HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 7
Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες

8 Μαΐου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες Ι

Σας δίνεται το ζεύγος μετασχ. Laplace

$$x(t) \longleftrightarrow \frac{2s}{s^2+2}$$

με $x(t) = 0,\ \ t < 0$. Βρείτε τον μετασχ. Laplace των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(3t)$

(β') $x(t-2)$

(γ') $x(t) * \frac{d}{dt}x(t)$

(δ') $e^{-t}x(t)$

(ε') $2tx(t)$

(ϛ') $\int_0^t x(3u)du$

Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό, άρα δεξιόπλευρο. Το πεδίο σύγκλισης του $X(s)$ θα είναι ένα ημιεπίπεδο δεξιότερα από κάποια κατακόρυφη ευθεία που ορίζει ένας πόλος του. Θα έχει δύο πόλους στις θέσεις $\pm j\sqrt{2}$, γιατί $s^2+2=0 \Leftrightarrow s=\pm j\sqrt{2}$, άρα έχει πεδίο σύγκλισης $R_x = \{\mathcal{R}\{s\}>0\}$.

α) Στάθμιση στον χρόνο: $x(at) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$, με σταθμισμένο R_x.

Άρα $x(3t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}s}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2} = \boxed{\frac{2}{9}\frac{s}{\frac{s^2}{9}+2}}$, με $\mathcal{R}\{s\}>0$

β) Χρονική μετατόπιση: $x(t-t_0) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)e^{-st_0}$, με R_x.

Άρα $x(t-2) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)\cdot e^{-2s} = \boxed{\frac{2s}{s^2+2}\cdot e^{-2s}}$, με $\mathcal{R}\{s\}>0$.

γ) Συνέλιξη στον χρόνο: $x(t)*y(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)\cdot Y(s)$, με $R \supseteq R_x \cap R_y$ και

Παραγώγιση στον χρόνο: $\frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{\longleftrightarrow} sX(s)$, με $R \supseteq R_x$

Άρα $x(t) * \frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)\cdot sX(s) = sX^2(s) = s\left(\frac{2s}{s^2+2}\right)^2 = \boxed{\frac{4s^3}{(s^2+2)^2}}$, με $\mathcal{R}\{s\}>0$

δ) Μετατόπιση στον χώρο του s: $e^{s_0 t}x(t) \xleftrightarrow{L} X(s-s_0)$, με μετατόπιση του R_x.

Άρα $e^{-t}x(t) \xleftrightarrow{L} X(s+1) = \boxed{\dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+2}}$, με $\mathcal{R}\{s\} > -1$.

ε) Παραγώγιση στον χώρο του s: $-tx(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{dX(s)}{ds}$, με R_x.

Άρα $2tx(t) \xleftrightarrow{L} -2\dfrac{dX(s)}{ds} = -4\dfrac{d}{ds}\cdot\dfrac{s}{s^2+2} = -4\cdot\dfrac{s^2+2-s\cdot 2s}{(s^2+2)^2} = -4\dfrac{-s^2+2}{(s^2+2)^2} = \boxed{4\dfrac{s^2-2}{(s^2+2)^2}}$

με $\mathcal{R}\{s\} > 0$.

στ) Ολοκλήρωση στον χρόνο: $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \dfrac{X(s)}{s}$, με $R \supseteq (R_x \cap \{\mathcal{R}\{s\} > 0\})$

Άρα $\displaystyle\int_{0}^{t} x(3u)du \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{X(\frac{s}{3})}{s} = \dfrac{1}{3s}\cdot\dfrac{\frac{2}{3}s}{(\frac{s}{3})^2+2} = \dfrac{2}{9\cancel{s}}\dfrac{\cancel{s}}{\frac{s^2}{9}+2} = \boxed{\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{\frac{s^2}{9}+2}}$, με $\mathcal{R}\{s\} > 0$.

όπως και στο α).

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες II

Έστω το σήμα $y(t)$ που σχετίζεται με δυο σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ως

$$y(t) = x_1(t-2) * \frac{d}{dt}x_2(t-1) \tag{10}$$

με

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \tag{11}$$

$$x_2(t) = e^{-3t}u(t) \tag{12}$$

Χρησιμοποιήστε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες του μετασχ. Laplace για να βρείτε το μετασχ. Laplace $Y(s)$ του σήματος $y(t)$. Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!

$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+2}$, $\mathcal{R}\{s\} > -2$

$x_2(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+3}$, $\mathcal{R}\{s\} > -3$

- $x_1(t-2)$, μετατόπιση στον χρόνο : $x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} X(s)e^{-st_0}$. Άρα: $X_1(s)\cdot e^{-2s} = \dfrac{1}{s+2}\cdot e^{-2s}$, $\mathcal{R}\{s\} > -2$
- $\dfrac{d}{dt}x_2(t-1)$, παραγώγιση " " : $\dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$ Άρα: $sX_2(s)\cdot e^{-s} = \dfrac{s}{s+3}e^{-s}$, $\mathcal{R}\{s\} > -3$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}\cdot\frac{s}{s+3}\cdot e^{-2s}\cdot e^{-s} = \frac{s}{(s+2)(s+3)}e^{-3s}$$, με $\{\mathcal{R}\{s\} > -2\} \cap \{\mathcal{R}\{s\} > -3\} = \{\mathcal{R}\{s\} > -2\}$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες - III

Έστω ότι για ένα σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και άρτιο ✓
- ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει τέσσερις πόλους και κανένα μηδενικό στο $s-$επίπεδο. ✓
- ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει έναν εκ των πόλων του στο $s = (1/2)e^{j\pi/4}$. ✓
- ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 4 \checkmark$$

Βρείτε το μετασχηματισμό $X(s)$ και το πεδίο σύγκλισής του.

• Το $x(t) \in \mathbb{R}$ και $x(t) = x(-t)$, άρα $X(s) = \underbrace{X^*(s^*)}_{x(t)\in\mathbb{R}} = \underbrace{X(-s)}_{x(t) \text{ άρτιο}}$. Αν s_p ένας πόλος του $X(s)$, τότε και ο s_p^* να είναι πόλος του $X(s)$, όπως επίσης και ο $-s_p$ και $-s_p^*$.

Άρα επειδή $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ τότε και $-s_1 = -\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ και $s_1^* = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$ και $-s_1^* = -\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$

Άρα $$X(s) = \frac{A}{\left(s-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(s-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)} \quad (1)$$

$$\left\{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = \boxed{X(0) = 4} \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{A}{\left(-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{A}{\left(-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot e^{j(\cancelto{0}{\pi/4-\pi/4})}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{j(\cancelto{0}{\pi/4-\pi/4})}\right)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{\frac{1}{4}\cdot\cancelto{1}{e^{0}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cancelto{1}{e^{0}}}=4 \Leftrightarrow \frac{A}{\frac{1}{16}}=4 \Leftrightarrow 16A=4 \Leftrightarrow \boxed{A=\frac{1}{4}}$$

Άρα
$$X(s)=\frac{A}{\left(s^2-\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)^2\right)\cdot\left(s^2-\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)^2\right)}=\frac{A}{\left(s^2-\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\right)\left(s^2-\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\right)}=$$

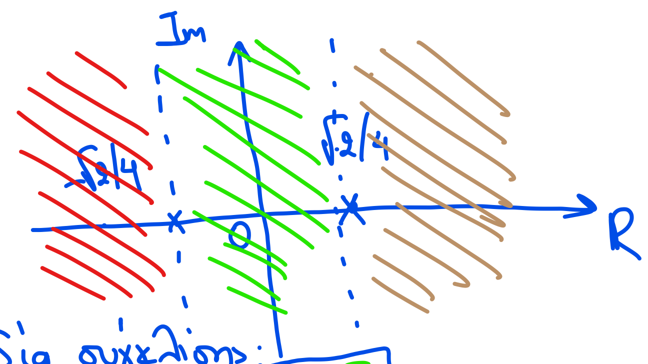
$$=\frac{A}{s^4-\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\cdot s^2-\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\cdot s^2+\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\cdot\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}}=$$

$$=\frac{A}{s^4-\frac{1}{4}(-j)\cdot s^2-\frac{1}{4}j\cdot s^2+\frac{1}{16}e^{j(\pi/2-\pi/2)}}=\frac{A}{s^4+\cancel{\frac{1}{4}js^2}-\cancel{\frac{1}{4}js^2}+\frac{1}{16}}=$$

$$=\frac{A}{s^4+\frac{1}{16}}=\frac{16A}{16s^4+1}=\boxed{\frac{4}{16s^4+1}}$$

$$\sigma_1=\Re\left\{\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/4}\right\}=\frac{1}{2}\cos(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sigma_2=\Re\left\{-\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/4}\right\}=-\frac{1}{2}\cos(\pi/4)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$



Πιθανά πεδία σύγκλισης: $\sigma<-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}<\sigma<\frac{\sqrt{2}}{4}}$, $\sigma>\frac{\sqrt{2}}{4}$

Το $X(s)|_{s=0}$ υπάρχει άρα θα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στο R_X και επειδή το σήμα στο χρόνο είναι άρτιο, θα είναι και αμφίπλευρο. Άρα το R_X είναι μία "λωρίδα".

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες - IV

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)$ (το γνωστό τριγωνικό παλμό) που φαίνεται στο Σχήμα 1, με δυο τρόπους:

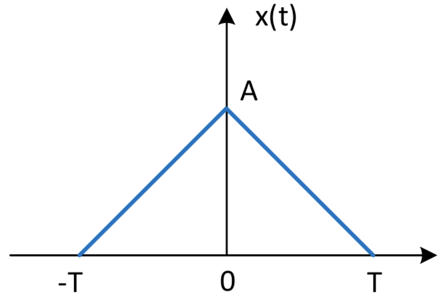
(α΄) με τον ορισμό. Δίνεται ότι $\int te^{st}dt = \frac{e^{st}}{s}\left(t - \frac{1}{s}\right)$

(β΄) με χρήση ιδιοτήτων (όποιες νομίζετε εσείς κατάλληλες).

Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού;

$T<t<T$

αλλού



Σχήμα 1: *Σήμα $x(t)$ Άσκησης 4.*

α) $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-T}^{0} A(1-(-t)/T)e^{-st}dt + \int_{0}^{T} A(1-t/T)e^{-st}dt$

$$= \int_{-T}^{0} Ae^{-st}dt + \frac{A}{T}\int_{-T}^{0} t\, e^{-st}dt + \int_{0}^{T} Ae^{-st}dt - \frac{A}{T}\int_{0}^{T} t\, e^{-st}dt =$$

$$= A\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{-T}^{0} + \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\left(t+\frac{1}{s}\right)\right]_{-T}^{0} + A\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{0}^{T} - \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\left(t+\frac{1}{s}\right)\right]_{0}^{T} =$$

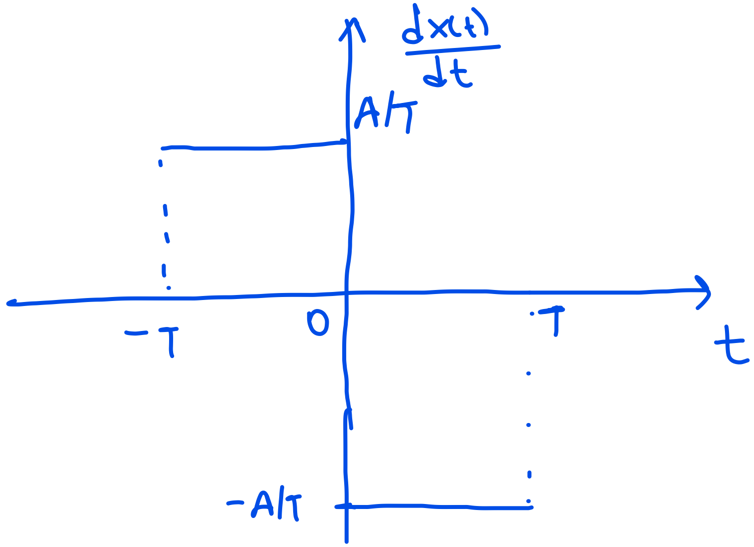
$$= A\left(\frac{1}{-s} - \frac{e^{sT}}{-s}\right) + \frac{A}{T}\left(\frac{1}{-s}\cdot\frac{1}{s} - \frac{e^{sT}}{-s}\left(-T+\frac{1}{s}\right)\right) + A\left(\frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{1}{-s}\right) - \frac{A}{T}\left(\frac{e^{-sT}}{-s}\left(T+\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{-s}\cdot\frac{1}{s}\right) =$$

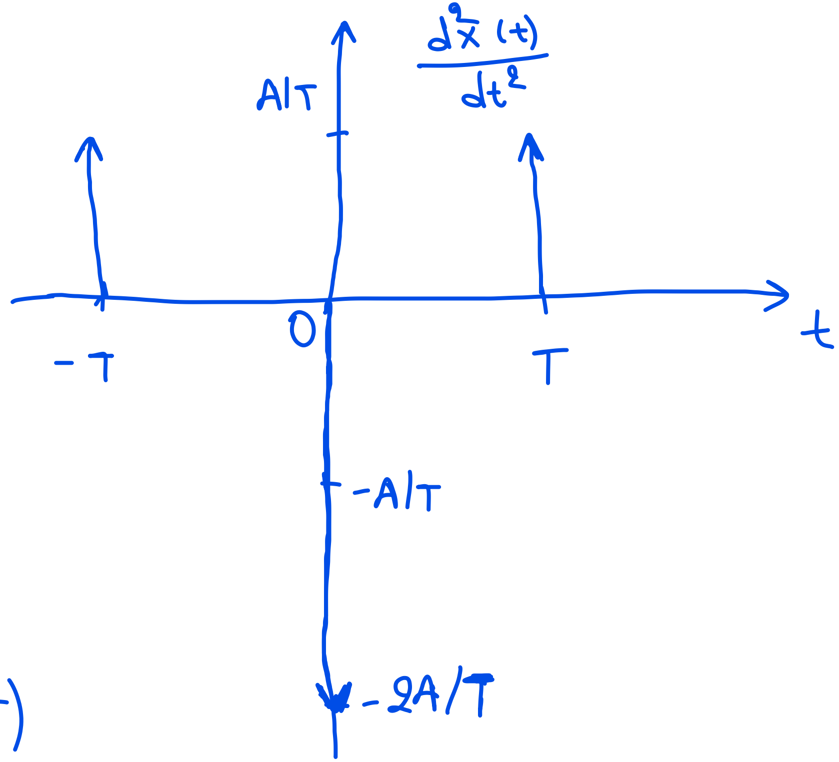
$$= -\cancel{\frac{A}{s}} + \frac{Ae^{sT}}{s} - \frac{A}{T}\frac{1}{s^2} - \frac{A}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}e^{sT}}{s} + \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{sT}}{s^2} - \frac{Ae^{-sT}}{s} + \cancel{\frac{A}{s}} + \frac{A}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}e^{-sT}}{s} + \frac{A}{T}\frac{e^{-sT}}{s^2} - \frac{A}{T}\frac{1}{s^2} =$$

$$= \cancel{\frac{Ae^{sT}}{s}} - \cancel{\frac{Ae^{sT}}{s}} + \frac{A}{T}\frac{e^{sT}}{s^2} - \cancel{\frac{Ae^{-sT}}{s}} + \cancel{\frac{Ae^{-sT}}{s}} + \frac{A}{T}\frac{e^{-sT}}{s^2} - \frac{2A}{T}\frac{1}{s^2} =$$

$$= \frac{A}{Ts^2}\left(e^{sT} + e^{-sT}\right) - \frac{2A}{T}\frac{1}{s^2} = \boxed{\frac{A}{T}\left(\frac{e^{sT}+e^{-sT}-2}{s^2}\right)}$$

β)





$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{A}{T}\delta(t+T) - \frac{2A}{T}\delta(t) + \frac{A}{T}\delta(t-T)$$

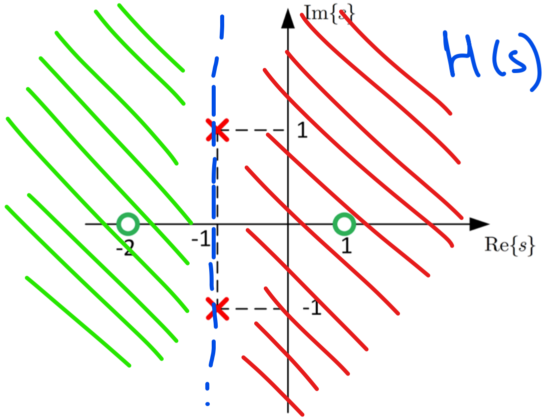
$$L\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = \frac{A}{T}\cdot 1\cdot e^{sT} - \frac{2A}{T}\cdot 1 + \frac{A}{T}\cdot 1\cdot e^{-sT} = \frac{A}{T}\left(e^{sT}+e^{-sT}-2\right) = X''(s)$$

Ιδιότητα παραγώγισης στον χρόνο: $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s^n}$

Άρα $X(s) = \frac{X''(s)}{s^2} = \boxed{\frac{A}{T}\,\frac{\left(e^{sT}+e^{-sT}-2\right)}{s^2}}$

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace

(α΄) Έστω το διάγραμμα πόλων-μηδενικών μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$. Πόσα πιθανά πεδία σύγκλισης υπάρχουν;



α) Υπάρχουν δύο πιθανά πεδία σύγκλισης:

- $\sigma < -1$
- $\sigma > -1$

αφού οι πόλοι είναι συζυγείς και έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος.

(β΄) Ποιά από αυτά αντιστοιχούν σε

i. αιτιατό $\longrightarrow$ δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης. Άρα $\sigma > -1$.

ii. ευσταθές $\longrightarrow$ το πεδίο σύγκλισης να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα. Άρα $\sigma > -1$.

iii. μη αιτιατό (ή αμφίπλευρης κρουστικής απόκρισης) $\longrightarrow$ "λωριδοειδές" πεδίο σύγκλισης. Άρα δεν υπάρχει

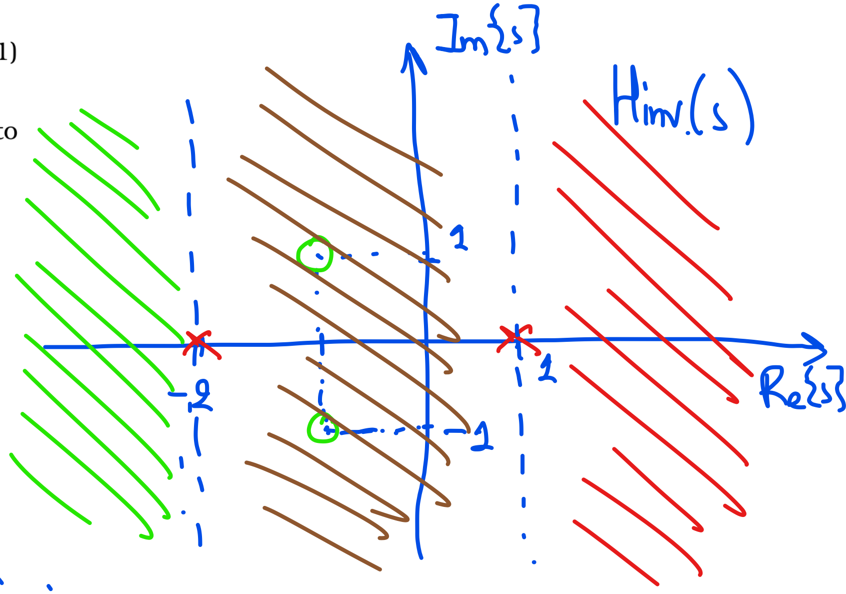
iv. αντι-αιτιατό $\longrightarrow$ αριστερόπλευρο πεδίο σύγκλισης. Άρα $\sigma < -1$.

σύστημα;

(γ΄) Αν ορίσουμε το **αντίστροφο σύστημα** ως το σύστημα

$$H_{inv} = \frac{1}{H(s)}, \quad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset \tag{1}$$

δηλ. το σύστημα που έχει πόλους τα μηδενικά του $H(s)$ και μηδενικά τους πόλους του $H(s)$, τότε είναι το αντίστροφο σύστημα $H_{inv}(s)$ μοναδικό, όταν το $H(s)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές και αιτιατό σύστημα;



Για ευσταθές και αιτιατό $H(s)$ πρέπει $\sigma > -1$. Το $H_{inv}(s)$ θα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1$ και $s = -2$. Χρειάζεται να επιλέξουμε πεδίο σύγκλισης τέτοιο ώστε $R_H \cap R_{H_{inv}} \neq 0$.

Έχουμε τρεις επιλογές για το $H_{inv}(s)$:

1) $\sigma < -2$
2) $-2 < \sigma < 1$
3) $\sigma > 1$

Για τα 2) και 3) ισχύει $R_H \cap R_{H_{inv}} \neq 0$.

Άρα το αντίστροφο σύστημα δεν είναι μοναδικό.