ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1 - Σήματα Ι

(α') Έχουμε

$$E_{ax} = \int_{-\infty}^{\infty} |ax(t)|^2 \, dt \tag{1}$$
$$= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \tag{2}$$
$$= a^2 E_x \tag{3}$$

(β') Έχουμε

$$E_{x(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-t_0)|^2 \, dt \tag{4}$$

Θέτουμε $\tau = t - t_0 \Longrightarrow dt = d\tau$ και τα άκρα παραμένουν $(-\infty, \infty)$:

$$E_{x(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \, d\tau = E_x \tag{5}$$

(γ') Έχουμε

$$E_{x(at)} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(at)|^2 \, dt \tag{6}$$

Θέτουμε $\tau = at \Longrightarrow dt = \frac{1}{a} d\tau$. Για $a > 0$:

$$E_{x(at)} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \, d\tau = \frac{1}{a} E_x \tag{7}$$

Αν $a < 0$

$$E_{x(at)} = -\frac{1}{|a|} \int_{+\infty}^{-\infty} |x(\tau)|^2 \, d\tau = \frac{1}{|a|} E_x \tag{8}$$

Για σήματα ισχύος, έστω $y(t) = x(at)$

$$P_y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(at)|^2 \, dt \tag{9}$$

Με $\tau = at$, $dt = \frac{1}{a} d\tau$ (για $a > 0$):

$$P_y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{a} \int_{-aT}^{aT} |x(\tau)|^2 \, d\tau \tag{10}$$

Θέτοντας $T' = aT$:

$$P_y = \lim_{T'\to\infty} \frac{1}{2(T'/a)} \cdot \frac{1}{a} \int_{-T'}^{T'} |x(\tau)|^2 \, d\tau = \lim_{T'\to\infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} |x(\tau)|^2 \, d\tau = P_x \tag{11}$$

Το ίδιο ισχύει και για $a < 0$. Άρα

$$P_{x(at)} = P_x \quad \text{(για σήματα ισχύος).} \tag{12}$$

Ασκηση 2 - Σήματα ΙΙ

(α΄) Παρατηρούμε ότι $u(10-t) = 1$ για $t < 10$ και 0 για $t > 10$. Άρα:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & 0 < t < 10, \\ 1, & t > 10 \end{cases} \tag{13}$$

Το σήμα έχει άπειρη διάρκεια με πεπερασμένο πλάτος που δε φθίνει στο μηδέν, και άρα δεν είναι σήμα ενέργειας. Υπολογίζουμε τη μέση ισχύ:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{10} 0\,dt + \int_{10}^{T} 1\,dt\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{T + (T-10)}{2T} = 1 \tag{14}$$

(β΄) Είναι άθροισμα πεπερασμένου πλήθους ημιτόνων/συνημιτόνων, δηλ. περιοδικό σήμα, και άρα είναι σήμα ισχύος. Ξέρουμε ότι για

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \longrightarrow P_x = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k^2}{2} \tag{15}$$

άρα

$$P_x = P_{\cos} + P_{4\sin} = \frac{1^2}{2} + \frac{4^2}{2} = \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2} \tag{16}$$

(γ΄) Έχουμε σήμα πεπερασμένης διάρκειας, με φραγμένο πλάτος, άρα ξεκάθαρα σήμα ενέργειας.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |2\mathrm{rect}(t)|^2\,dt \tag{17}$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}^2(t)\,dt \tag{18}$$

$$= 4\int_{-1/2}^{1/2} 1\,dt = 4 \tag{19}$$

Ασκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

(α΄) Για το $u(t+1) - u(t+2)$, έχουμε

$$u(t+1) = \begin{cases} 1, & t+1 > 0 \\ 0, & t+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > -1 \\ 0, & t < -1 \end{cases} \tag{20}$$

και

$$u(t+2) = \begin{cases} 1, & t+2 > 0 \\ 0, & t+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > -2 \\ 0, & t < -2 \end{cases} \tag{21}$$

οπότε

$$u(t+1) - u(t+2) = \begin{cases} -1, & -2 < t < -1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{22}$$

(β΄) Για το $u(t+3) + u(t+4)$, έχουμε

$$u(t+3) = \begin{cases} 1, & t+3 > 0 \\ 0, & t+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > -3 \\ 0, & t < -3 \end{cases} \tag{23}$$

και

$$u(t+4) = \begin{cases} 1, & t+4 > 0 \\ 0, & t+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > -4 \\ 0, & t < -4 \end{cases} \tag{24}$$

οπότε

$$u(t+3) + u(t+4) = \begin{cases} 0, & t < -4 \\ 1, & -4 < t < -3 \\ 2, & t > -3 \end{cases} \tag{25}$$

(γ′) Πρώτα υπολογίζουμε το

$$u(t-1)-u(t+1)=\begin{cases}0, & t<-1\\ -1, & -1<t<1\\ 0, & t>1\end{cases} \tag{26}$$

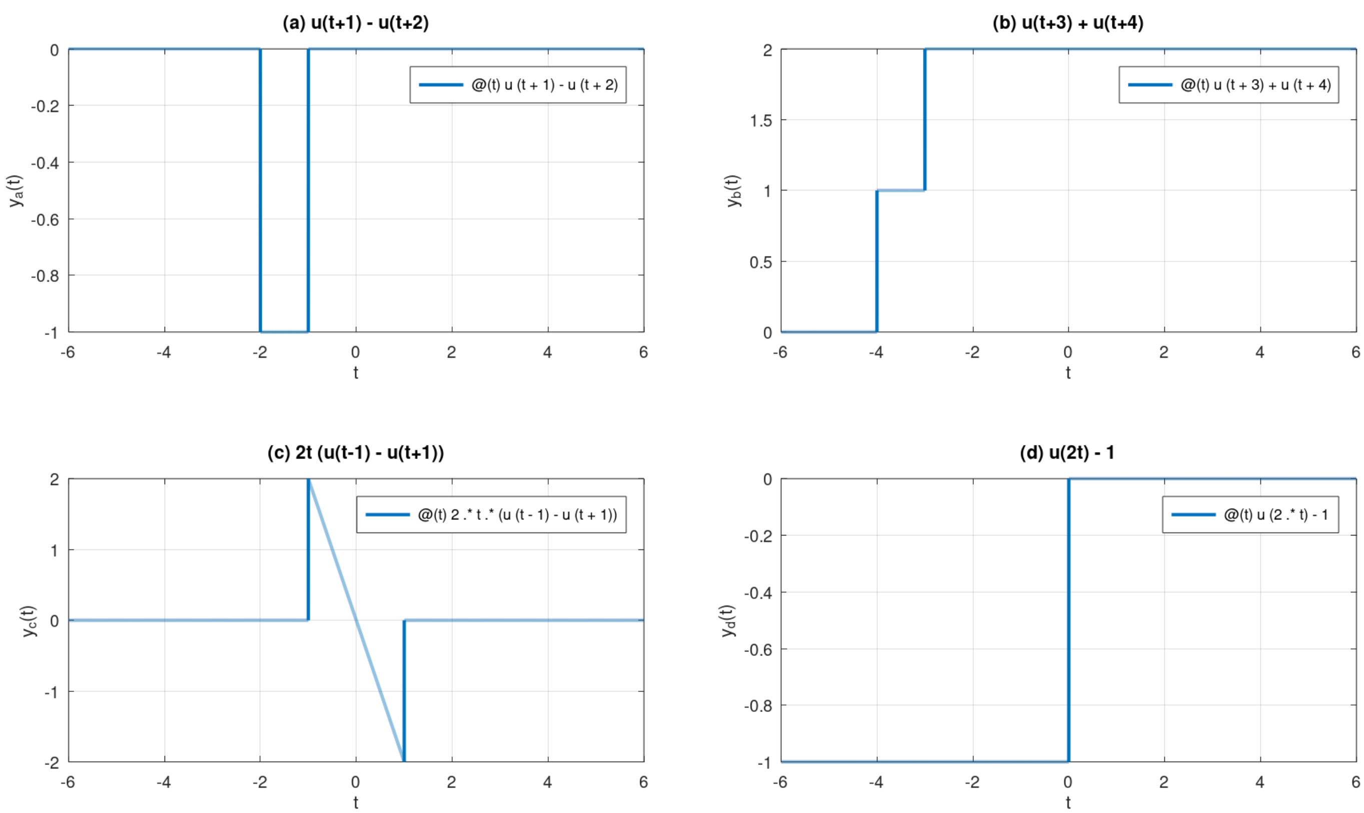
και άρα

$$2t(u(t-1)-u(t+1))=\begin{cases}0, & t<-1\\ -2t, & -1<t<1\\ 0, & t>1\end{cases} \tag{27}$$

(δ′) Επειδή $u(2t)=u(t)$,

$$u(2t)-1=u(t)-1=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t>0\end{cases} \tag{28}$$

Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήματα Άσκησης 3.*

Ασκηση 4 - Συναρτήσεις Δέλτα

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες

$$g(t)\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0), \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)\,dt=g(t_0) \tag{30}$$

με την προϋπόθεση ότι η χρονική στιγμή t_0 ανήκει στο διάστημα ολοκλήρωσης.

(α') Η $\delta(t+2)$ "ζει" στο $t=-2$:

$$(t^2+5t+6)\delta(t+2) = (4-10+6)\delta(t+2) = 0\cdot\delta(t+2) = 0 \tag{31}$$

(β') Είναι

$$\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sin\left(50\pi - \frac{\pi}{2}\right)\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) \tag{32}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) \tag{33}$$

$$= -\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) \tag{34}$$

(γ') Θεωρούμε το x ως παράμετρο (σταθερά ως προς t):

$$(x^2-t)\delta(t-1) = (x^2-1)\delta(t-1) \tag{35}$$

(δ') Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2}\delta(t)\,dt = e^0 = 1 \tag{36}$$

(ε') Το σημείο $t_0 = e^{1000}$ δεν ανήκει στο $[10,20]$, άρα το ολοκλήρωνα ισούται με μηδέν.

(ϛ') Το σημείο $t_0 = 2$ δεν ανήκει στο $(-\infty,-1]$, άρα ξανά το ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν.

[$\star$] Ασκηση 5 - Συναρτήσεις Δέλτα και Προσεγγίσεις της

Όπως υποδεικνύει η εκφώνηση

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-at}u(t)dt = \int_{0}^{+\infty} ae^{-at}dt = \Big[-e^{-at}\Big]_0^{+\infty} = 1 \tag{37}$$

πράγματι λοιπόν, έχει μοναδιαίο εμβαδό όταν $a\to+\infty$. Για $\varepsilon>0$,

$$\int_{|t|>\varepsilon} ae^{-at}u(t)\,dt = \int_{\varepsilon}^{\infty} ae^{-at}\,dt = \Big[-e^{-at}\Big]_{\varepsilon}^{\infty} = e^{-a\varepsilon} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0. \tag{38}$$

Άρα η συνάρτηση $x(t) = ae^{-at}u(t)$ λειτουργεί ως προσέγγιση της $\delta(t)$ όταν $a\to+\infty$.

Ασκηση 6 - Συστήματα

(α') • **Γραμμικό:** για εισόδους (ξεχωριστά) τα σήματα $ax_1(t)$, $bx_2(t)$, οι έξοδοι θα είναι αντίστοιχα

$$ax_1(t) \to ax_1(2-t)u(t) = ay_1(t) \tag{39}$$

$$bx_2(t) \to bx_2(2-t)u(t) = by_2(t) \tag{40}$$

τότε για είσοδο $ax_1(t)+bx_2(t)$, η έξοδος θα είναι

$$ax_1(t)+bx_2(t) \to (ax_1(2-t)+bx_2(2-t))u(t-2) = ax_1(2-t)u(t-2)+bx_2(2-t)u(t-2) \tag{41}$$

$$= ay_1(t)+by_2(t) \tag{42}$$

άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- **Χ.Α.:** για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος θα είναι $y_{x(t-t_0)}(t) = x(2-t-t_0)u(t-2)$, ενώ η καθυστερημένη κατά t_0 έξοδος γράφεται ως $y(t-t_0) = x(2-t-t_0)u(t-t_0)$. Οι σχέσεις αυτές δεν είναι ίσες, άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.
- **Ευσταθές:** αν $|x(t)| < M$, τότε η έξοδος $|y(t)| = |x(2-t)u(t-2)| = |x(2-t)||u(t-2)| < M$, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.
- **Αιτιατό:** για $t > 2$, ο όρος $2-t < 0 < t$ άρα εξαρτάται από τιμές της εισόδου $x(\tau)$ με $\tau < t$ (και για $t < 2$, $y(t) = 0$). Το σύστημα είναι αιτιατό.
- **Δυναμικό:** το σύστημα είναι δυναμικό διότι η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται από την είσοδο $x(2-t)$ (όχι από $x(t)$ μόνο), δηλ. για να υπολογιστεί το $y(3)$ χρειαζόμαστε το $x(-1)$ (που πρέπει να είναι κάπου αποθηκευμένο).

(β΄)

- **Γραμμικό:** για εισόδους (ξεχωριστά) τα σήματα $ax_1(t)$, $bx_2(t)$, οι έξοδοι θα είναι αντίστοιχα

$$ax_1(t) \to \left(\frac{1}{2}\right)^{ax_1(t)} \neq a\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1(t)} = ay_1(t) \tag{43}$$

$$bx_2(t) \to \left(\frac{1}{2}\right)^{bx_2(t)} \neq b\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2(t)} = by_2(t) \tag{44}$$

  οπότε το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές.
- **Χ.Α.:** για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος θα είναι $y_{x(t-t_0)}(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x(t-t_0)}$, ενώ η καθυστερημένη κατά t_0 έξοδος γράφεται ως $y(t-t_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x(t-t_0)}$. Οι σχέσεις αυτές είναι ίσες, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.
- **Ευσταθές:** αν $|x(t)| < M$, τότε η έξοδος $|y(t)| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x(t)}\right| < 2^M$, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.
- **Αιτιατό:** είναι αιτιατό γιατί εξαρτάται μόνο από τωρινές και όχι απο μελλοντικές τιμές της εισόδου.
- **Δυναμικό:** δεν είναι δυναμικό, είναι στατικό, γιατί δεν απαιτεί μνήμη για την αποθήκευση τιμών της εισόδου.

(γ΄)

- **Γραμμικό:** για εισόδους (ξεχωριστά) τα σήματα $ax_1(t)$, $bx_2(t)$, οι έξοδοι θα είναι αντίστοιχα

$$ax_1(t) \to \sin(tax_1(t-1)) \neq a\sin(tx_1(t-1)) = ay_1(t) \tag{45}$$

$$bx_2(t) \to \sin(tbx_2(t-1)) \neq b\sin(tx_2(t-1)) = by_2(t) \tag{46}$$

  οπότε το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές.
- **Χ.Α.:** για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος θα είναι $y_{x(t-t_0)}(t) = \sin(tx(t-t_0-1))$, ενώ η καθυστερημένη κατά t_0 έξοδος γράφεται ως $y(t-t_0) = \sin((t-t_0)x(t-t_0-1))$. Οι σχέσεις αυτές είναι δεν ίσες, άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.
- **Ευσταθές:** για είσοδο $|x(t)| < M$, η έξοδος $|y(t)| \leq 1$, λόγω ημιτόνου, για κάθε είσοδο $x(t)$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.
- **Αιτιατό:** το σύστημα είναι αιτιατό εξαρτάται από την είσοδο $x(t-1)$ (παρελθόντικές τιμές).
- **Δυναμικό:** το σύστημα είναι δυναμικό, διότι εξαρτάται από την είσοδο $x(t-1)$, δηλ. ο υπολογισμός του $y(5)$ απαιτεί το $x(4)$, που πρέπει να είναι διαθέσιμο σε κάποια μνήμη.

Ασκηση 7 - Διαφορικές Εξισώσεις

(α΄) Θέτουμε $x(t) = 0$ και λύνουμε την ομογενή εξίσωση:

$$y''(t) - \frac{1}{6}y'(t) - \frac{1}{6}y(t) = 0 \tag{47}$$

που καταλήγει στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0 \tag{48}$$

με χαρακτηριστικές ρίζες

$$\lambda = \frac{\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{6}}}{2} = \frac{\frac{1}{6} \pm \frac{5}{6}}{2} \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}. \tag{49}$$

Άρα

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{-t/3}, \qquad t > 0 \tag{50}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0^-) = 1$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $c_1 + c_2 = 1$. Από την αρχική συνθήκη $y'(0^-) = 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 0 \Longrightarrow 3c_1 - 2c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = \frac{3}{2}c_1$. Άρα $c_1 = \frac{2}{5}$ και $c_2 = \frac{3}{5}$, οπότε

$$y_{zi}(t) = \left(\frac{2}{5}e^{t/2} + \frac{3}{5}e^{-t/3}\right)u(t) \tag{51}$$

(β') Θεωρούμε το απλούστερο σύστημα

$$S_0 : \qquad y''(t) - \frac{1}{6}y'(t) - \frac{1}{6}y(t) = x(t) \tag{52}$$

με κρουστική απόκριση $h_0(t)$. Θέτουμε $x(t) = \delta(t)$, και τότε $y(t) = h_0(t)$, και λύνουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με ψευδοαρχικές συνθήκες $h_0(0^+) = 0$, $h_0'(0^+) = 1$. Η κρουστική απόκριση του συστήματος αυτού θα είναι

$$h_0(t) = d_1 e^{t/2} + d_2 e^{-t/3}, \qquad t > 0 \tag{53}$$

Από την αρχική συνθήκη $h_0(0^+) = 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $d_1 + d_2 = 0 \Longleftrightarrow d_1 = -d_2$. Από την αρχική συνθήκη $h_0'(0^+) = 1$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $\frac{1}{2}d_1 - \frac{1}{3}d_2 = 1 \Longrightarrow 3d_1 - 2d_2 = 1 \Longrightarrow -3d_2 - 2d_2 = 6$. Άρα $d_2 = -\frac{6}{5}$ και $d_1 = \frac{6}{5}$, οπότε

$$h_0(t) = \left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)u(t) \tag{54}$$

Για το αρχικό μας σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_0(t) + 2h_0'(t) = \left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)u(t) + 2\left(\left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)u(t)\right)' \tag{55}$$

$$= \left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)u(t) + 2\left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)'u(t) + 2\left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)u'(t) \tag{56}$$

$$= \left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)u(t) + 2\left(\frac{6}{10}e^{t/2} + \frac{6}{15}e^{-t/3}\right)u(t) + 2\left(\frac{6}{5}e^{t/2} - \frac{6}{5}e^{-t/3}\right)\delta(t) \tag{57}$$

$$= \left(\frac{12}{5}e^{t/2} - \frac{2}{5}e^{-t/3}\right)u(t) \tag{58}$$

(γ') Για $x(t) = u(t)$, η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται ως

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{12}{5}e^{\tau/2} - \frac{2}{5}e^{-\tau/3}\right)u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{59}$$

$$= \int_0^t \left(\frac{12}{5}e^{\tau/2} - \frac{2}{5}e^{-\tau/3}\right)d\tau \tag{60}$$

αφού $u(\tau)u(t-\tau) = 1$, για $0 < \tau < t$. Άρα

$$y_{zs}(t) = \int_0^t \frac{12}{5}e^{\tau/2}d\tau - \int_0^t \frac{2}{5}e^{-\tau/3}d\tau, \quad t > 0 = \frac{24}{5}e^{\tau/2}\Big|_0^t + \frac{6}{5}e^{-\tau/3}\Big|_0^t, \quad t > 0 \tag{61}$$

$$= \frac{24}{5}(e^{t/2} - 1) + \frac{6}{5}(e^{-t/3} - 1), \quad t > 0 = \left(-6 + \frac{24}{5}e^{\frac{1}{2}t} + \frac{6}{5}e^{-\frac{1}{3}t}\right)u(t) \tag{62}$$

(δ') Οι χαρακτηριστικές ρίζες δεν είναι όλες αρνητικές (υπάρχει μια θετική ρίζα), άρα το σύστημα δεν είναι ευσταθές.