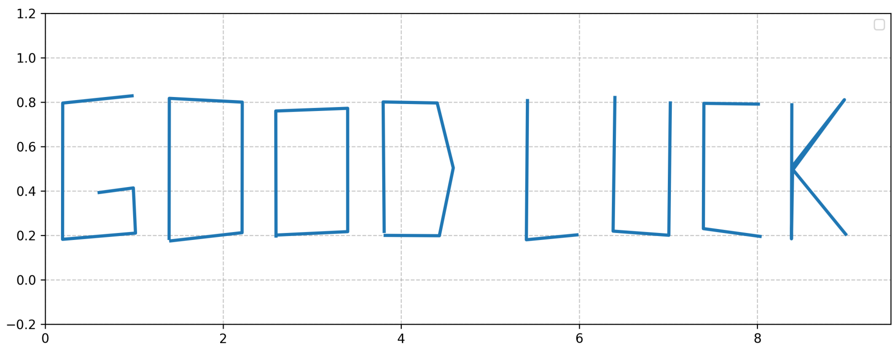
ΗΥ215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 6

Προετοιμασία για την Πρόοδο

27 Μαρτίου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης



Θέμα 1 - Βαθμός: 10

Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε επαρκώς. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.

i. **(2 μ.)** Η πολική μορφή του αριθμού -3 είναι η $-3e^{j\pi}$.

ii. **(2 μ.)** Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier X_k περιλαμβάνει τους συντελεστές

$$X_1 = \frac{-1}{j2\pi}, \quad X_{-1} = \frac{1}{j2\pi}$$

iii. **(2 μ.)** Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = (2e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t)$$

η οποία χαρακτηρίζει το σύστημα ως ασταθές.

iv. **(2 μ.)** Το πολυώνυμο $z^2 + 3z + 2$ έχει δυο μιγαδικές ρίζες.

v. **(2 μ.)** Ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$\frac{1}{a + j2\pi t}$$

είναι

$$e^{af}u(f)$$

i) Λάθος, η πολική μορφή του αριθμού -3 είναι $3e^{j\pi}$ $\{e^{\pm j\pi} = -1\}$

ii) Πρέπει $X_k = X^*_{-k}$ επειδή το σήμα είναι πραγματικό

$X_1 = -\frac{1}{j2\pi} \rightarrow X^*_{-1} = \frac{1}{j2\pi} = X_{-1}$ άρα είναι σωστό.

iii) Λάθος, γιατί οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος ($\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -3$) είναι αρνητικές.

iv) $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$, Λάθος θα έχει δύο πραγματικές ρίζες τις

$z_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$ → $z_1 = -1 \rightarrow 1e^{j\pi}$, $z_2 = -2 \rightarrow 2e^{j\pi}$ και Σωστό

v) $\underline{e^{-at}u(t)} \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{a+j2\pi f} = X(f)$

Ιδιότητα δυικότητας: $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$

$\dfrac{1}{a+j2\pi t} \xleftrightarrow{F} e^{af}u(-f)$, άρα είναι <u>Λάθος</u>

Θέμα 2 - Βαθμός: 20

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \frac{t}{4 - \sin(x(t))}$$

είναι

(α') **(5 μ.)** γραμμικό,

(β') **(5 μ.)** χρονικά αμετάβλητο,

(γ') **(5 μ.)** ευσταθές,

(δ') **(2.5 μ.)** αιτιατό, και

(ε') **(2.5 μ.)** δυναμικό

α) Γραμμικότητα

Πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό.

Ομογενές: $y(t) = \frac{t}{4 - \sin(ax(t))} \neq ay(t)$. Άρα δεν είναι ομογενές άρα δεν είναι γραμμικό

$x(t) := ax(t)$

β) $y(t) = y(t - t_0) \Leftrightarrow$

$x(t) := x(t - t_0)$

$\Leftrightarrow \frac{t}{4 - \sin(x(t-t_0))} \neq \frac{t - t_0}{4 - \sin(x(t-t_0))}$ Άρα δεν είναι ΧΑ.

γ) $|x(t)| < B_x$ πρέπει $|y(t)| < B_y$

$$|y(t)| = \frac{|t|}{|4-\sin(x(t))|} \geq \frac{|t|}{|4-1|} = \frac{|t|}{3} \longrightarrow +\infty, \text{ όταν } t \to \infty$$

γιατί $|\sin(x(t))| \leq 1$

Άρα <u>δεν είναι ευσταθές</u>

δ) <u>Είναι αιτιατό</u>, γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της <u>εισόδου</u> και όχι από μελλοντικές.

ε) <u>Δεν είναι δυναμικό</u>, γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση άλλων τιμών της εισόδου ή της εξόδου.

Θέμα 3 - Βαθμός: 25

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\underline{\frac{d^2}{dt^2}}y(t) + \underline{\frac{3}{4}\frac{d}{dt}}y(t) + \underline{\frac{1}{8}}y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $\underline{y(0^-) = 1}$, $\underline{\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0}$.

(α΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β΄) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$.

α) Βρίσκουμε το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο: $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = 0$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$

$y_{zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{4}t}$, $\underline{t>0}$

$y_{zi}(0^-) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$

$y'_{zi}(0^-) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2 = 0 \Leftrightarrow 2C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -2C_1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = -2C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - 2C_1 = 1 \\ C_2 = -2C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Άρα $\boxed{y_{zi}(t) = \left[-e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-\frac{1}{4}t}\right]u(t)}$

β) Θεωρούμε το σύστημα $\underset{a_N=1}{\frac{d^2}{dt^2}}y(t) + \frac{3}{4}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{8}y(t) = x(t)$ με κρουστική απόκριση $h_0(t)$. Το Χ.Π. είναι $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = 0$ με $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

Άρα $h_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{4}t}$, $t>0$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι:

$h_0(0^+) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0$

$h_0'(0^+) = \frac{1}{a_N} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2 = 1 \Leftrightarrow 2C_1 + C_2 = -4$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -2C_2 + C_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

Άρα $h_0(t) = \left[-4e^{-\frac{1}{2}t} + 4e^{-\frac{1}{4}t}\right]u(t)$

$h(t) = h_0(t) + h_0'(t) = \left(-4e^{-\frac{1}{2}t} + 4e^{-\frac{1}{4}t}\right)u(t) + \left(2e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{4}t}\right)u(t) =$

$$= \left(-4e^{-\frac{1}{2}t} + 4e^{-\frac{1}{4}t} + 2e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{4}t}\right)u(t) =$$

$$= \left[3e^{-\frac{1}{4}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right]u(t).$$

γ) $y_{zs}(t) = ?$ για $x(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)\,dt = x(\mp t_0)$$

$$\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$$

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t)$$

<u>1ος τρόπος</u> : $\left(3e^{-\frac{1}{4}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t) * \left(\delta(t) - \delta(t-2)\right) =$

$$= \left(3e^{-\frac{1}{4}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t) * \delta(t) - \left(3e^{-\frac{1}{4}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t) * \delta(t-2) =$$

$$= \left(3e^{-\frac{1}{4}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t) - \left(3e^{-\frac{1}{4}(t-2)} - 2e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)u(t-2)$$

<u>2ος τρόπος</u> : $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(3e^{-\frac{1}{4}\tau} - 2e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)u(\tau)\cdot\left(\delta(t-\tau) - \delta(t-\tau-2)\right)d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(3e^{-\frac{1}{4}\tau} - 2e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)u(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(3e^{-\frac{1}{4}\tau} - 2e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)u(\tau)\cdot\delta(t-\tau-2)\,d\tau =$$

$$= \left(3e^{-\frac{1}{4}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t) - \left(3e^{-\frac{1}{4}(t-2)} - 2e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)u(t-2).$$

Θέμα 4 - Βαθμός: 25

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 2$ δίνεται ως

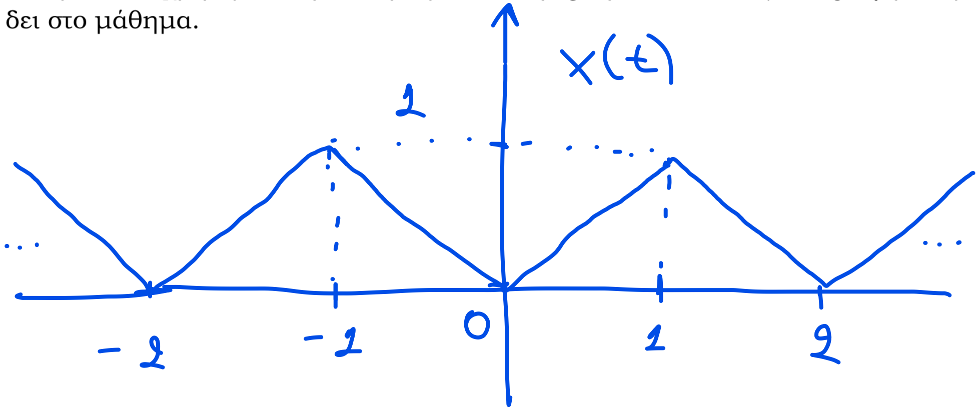
$$x_{T_0}(t) = |t|, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \tag{38}$$

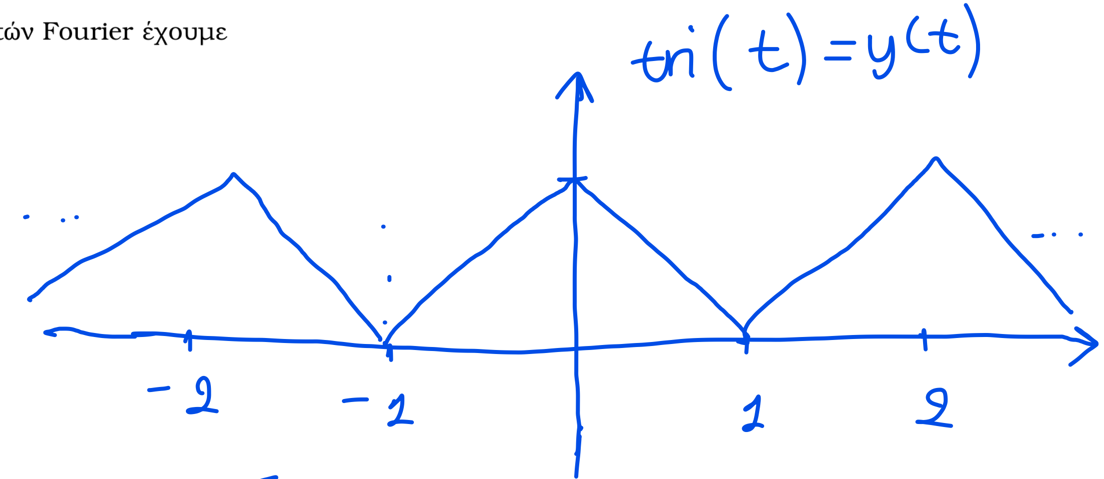
οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_0 = \frac{1}{2}, \quad X_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά} \tag{39}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ορισμό, ιδιότητες, ή/και *οποιαδήποτε* ζεύγη έτοιμων συντελεστών Fourier έχουμε δει στο μάθημα.

$T_0 = 2 \rightsquigarrow f_0 = \frac{1}{2}$





Οι συντελεστές Fourier Y_k από γνωστά ζεύγη :

$$\underline{Y_k = \frac{2}{\pi^2 k^2}}, \quad \underline{k \text{ περιττά}}$$

από ιδιότητα χρονικής μετατόπισης: $x(t-t_0) \longleftrightarrow X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

$$x(t) = y(t-\underline{1}) \longleftrightarrow X_k = Y_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 \cdot \underline{1}} = \frac{2}{\pi^2 k^2} \cdot e^{-j2\pi k \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2} \cdot \underline{e^{-j\pi k}} = \frac{2}{\pi^2 k^2} (-1)^k$$

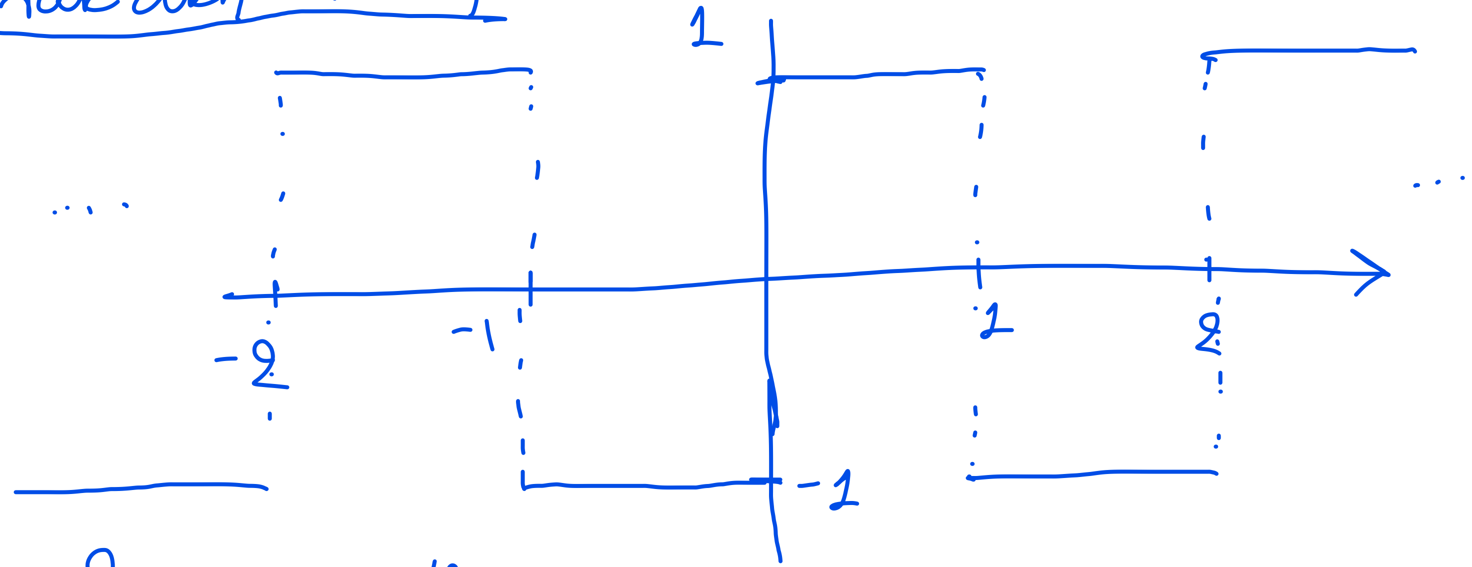
και επειδή $\underline{k \text{ περιττά}}$: $\boxed{X_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2}}$.

$e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |t|\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -t\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

Εναλλακτική λύση



$x'(t)$

γνωστό σήμα

$$z(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

$$X'_k = \frac{2}{\pi k} e^{-j\pi/2}$$ από ιδιότητα παραγώγισης / ολοκλήρωσης :

$$X_k = \frac{X'_k}{j2\pi k f_0} = \frac{2}{\pi k \cdot j\cancel{2}\pi k \frac{1}{\cancel{2}}} \cdot e^{-j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2 j} e^{-j\pi/2} = -\frac{2j}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi/2} \cdot e^{-j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi} = \boxed{-\frac{2}{\pi^2 k^2}}$$

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j = \mp \frac{1}{j}$$

Εναλλακτική λύση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |t| e^{-j2\pi k \cancel{\frac{1}{2}} t} dt =$$

$$\int_a^b t e^{-ct} dt = \left[e^{-ct}\left(\frac{-ct-1}{c^2}\right)\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -t \cdot e^{-j\pi k t} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t e^{-j\pi k t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[e^{-j\pi k t}\left(\frac{-j\pi k t - 1}{(j\pi k)^2}\right)\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[e^{-j\pi k t}\left(\frac{-j\pi k t - 1}{(j\pi k)^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$j^2 = -1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2 k^2} - e^{j\pi k}\left(\frac{j\pi k - 1}{(j\pi k)^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-j\pi k}\left(\frac{-j\pi k - 1}{(j\pi k)^2}\right) - \frac{1}{\pi^2 k^2}\right) =$$

$$e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2 k^2} + (-1)^k\left(\frac{j\pi k - 1}{\pi^2 k^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left((-1)^k\left(\frac{j\pi k + 1}{\pi^2 k^2}\right) - \frac{1}{\pi^2 k^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 k^2} \cancel{- \frac{1}{2}(-1)^k \frac{j\pi k}{\pi^2 k^2}} + \frac{1}{2}(-1)^k \frac{1}{\pi^2 k^2} \cancel{+ \frac{1}{2}(-1)^k \frac{j\pi k}{\pi^2 k^2}} + \frac{1}{2}(-1)^k \frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} =$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi^2 k^2} + (-1)^k \frac{1}{\pi^2 k^2} = -\frac{1}{\pi^2 k^2}\left(1 - (-1)^k\right),$$ για k περιττά έχουμε: $\boxed{X_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2}}$

Θέμα 5 - Βαθμός: 30

Θεωρήστε μια μόνο περίοδο από το περιοδικό σήμα του προηγούμενου Θέματος, δηλ. θεωρήστε το σήμα

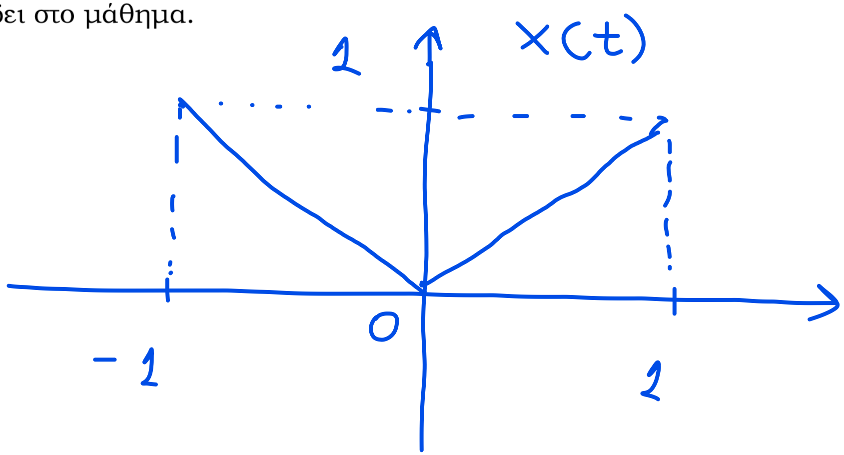
$$x(t) = |t|, \quad -1 < t < 1 \tag{58}$$

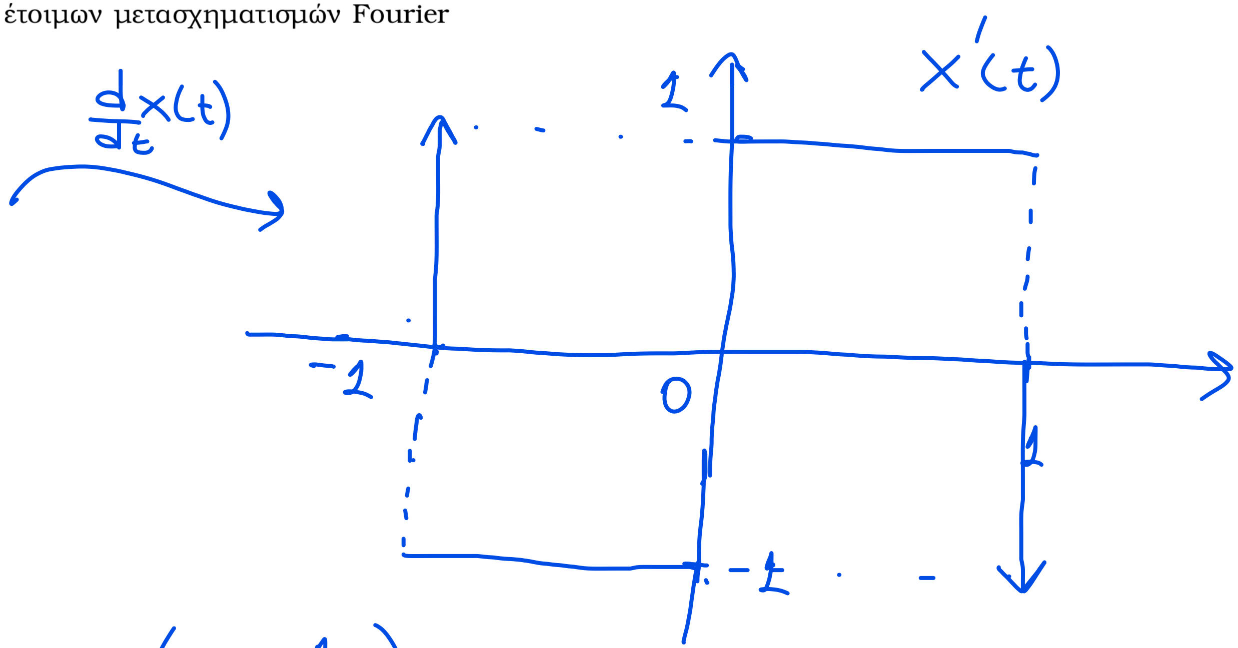
$$= |t|\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{59}$$

Δείξτε ότι ο Μετασχ. Fourier του είναι

$$X(f) = 2\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) \tag{60}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ορισμό, ιδιότητες, ή/και *οποιαδήποτε* ζεύγη έτοιμων μετασχηματισμών Fourier έχουμε δει στο μάθημα.





$$x'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right)$$

$$X'(f) = 1\cdot e^{j2\pi f\cdot 1} - 1\cdot e^{-j2\pi f\cdot 1} + \mathrm{sinc}(f)\cdot e^{-j2\pi f\frac{1}{2}} - \mathrm{sinc}(f)\cdot e^{j2\pi f\frac{1}{2}} =$$

ιδιότητα χρονικής μετατόπισης: $x(t-t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

$$= \underbrace{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}} + \mathrm{sinc}(f)\, e^{-j\pi f} - \mathrm{sinc}(f)\, e^{j\pi f} =$$

$$= 2j\sin(2\pi f) + \mathrm{sinc}(f)\underbrace{\left(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}\right)} =$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$= 2j\sin(2\pi f) + \mathrm{sinc}(f)\cdot\left(-2j\sin(\pi f)\right) =$$

$$= \boxed{2j\left(\sin(2\pi f) - \mathrm{sinc}(f)\cdot\sin(\pi f)\right)}$$

Από την ιδιότητα παραγώγισης:

$$\cancel{j}2\pi f X(f) = 2\cancel{j}\left(\sin(2\pi f) - \mathrm{sinc}(f)\cdot\sin(\pi f)\right) \Leftrightarrow$$

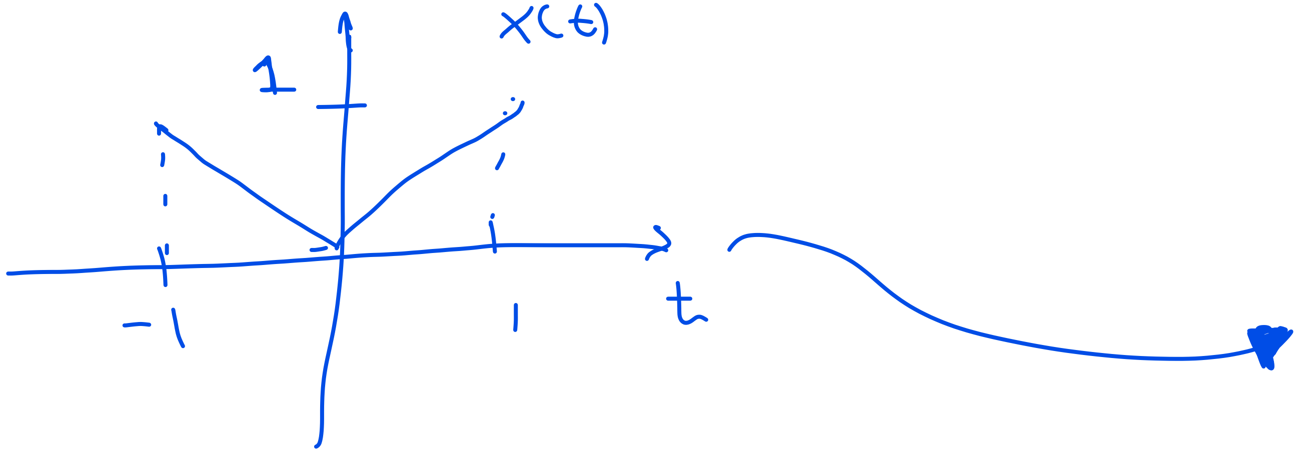
$$\Leftrightarrow X(f) = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} - \frac{\mathrm{sinc}(f)\sin(\pi f)}{\pi f} \Leftrightarrow$$

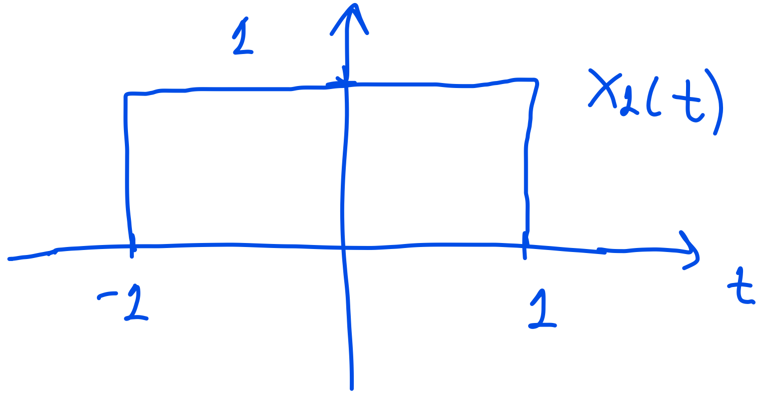
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

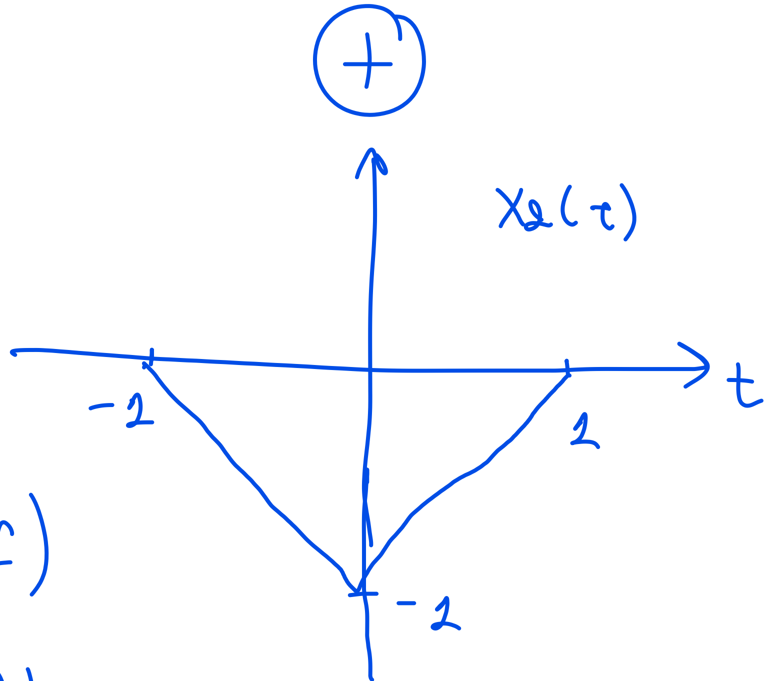
$$\Leftrightarrow X(f) = \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} - \mathrm{sinc}(f)\cdot\mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f)}$$

Εναλλακτική λύση







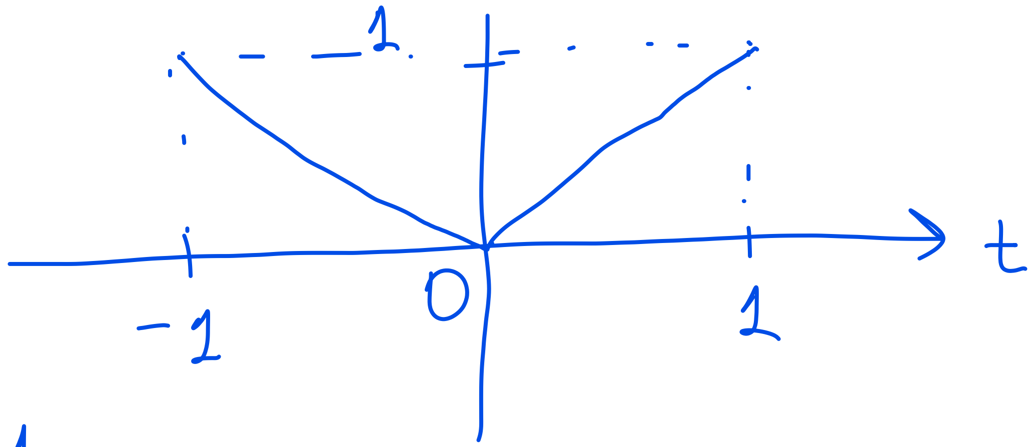
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$\Big\updownarrow F$$
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$x_1(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} X_1(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f)$$

$$x_2(t) = -\mathrm{tri}(t) \xleftrightarrow{F} X_2(f) = -\mathrm{sinc}^2(f)$$

Άρα $\boxed{X(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f)}$

Εναλλακτική Λύση



$x(t) = |t| \;, \; -1 < t < 1$

$= \underbrace{-t\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right)}_{x_1(t)} + \underbrace{t\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right)}_{x_2(t)}$

Από ιδιότητα της παραγώγισης: $t\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} X(f)$

Άρα $X(f) = -\frac{j}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} F\left\{\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} F\left\{\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\} =$

$= -\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df}\left(\mathrm{sinc}(f) \cdot e^{j\cancel{2}\pi f \frac{1}{\cancel{2}}}\right) + \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \cdot \left(\mathrm{sinc}(f) e^{-j\cancel{2}\pi f \frac{1}{\cancel{2}}}\right) =$

$$= -\frac{j}{2\pi}\left(\frac{d}{df}\left(\mathrm{sinc}(f)e^{j\pi f} - \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f}\right)\right) =$$

$$= -\frac{j}{\cancel{2}\pi}\left(\frac{d}{df}\cdot \mathrm{sinc}(f)\cdot \cancel{2}j\sin(\pi f)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{df}\,\mathrm{sinc}(f)\cdot\sin(\pi f)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{df}\,\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\cdot\sin(\pi f)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{df}\cdot\frac{\sin^2(\pi f)}{\pi f}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(\sin^2(\pi f))'\cdot\pi f - \sin^2(\pi f)\cdot(\pi f)'}{\pi^2 f^2} =$$

$$\{\, 2\sin(\pi f)\cos(\pi f) = \sin(2\pi f)\,\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{2\cdot\sin(\pi f)\cdot\cancel{\pi}\cdot\cos(\pi f)\cdot\pi f - \sin^2(\pi f)\cdot\cancel{\pi}}{\pi^2 f^2} =$$

$$= \frac{2\pi f\sin(\pi f)\cdot\cos(\pi f) - \sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} = \frac{\cancel{\pi f}\cdot\sin(2\pi f)}{\pi^{\cancel{2}} f^{\cancel{2}}} - \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} =$$

$$= \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} - \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 = \boxed{2\,\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f)}$$

Εναλλακτική λύση

Από ορισμό του Μετασχηματισμού Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1}^{1} |t| e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1}^{0} -t \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{1} t e^{-j2\pi ft} dt$$

Από υπολογισμό γνωρίζουμε ότι: $\displaystyle\int_a^b t e^{-ct} dt = \left[e^{-ct} \left(\frac{-ct-1}{c^2} \right) \right]_a^b$

Άρα $$X(f) = \left[-e^{-j2\pi ft} \left(\frac{-j2\pi ft - 1}{(j2\pi f)^2} \right) \right]_{-1}^{0} + \left[e^{-j2\pi ft} \left(\frac{-j2\pi ft - 1}{(j2\pi f)^2} \right) \right]_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{-1}{-4\pi^2 f^2} + e^{j2\pi f} \left(\frac{j2\pi f - 1}{-4\pi^2 f^2} \right) + e^{-j2\pi f} \left(\frac{-j2\pi f - 1}{-4\pi^2 f^2} \right) - \frac{-1}{-4\pi^2 f^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 f^2} - j2\pi f e^{j2\pi f} \cdot \frac{1}{4\pi^2 f^2} + e^{j2\pi f} \cdot \frac{1}{4\pi^2 f^2} + j2\pi f e^{-j2\pi f} \cdot \frac{1}{4\pi^2 f^2} + e^{-j2\pi f} \cdot \frac{1}{4\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 f^2} \left(-1 - j2\pi f e^{j2\pi f} + e^{j2\pi f} + j2\pi f \cdot e^{-j2\pi f} + e^{-j2\pi f} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 f^2} \left(-2 + j2\pi f \underbrace{\left(e^{-j2\pi f} - e^{j2\pi f} \right)}_{} + \underbrace{\left(e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f} \right)}_{} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 f^2} \left(-2 + j2\pi f \cdot \left(-2j \sin(2\pi f) \right) + 2\cos(2\pi f) \right) = \frac{1}{4\pi^2 f^2} \left(4\pi f \sin(2\pi f) + 2\left(\cos(2\pi f) - 1 \right) \right) =$$

$$\{ \cos(2x) - 1 = -2\sin^2(x) \}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}\pi^2 f^2}\left(\cancel{4}\pi f \sin(2\pi f) - \cancel{4}\sin^2(\pi f)\right) = \frac{\cancel{\pi f}\sin(2\pi f)}{\pi^{\cancel{2}} f^{\cancel{2}}} - \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} - \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$$

$$= \boxed{2\,\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f)}$$