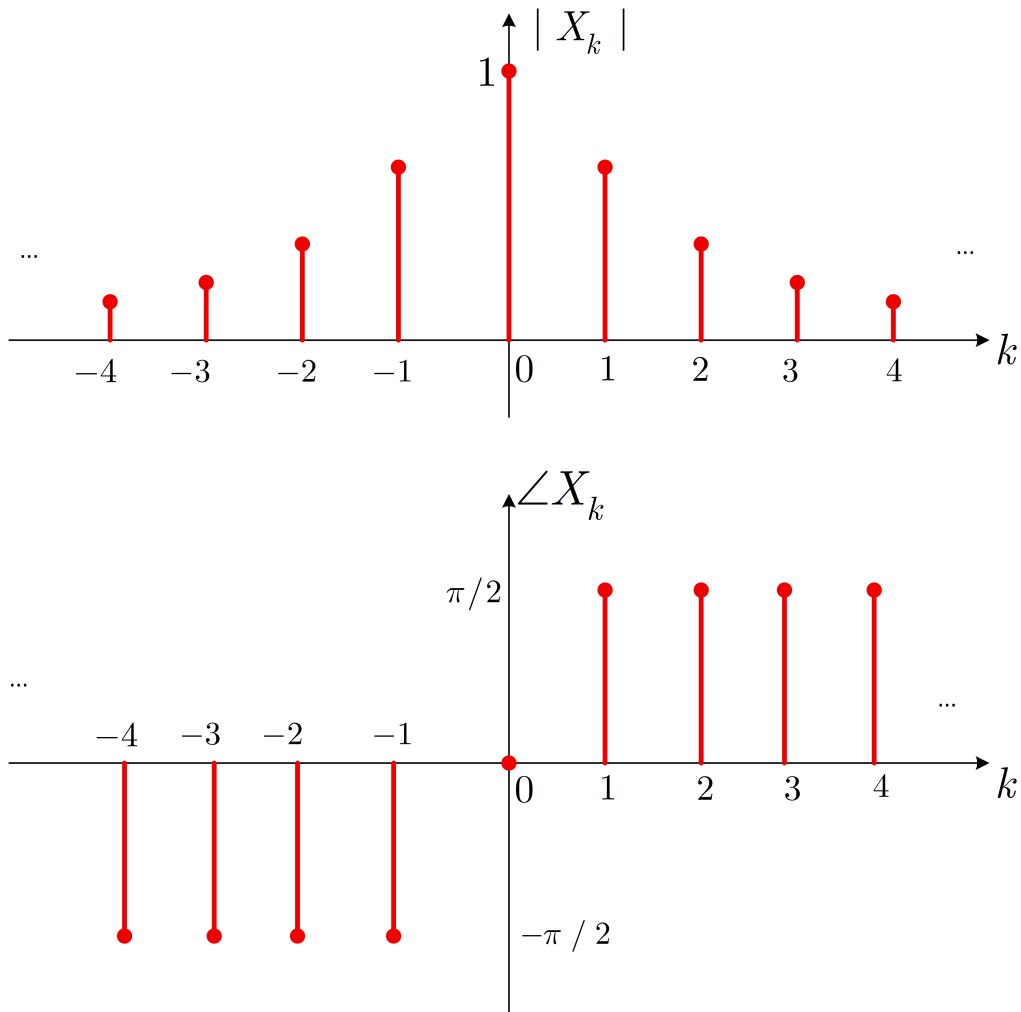
Οπότε

$$|X_k| = \frac{1}{\pi |k|} \quad (32)$$

και

$$\phi_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & k < 0 \end{cases} \quad (33)$$

Άρα έχουμε τα φάσματα στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Φάσματα Ασκήσης 3.

(iv) Είναι

$$x(t) = 1 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k} \cos\left(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (34)$$

(v) Είναι

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow Y_k = j2\pi k f_0 X_k = -\frac{2}{T_0}, \quad \forall k \neq 0 \quad (35)$$

Για  $k = 0$ ,  $Y_0 = \frac{2}{T_0}$ , άρα

$$y(t) = \frac{2}{T_0} - \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{2}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (36)$$

**[\*] Άσκηση 4 - Σειρές Fourier και Ιδιότητες - I**

Η ιδιότητα παραγωγίσης της σειράς Fourier λέει ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi k f_0 X_k = jk X_k \quad (37)$$

αφού  $f_0 = 1/(2\pi)$ . Επειδή όμως το σήμα  $x(t)$  παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία  $t_m = 2\pi m$ , η παράγωγος πρέπει να γραφτεί ως άθροισμα δύο όρων:

$$x'(t) = x'_1(t) + x'_2(t) \quad (38)$$

Στο εσωτερικό της περιόδου του σήματος  $x(t)$  έχουμε την παράγωγο

$$x'_1(t) = \frac{t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi, \quad (39)$$

Η ασυνέχεια του  $x(t)$  στο όριο της περιόδου είναι

$$x(0^+) - x(2\pi^-) = 0 - \frac{(2\pi)^2}{4} = -\pi^2 \quad (40)$$

Άρα ο δεύτερος όρος είναι μια περιοδική ακολουθία παλμών:

$$x'_2(t) = -\pi^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \quad (41)$$

Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές κάθε όρου ξεχωριστά.

- **Συντελεστές Fourier του  $x'_1(t)$ :** Έστω  $F_k$  οι συντελεστές Fourier του πρώτου όρου της παραγωγού. Τότε θα είναι

$$F_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t}{2} e^{-jkt} dt \quad (42)$$

Για  $k = 0$ :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{t^2}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} \quad (43)$$

Για  $k \neq 0$ :

$$F_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} t e^{-jkt} dt \quad (44)$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_0^{2\pi} t e^{-jkt} dt = \frac{2\pi j}{k}, \quad (45)$$

οπότε

$$F_k = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi j}{k} = \frac{j}{2k}, \quad k \neq 0 \quad (46)$$

Άρα

$$F_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = 0, \\ \frac{j}{2k}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (47)$$

- **Συντελεστές Fourier του  $x'_2(t)$ :** Έστω  $Y_k$  οι συντελεστές Fourier του δεύτερου όρου της παραγωγού. Για

$$x'_2(t) = -\pi^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m), \quad (48)$$

οι συντελεστές  $Y_k$  είναι

$$Y_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\pi^2 \delta(t)) e^{-jkt} dt = -\frac{\pi^2}{2\pi} = -\frac{\pi}{2} \quad (49)$$

Επομένως

$$Y_k = -\frac{\pi}{2}, \quad \forall k \quad (50)$$

- **Συντελεστές Fourier της παραγώγου**  $x'(t)$ : Αν  $D_k$  είναι οι συντελεστές Fourier της παραγώγου  $x'(t)$ , τότε

$$D_k = F_k + Y_k \quad (51)$$

Για  $k = 0$ :

$$D_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (52)$$

Για  $k \neq 0$ :

$$D_k = \frac{j}{2k} - \frac{\pi}{2} \quad (53)$$

Άρα

$$D_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{j}{2k}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (54)$$

- **Υπολογισμός των συντελεστών**  $X_k$  του δοθέντος σήματος: Από την ιδιότητα παραγώγισης,

$$jkX_k = D_k \quad (55)$$

Για  $k \neq 0$ :

$$jkX_k = -\frac{\pi}{2} + \frac{j}{2k}, \quad (56)$$

άρα

$$X_k = \frac{1}{jk} \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{j}{2k} \right) = \frac{1}{2k^2} + \frac{j\pi}{2k}, \quad k \neq 0 \quad (57)$$

Για  $k = 0$ , ο όρος υπολογίζεται απευθείας:

$$X_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{4} dt = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{3} \quad (58)$$

Έτσι, εν τέλει

$$X_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad (59)$$

$$X_k = \frac{\pi}{2k} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2k^2}, \quad \forall k \neq 0 \quad (60)$$

Εναλλακτικά, με χρήση του ορισμού, είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{4} t^2 dt = \frac{1}{4T_0} \int_0^{T_0} t^2 dt = \frac{1}{4T_0} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T_0} = \frac{T_0^2}{12} \quad (61)$$

και με  $T_0 = 2\pi$ , είναι

$$X_0 = \frac{4\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3} \quad (62)$$

Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{4} t^2 e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (63)$$

$$= \frac{1}{4T_0} \int_0^{T_0} t^2 e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (64)$$

$$= \frac{1}{4T_0} \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)^3} \left( (-j2\pi k f_0)^2 + 2j2\pi k f_0 t + 2 \right) \Big|_0^{T_0} \quad (65)$$

$$= \frac{1}{4T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3} ((-j2\pi k f_0 T_0)^2 + j4\pi k f_0 T_0 + 2) - \frac{1}{4T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3} \cdot 2 \quad (66)$$

$$= \frac{1}{4T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3} ((-j2\pi k)^2 + j4\pi k) \quad (67)$$

$$= \frac{1}{4T_0} \frac{1}{(-j2\pi k)^3 f_0^3} (-j2\pi k)^2 + \frac{1}{4T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3} j4\pi k \quad (68)$$

$$= \frac{1}{4T_0} \frac{1}{-j2\pi k f_0^3} + \frac{1}{4T_0} \frac{j4\pi k}{(-j2\pi k f_0)^2 (-j2\pi k f_0)} \quad (69)$$

$$= \frac{1}{8\pi k f_0^2} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \frac{2}{4\pi^2 k^2 f_0^2} \quad (70)$$

και για  $f_0 = \frac{1}{2\pi}$  είναι

$$X_k = \frac{1}{8\pi k} \frac{1}{4\pi^2} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \frac{2}{2\pi^2 k^2} \frac{1}{4\pi^2} \quad (71)$$

$$= \frac{\pi}{2k} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2k^2}, \forall k \neq 0 \quad (72)$$

### Άσκηση 5 - Σειρές Fourier και Ιδιότητες - II

Ξέρουμε ότι

$$X_k = \frac{2}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}(k-1)} \quad (73)$$

από σχετικό παράδειγμα των διαλέξεων (ιδιότητες σειρών Fourier), για  $k$  περιττό και  $X_0 = 1$ .

Η συνολική ισχύς είναι

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \quad (74)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} 2^2 dt = 4t \Big|_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} = 2 \quad (75)$$

Με δοκιμές βλέπουμε ότι για  $k = 0, \pm 1$ , είναι  $P_k = 1.8106$ , που αποτελεί το 90.53% της συνολικής ενέργειας. Για  $k = 0, \pm 1, \pm 3$ , έχουμε ότι  $P_k = 1.9006$ , που αποτελεί το 95.03% της συνολικής ισχύος. Με όμοιο τρόπο, για  $k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5 \pm 7$ , είναι  $P_k = 1.9496$ , που αποτελεί το 97.48% της συνολικής ισχύος του σήματος. Άρα απαιτούνται  $k = 5$  θετικοί όροι  $[0, 1, 3, 5, 7]$ , δηλ. 9 όροι της εκθετικής σειράς  $([-7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7])$  για να έχουμε το 97% της συνολικής ισχύος του περιοδικού σήματος.

### Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - I

(α) Γνωρίζουμε το ζεύγος

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (76)$$

και για  $a = 1$  παίρνουμε

$$x(t) = e^{-|t|} \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} \quad (77)$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο

$$\frac{d}{dt} x(t) \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (78)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα στο ζεύγος μας

$$\frac{d}{dt}e^{-|t|} \longleftrightarrow j2\pi f \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} = \frac{j4\pi f}{1+4\pi^2 f^2} \quad (79)$$

και έχουμε το δεξί μέλος, το μετασχηματισμό που ζητείται. Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι

$$\frac{d}{dt}e^{-|t|} = \frac{d}{dt}(e^t u(t) + e^{-t} u(t)) = e^t u(-t) - e^{-t} u(t) \quad (80)$$

χρησιμοποιώντας ότι  $u'(t) = \delta(t)$ .

(β) Μπορούμε να γράψουμε

$$X(f) = \frac{4 \sin^2(2\pi f)}{(2\pi f)^2} = 4 \left( \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} \right)^2 = 4 \operatorname{sinc}^2(2f) \quad (81)$$

και από το γνωστό ζεύγος

$$A \operatorname{tri} \left( \frac{t}{T} \right) \longleftrightarrow AT \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (82)$$

έχουμε

$$x(t) = 2 \operatorname{tri} \left( \frac{t}{2} \right) \longleftrightarrow X(f) = \frac{4 \sin^2(2\pi f)}{(2\pi f)^2} \quad (83)$$

### Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - II

Από το θεώρημα Parseval ξέρουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \frac{64}{15} \quad (84)$$

Επίσης

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 4\pi^2 x(t) \longleftrightarrow Y(f) = (j2\pi f)^2 X(f) + 4\pi^2 X(f) = -4\pi^2 f^2 X(f) + 4\pi^2 X(f) \quad (85)$$

Αντικαθιστώντας

$$Y(f) = \begin{cases} -4\pi^2 f^2 \frac{1}{2\pi^2} + 4\pi^2 \frac{1}{2\pi^2}, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -2f^2 + 2, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 2(1 - f^2), & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (86)$$

και άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-1}^1 4(1 - f^2)^2 df \quad (87)$$

$$= \int_{-1}^1 4(1 - 2f^2 + f^4) df \quad (88)$$

$$= \left( 4f - \frac{8}{3} f^3 + \frac{4}{5} f^5 \right) \Big|_{-1}^1 \quad (89)$$

$$= \left( 4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5} - (-4) - \frac{8}{3} + \frac{4}{5} \right) \quad (90)$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + \frac{8}{5} = \frac{64}{15} \quad (91)$$