ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α') Έχουμε

$$
\begin{aligned}
z\frac{3+j}{j} - (5+6j) &= 12 - j && (1)\\
3z + jz - 5j - 6j^2 &= 12j - j^2 && (2)\\
3z + jz - 5j + 6 &= 12j + 1 && (3)\\
z(3+j) &= 12j + 1 + 5j - 6 && (4)\\
z(3+j) &= -5 + 17j && (5)\\
z &= \frac{-5+17j}{3+j} && (6)\\
&= \frac{(-5+17j)(3-j)}{|3+j|^2} && (7)\\
&= \frac{-15+5j+51j+17}{3^2+1^2} && (8)\\
&= \frac{2+56j}{10} && (9)\\
&= \frac{2}{10} + j\frac{56}{10} && (10)
\end{aligned}
$$

(β') Έχοντας τις εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
z - 2w + jz &= 1 && (11)\\
-3z + 2w &= j && (12)
\end{aligned}
$$

και προσθετοντας κατά μέλη

$$
\begin{aligned}
z - 2w + jz - 3z + 2w &= 1 + j && (13)\\
z - 3z + jz &= 1 + j && (14)\\
z(-2+j) &= 1 + j && (15)\\
z &= \frac{1+j}{-2+j} && (16)\\
&= \frac{(1+j)(-2-j)}{|-2+j|^2} && (17)\\
&= \frac{-2-j-2j+1}{5} && (18)\\
&= -\frac{1}{5} - j\frac{3}{5} && (19)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας στη 2η εξίσωση

$$
-3z + 2w = j \iff \frac{3}{5} + j\frac{9}{5} + 2w = j \iff w = -\frac{3}{10} - j\frac{2}{5} \qquad (20)
$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ
Παραγοντοποιούμε:

$$2z\left(\frac{1}{3+4j}-1\right)=0. \tag{21}$$

Αν $\frac{1}{3+4j}-1=0$ θα είχαμε $3+4j=1$, άτοπο. Έτσι, αναγκαστικά $z=0$.

$$z=0 \tag{22}$$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι
Θέτουμε $z=x+jy$.

(α')

$$\Im\{z\}-2=8 \tag{23}$$
$$y-2=8 \tag{24}$$
$$y=10 \tag{25}$$

Είναι μια οριζόντια ευθεία παράλληλη στον πραγματικό άξονα.

(β')

$$|z-(1+2j)|=5 \tag{26}$$
$$|(x-1)+j(y-2)|=5 \tag{27}$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=25 \tag{28}$$

Είναι κύκλος με κέντρο $(1,2)$ και ακτίνα 5.

(γ')

$$\arg(z-3+4j)=\frac{3\pi}{4} \tag{29}$$
$$\arg(z-3+4j)=\arg((x-3)+j(y+4))=\frac{3\pi}{4} \tag{30}$$

Έτσι $\tan(3\pi/4)=-1$, οπότε

$$\frac{y+4}{x-3}=-1 \iff y=-x-1. \tag{31}$$

Για να είναι η γωνία $3\pi/4$, απαιτείται $(x-3)<0$ (δεύτερο τεταρτημόριο), δηλ. $x<3$. Οπότε

$$y=-x-1, \quad x<3 \tag{32}$$

(Η αρχή του ημιευθύγραμμου είναι ο μιγαδικός $z_0=3-4j$)

(δ')

$$|z+2+3j|=|z-2+j| \tag{33}$$
$$|z-(-2-3j)|=|z-(2-j)| \tag{34}$$
$$|z-(-2-3j)|^2=|z-(2-j)|^2 \tag{35}$$
$$(x+2)^2+(y+3)^2=(x-2)^2+(y+1)^2 \tag{36}$$
$$x^2+4x+4+y^2+6y+9=x^2-4x+4+y^2+2y+1 \tag{37}$$
$$y=-2x-2 \tag{38}$$

[⋆] **Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ**

(α΄) Από τις εξισώσεις $z = 3w + 1 - 2j$ και $|w - 1| = 1$ παίρνουμε

$$w = \frac{z - (1 - 2j)}{3} \tag{39}$$

Η συνθήκη $|w - 1| = 1$ δίνει

$$\left|\frac{z - (1 - 2j)}{3} - 1\right| = 1 \implies \left|\frac{z - (4 - 2j)}{3}\right| = 1 \implies |z - (4 - 2j)| = 3 \tag{40}$$

Με $z = x + jy$, έχουμε

$$|z - (4 - 2j)| = 3 \iff |z - (4 - 2j)|^2 = 3^2 \iff (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9 \tag{41}$$

(β΄) Έχουμε $z = \dfrac{1 + w}{1 - jw}$, $w \neq -j$, και $|w + j| = 1$. Λύνουμε ως προς w:

$$z(1 - jw) = 1 + w \tag{42}$$
$$z - zjw = 1 + w \tag{43}$$
$$w(-zj - 1) = 1 - z \tag{44}$$
$$w = \frac{z - 1}{1 + jz} \tag{45}$$

Τότε

$$w + j = \frac{z - 1}{1 + jz} + j \tag{46}$$
$$= \frac{z - 1 + j(1 + jz)}{1 + jz} \tag{47}$$
$$= \frac{z - 1 + j + j^2 z}{1 + jz} \tag{48}$$
$$= \frac{j - 1}{1 + jz} \tag{49}$$

Οπότε

$$|w + j| = \frac{|j - 1|}{|1 + jz|} = 1 \tag{50}$$

Επειδή $|j - 1| = \sqrt{2}$, παίρνουμε

$$|1 + jz| = \sqrt{2} \tag{51}$$

Με $z = x + jy$, έχουμε τελικά

$$1 + jz = 1 + j(x + jy) = 1 - y + jx \tag{52}$$

δηλ.

$$|1 + jz|^2 = (1 - y)^2 + x^2 = (\sqrt{2})^2 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 2 \tag{53}$$

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

Υπολογίζουμε τους όρους

$$z^2 = \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \tag{54}$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + j\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{55}$$
$$= -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{56}$$

Άρα

$$z^2 - z = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 \tag{57}$$

Επομένως η εξίσωση $z^2 - z = \lambda$ ισχύει για

$$\lambda = -1 \in \mathbb{R} \tag{58}$$

Η αντίστοιχη δευτεροβάθμια είναι

$$z^2 - z + 1 = 0 \tag{59}$$

με πραγματικούς συντελεστές, άρα η άλλη ρίζα είναι η συζυγής της δοθείσας από την εκφώνηση:

$$z^* = \frac{1 - j\sqrt{3}}{2} \tag{60}$$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

Αν έχουμε να λύσουμε την $z^n = re^{j\phi}$, έχουμε

$$z_k = r^{1/n} e^{j(\phi + 2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{61}$$

(αʹ) Είναι

$$z^3 + 8 - 8j = 0 \tag{62}$$

$$z^3 = -8 + 8j \tag{63}$$

με το δεξί μέλος να έχει μέτρο: $r = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$ και φάση: $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{8}{-8}\right) = \frac{3\pi}{4}$:

$$-8 + 8j = 8\sqrt{2} e^{j\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)} \tag{64}$$

Έτσι

$$z_k = (8\sqrt{2})^{1/3} e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)} \quad k = 0, 1, 2 \tag{65}$$

(βʹ) Όμοια, $z^4 = 16 - 16j$, με το δεξί μέλος να έχει μέτρο: $r = \sqrt{16^2 + (-16)^2} = 16\sqrt{2}$ και φάση: $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-16}{16}\right) = -\frac{\pi}{4}$:

$$16 - 16j = 16\sqrt{2} e^{j\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)} \tag{66}$$

Οπότε

$$z_k = (16\sqrt{2})^{1/4} e^{j\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \tag{67}$$

(γʹ) Όμοια, $z^5 + 32j = 0 \iff z^5 = -32j$ με το δεξί μέλος να έχει μέτρο: $r = 32$ και φάση $\phi = -\frac{\pi}{2}$:

$$-32j = 32 e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} \tag{68}$$

Έτσι

$$z_k = 32^{1/5} e^{j\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{69}$$

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre

(αʹ) Είναι

$$(1 + j)^{2026}(1 - j)^{2026} = \big((1 + j)(1 - j)\big)^{2026} = (1 - j^2)^{2026} = 2^{2026} \tag{70}$$

(β΄) Είναι

$$(1+j)^{2026} = (\sqrt{2})^{2026} e^{j\cdot 2026\pi/4} = 2^{1013} e^{j\cdot 1013\pi/2} \tag{71}$$

και

$$(1-j)^{2026} = 2^{1013} e^{-j\cdot 1013\pi/2} \tag{72}$$

Έτσι

$$(1+j)^{2026} + (1-j)^{2026} = 2^{1013}\left(e^{j1013\pi/2} + e^{-j1013\pi/2}\right) \tag{73}$$

$$= 2^{1014}\cos\left(\frac{1013\pi}{2}\right) = 0 \tag{74}$$

επειδή $\cos(1013\pi/2) = \cos((1012\pi+\pi)/2) = \cos(506\pi+\pi/2) = \cos(2\cdot 253\pi+\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0.$

(γ΄) Παρατηρούμε ότι

$$2-2j = 2(1-j) \tag{75}$$

οπότε

$$\frac{(2-2j)^{2026}}{(1-j)^{2026}} = \frac{\big(2(1-j)\big)^{2026}}{(1-j)^{2026}} = 2^{2026} \tag{76}$$