ΗΥ215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 8
Συστήματα στο χώρο του Laplace

14 Μαΐου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace II

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{-s^2 - s - 2}{s^2 + 2s + 2} \tag{3}$$

μέγιστη δύναμη αριθμητή $\geq$ μέγιστη δύναμη παρονομαστή.

ενός ΓΧΑ συστήματος, με $\sigma > -1$. Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$, καθώς και μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\begin{array}{l|l} -\cancel{s^2} - s - \cancel{2} & s^2 + 2s + 2 \\ \hline -(-\cancel{s^2} - 2s - \cancel{2}) & -1 \\ \hline s & \end{array}$$

$$H(s) = \text{πηλίκο} + \frac{\text{υπόλοιπο}}{\text{διαιρέτης}} = -1 + \frac{s}{s^2+2s+2} \quad (1)$$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm j\sqrt{4}}{2}$$

$$s_1 = \frac{-\cancel{2} + \cancel{2}j}{\cancel{2}} = -1 + j$$

$$s_2 = \frac{-\cancel{2} - \cancel{2}j}{\cancel{2}} = -1 - j$$

(1)

$$= -1 + \frac{s}{(s-(-1+j))(s-(-1-j))} = -1 + \frac{A}{s+1-j} + \frac{B}{s+1+j} \quad (2)$$

$$A = \frac{s}{\cancel{(s-(-1+j))}(s-(-1-j))} \cdot \cancel{(s-(-1+j))}\Bigg|_{s=-1+j} = \frac{-1+j}{-\cancel{1}+j\,\cancel{+1}+j} = \frac{-1}{2j} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+j)$$

$$B = \frac{s}{(s-(-1+j))\cancel{(s-(-1-j))}} \cdot \cancel{(s-(-1-j))}\Bigg|_{s=-1-j} = \frac{-1-j}{\cancel{-1}-j\,\cancel{+1}-j} = \frac{1}{2j} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-j)$$

$$\pm\frac{1}{j} = \mp j$$

$$A=\frac{1}{2}(1+j)=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\cdot e^{\tan^{-1}\left(\frac{1/2}{1/2}\right)j}=\sqrt{\frac{1}{2}}\,e^{\tan^{-1}(1)j}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

πολική μορφή: $X=|X|e^{\angle X j}$

$|X|=\sqrt{Re^2+Im^2}$

$\angle X=\tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right)$

$$B=\frac{1}{2}(1-j)=A^*=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}$$

2 $\Rightarrow H(s)=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{s+1-j}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{s+1+j}\quad,\quad \underline{\sigma>-1}$

$$\xleftrightarrow{L^{-1}} h(t)=-\delta(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{(-1+j)t}u(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{(-1-j)t}u(t)=$$

$$=-\delta(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-t}\cdot e^{jt}u(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-t}e^{-jt}u(t)=$$

$$=-\delta(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}e^{-t}u(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}e^{-t}u(t)=$$

$$=-\delta(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}u(t)\left(e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right)=$$

$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

$$=-\delta(t)+\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}e^{-t}u(t)\cancel{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\boxed{-\delta(t)+\sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)u(t)}$$

$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R\supseteq R_x$

$$H(s)=\frac{-s^2-s-2}{s^2+2s+2}=\frac{Y(s)}{X(s)}\Leftrightarrow (s^2+2s+2)Y(s)=(-s^2-s-2)X(s)\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=-\frac{d^2}{dt^2}x(t)-\frac{d}{dt}x(t)-2x(t)}$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace III

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s - 3} \tag{20}$$

h(t)

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, χαρακτηρίστε την με βάση την ευστάθεια και την πλευρικότητα, και γράψτε μια διαφορική εξίσωση που τα περιγράφει.

Διαίρεση Πολυωνύμων :

$$\begin{array}{r|l} \cancel{s^2} - 2s + 2 & s^2 + 2s - 3 \\ \cline{2-2} -(\cancel{s^2} + 2s - 3) & 1 \\ \hline -4s + 5 & \end{array}$$

$$H(s) = 1 + \frac{-4s+5}{s^2+2s-3}$$

$\hookrightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \qquad s_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $\;\to s_1 = 1,\; s_2 = -3$

$$H(s) = 1 + \frac{-4s+5}{(s-1)(s+3)} = 1 + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}$$

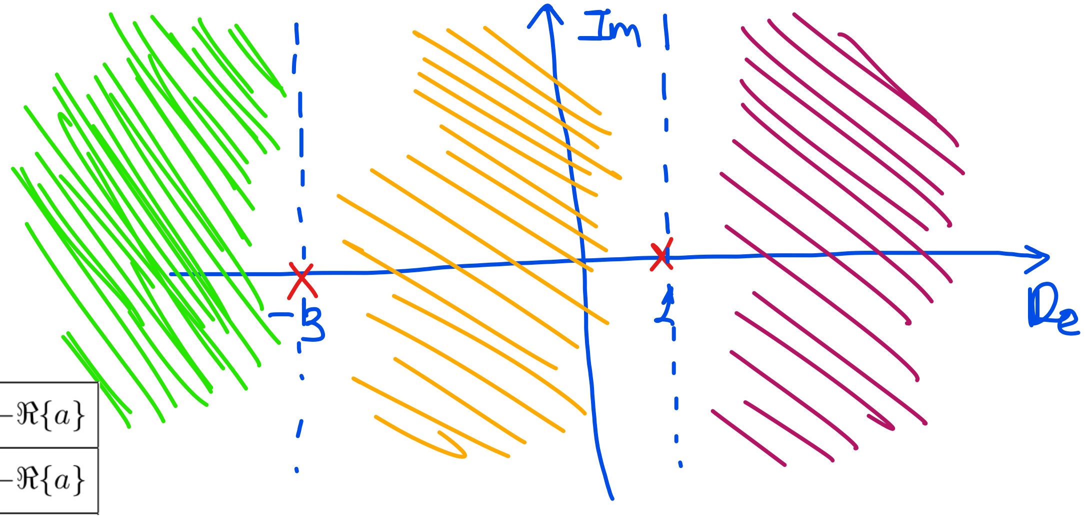
$$A = \frac{-4s+5}{\cancel{(s-1)}(s+3)}\cancel{(s-1)}\Bigg|_{s=1} = \frac{-4+5}{4} = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{-4s+5}{(s-1)\cancel{(s+3)}}\cancel{(s+3)}\Bigg|_{s=-3} = \frac{12+5}{-4} = -\frac{17}{4}$$

$$H(s) = 1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s-1} - \frac{17}{4}\,\frac{1}{s+3}$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης:

- $\sigma < -3$
- $-3 < \sigma < 1$
- $\sigma > 1$



$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$

Για $\sigma < -3$: $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{4}e^{t}u(-t) + \frac{17}{4}e^{-3t}u(-t)$

Είναι ασταθές για το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα και είναι αριστερόπλευρο.

Για $-3 < \sigma < 1$: $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{4}e^{t}u(-t) - \frac{17}{4}e^{-3t}u(t)$

Είναι ευσταθές γιατί το ROC περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα και είναι αμφίπλευρο.

Για $\sigma > 1$: $h(t) = \delta(t) + \frac{1}{4}e^{t}u(t) - \frac{17}{4}e^{-3t}u(t)$

Είναι ασταθές (παρόμοιο με $\sigma < -3$) και είναι δεξιόπλευρο.

Τέλος από συνάρτηση μεταφοράς έχουμε:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2-2s+2}{s^2+2s-3} \Leftrightarrow Y(s)(s^2+2s-3) = X(s)(s^2-2s+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2Y(s) + 2sY(s) - 3Y(s) = s^2X(s) - 2sX(s) + 2X(s).$$

$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$

Από ιδιότητα της παραγώγισης:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) - 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 2\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t)}$$

<u>Σημείωση</u>

Στις <u>ρητές</u> συναρτήσεις μεταφοράς, πλευρικότητα $\leftrightarrow$ αιτιατότητα. Δηλ. αν $H(s)$ με $\sigma > \sigma_0$ τότε αιτιατή κρουστική απόκριση (και όχι απλά δεξιόπλευρη), ενώ με $\sigma < \sigma_0$ αντι-αιτιατή (και όχι απλά αριστερόπλευρη). Τέλος, αμφιπλευρικότητα $\longleftrightarrow$ μη αιτιατότητα.

(Ολοκληρωτικές Εξισώσεις) Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλά πλαίσια. Μια προσέγγιση για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι η χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση ενός φίλτρου του οποίου η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από τις:

(α)

$$y(t) = x(t) - 2\int_{-\infty}^{t} y(\lambda)e^{-(t-\lambda)}u(t-\lambda)d\lambda$$

(β)

$$y(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)e^{-3(t-\lambda)}u(t-\lambda)d\lambda$$

Για ένα αιτιατό σήμα $z(t) = e^{-t}u(t)$ και $k(t) = e^{-3t}u(t)$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{t} y(\lambda)e^{-(t-\lambda)}u(t-\lambda)\,d\lambda = y(t) * z(t) \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{t} y(\lambda)e^{-3(t-\lambda)}u(t-\lambda)\,d\lambda = y(t) * k(t) \quad (2)$$

a) $y(t) \overset{(1)}{=} x(t) - 2\cdot y(t) * z(t) = x(t) - 2y(t) * e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow}$

$$Y(s) = X(s) - 2Y(s)\cdot\frac{1}{s+1} \Leftrightarrow Y(s) + 2Y(s)\cdot\frac{1}{s+1} = X(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)\left(1 + \frac{2}{s+1}\right) = X(s) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+\frac{2}{s+1}} \Leftrightarrow \boxed{H(s) = \frac{s+1}{s+3}}$$

Διαίρεση πολυωνύμων:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{s}+1 & s+3 \\ \hline -\ \cancel{s}+3 & 1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$H(s) = 1 - \dfrac{2}{s+3}$, ξέρουμε ότι μιλάμε για αιτιατά σήματα άρα $\sigma > -3$.

Άρα $\boxed{h(t) = \delta(t) - 2 \cdot e^{-3t} u(t)}$

$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$

β) $y(t) \overset{(2)}{=} x(t) + y(t) * k(t) = x(t) + y(t) * e^{-3t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow}$

$\overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = X(s) + Y(s) \cdot \dfrac{1}{s+3} \Leftrightarrow Y(s) - Y(s) \cdot \dfrac{1}{s+3} = X(s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Y(s)\left(1 - \dfrac{1}{s+3}\right) = X(s) \Leftrightarrow \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{s+3}} \Leftrightarrow \boxed{H(s) = \dfrac{s+3}{s+2}}$

Διαίρεση Πολυωνύμων:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{s}+3 & s+2 \\ \hline -\ \cancel{s}+2 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Άρα $H(s) = 1 + \dfrac{1}{s+2}$, αιτιατά σήματα άρα $\sigma > -2$.

$\boxed{h(t) = \delta(t) + e^{-2t}u(t)}$

$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$