HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 5

Προετοιμασία για την Πρόοδο

26 Μαρτίου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Θέμα 1 - Βαθμός: 20

Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε επαρκώς. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

(α') **(2 μ.)** Ισχύει

$$\mathrm{Im}\{(1+j)(\cos(t)+j\sin(t))\} = \sin(t)+\cos(t)$$

(β') **(2 μ.)** Ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{1}{1+|k|}e^{j\pi/4}$$

είναι πραγματικό.

(γ') **(2 μ.)** Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση έχει χαρακτηριστικές ρίζες

$$-3, -2, -1, 1$$

και έτσι το σύστημα είναι ασταθές.

(δ') **(2 μ.)** Αν $z_1 = j$ μια ρίζα ενός *οποιουδήποτε* πολυωνύμου τότε υποχρεωτικά ρίζα είναι και ο $z_2 = -j$.

(ε') **(2 μ.)** Για $\epsilon > 0$,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t-2\epsilon)dt = 1$$

α) $\mathrm{Im}\{\cos(t) + j\sin(t) + j\cos(t) + \overset{-1}{\cancel{j^2}}\sin(t)\} = \mathrm{Im}\{\cos(t) - \sin(t) + j\underbrace{(\sin(t)+\cos(t))}\} =$

$= \sin(t)+\cos(t)$. Άρα <u>Σωστό</u>

β) Πρέπει να ισχύει $X_k = X_{-k}^*$ για να είναι πραγματικό.

$X_{-k}^* = \dfrac{1}{1+|-k|}e^{-j\pi/4} = \dfrac{1}{1+|k|}e^{-j\pi/4} \neq X_k$. Άρα <u>Λάθος</u>

γ) Το σύστημα είναι ασταθές γιατί έχουμε μία θετική ρίζα, το 1.
(Θα ήταν ευσταθές αν $\lambda_i < 0 \ \forall i$). Άρα <u>Σωστό</u>

δ) Αυτό θα ίσχυε αν το πολυώνυμο είχε πραγματικούς συντελεστές. Άρα <u>Λάθος</u>

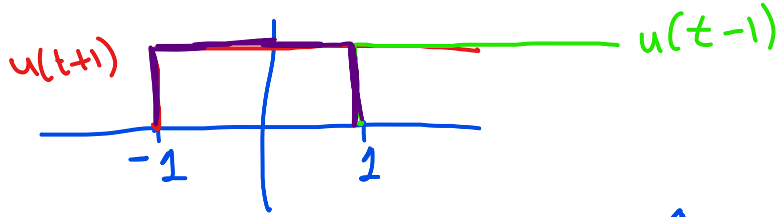
ε) Λάθος, τα άκρα του ολοκληρώματος ορίζουν ένα διάστημα στο οποίο δεν περιλαμβάνεται η συνάρτηση Δέλτα. Ζει στο $\mathbb{R}$, εκτός $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

(ϛ') **(2 μ.)** Ο τετραγωνικός παλμός

$$x(t) = \mathrm{rect}(t)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = u(t+1) - u(t-1)$$



(ζ') **(2 μ.)** Η περίοδος του σήματος

$$x(t) = -2\cos(2\pi 100 t) + 4\sin(2\pi 60 t)$$

ισούται με $T_0 = 20$ s.

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(η') **(2 μ.)** Το σήμα

$$x(t) = |t|$$

είναι σήμα ενέργειας.

(θ') **(2 μ.)** Ισχύει

$$u(at) = u(t)$$

για κάθε $a > 0$.

(ι') **(2 μ.)** Ισχύει

$$\sin(2\pi t)\delta(t+1) = 0$$

σϛ) Λάθος, ο παλμός είναι ο $x(t) = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$

ζ) Η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{100, 60\} = 20\ \text{Hz}$, $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{20} = 0.005\ \text{s}$

Λάθος

η) Λάθος, γιατί οι τιμές του απειρίζονται όταν $t \to \pm\infty$.

θ) $u(at) = \begin{cases} 1, & at > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = u(t)$, Σωστό

ι) $\sin(2\pi t)\delta(t+1) = \sin(2\pi t)\Big|_{t=-1} \delta(t+1) = \sin(-2\pi)\cdot\delta(t+1) = 0\cdot\delta(t+1) = 0$

Σωστό

Θέμα 2 - Βαθμός: 25
Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = x(t)u(t-2) \tag{11}$$

είναι (**7.5 μ.**) γραμμικό, (**7.5 μ.**) χρονικά αμετάβλητο, (**5 μ.**) ευσταθές, (**2.5 μ.**) αιτιατό, και (**2.5 μ.**) δυναμικό.

<u>Γραμμικότητα</u>

Το σύστημα πρέπει να είναι αθροιστικό και ομογενές.

<u>Ομογενές</u>: Για να είναι ομογενές πρέπει: για είσοδο $ax(t) \longrightarrow ay(t)$

$$\underset{x:\,ax(t)}{y(t)} = ax(t)u(t-2) = ay(t) \checkmark$$

<u>Αθροιστικό</u>: Για να είναι αθροιστικό πρέπει για είσοδο $x_1(t)+x_2(t) \rightsquigarrow y_1(t)+y_2(t)$

$x_1(t) \rightsquigarrow y_1(t) = x_1(t)u(t-2)$, $x_2(t) \rightsquigarrow y_2(t) = x_2(t)u(t-2)$

$$\underset{x:\,x_1(t)+x_2(t)}{y(t)} = \big(x_1(t)+x_2(t)\big)u(t-2) = x_1(t)u(t-2) + x_2(t)u(t-2) = y_1(t)+y_2(t) \checkmark$$

Άρα <u>είναι γραμμικό</u>

<u>Χρονικά Αμετάβλητο</u>

Πρέπει να ισχύει $\underset{x:=x(t-t_0)}{y(t)} = y(t-t_0)$

$$\underset{x:=x(t-t_0)}{y(t)} = x(t-t_0)u(t-2) \neq y(t-t_0) = x(t-t_0)u(t-t_0-2)$$

Άρα <u>δεν</u> είναι χρονικά αμετάβλητο

Ευστάθεια

Αν $|x(t)| < B_x$ πρέπει και $|y(t)| < B_y$

$$|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| = |x(t)\cdot u(t-2)| = |x(t)|\cdot|u(t-2)| < B_x\cdot|u(t-2)| = B_x\cdot 1 = B_x$$

Άρα είναι ευσταθές

Αιτιατότητα

Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από τρέχουσες τιμές της εισόδου και όχι από μελλοντικές.

Δυναμικότητα

Δεν είναι δυναμικό, γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση μελλοντικών ή παρελθοντικών τιμών της εισόδου ή της εξόδου

Θέμα 3 - Βαθμός: 30

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{1}{4}y(t) = x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$.

(α΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β΄) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε **αναλυτικά** την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

(δ΄) **(5.0 μ.)** Είναι το σύστημα ευσταθές; Δικαιολογήστε.

α) Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

$y_{zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$, $\underline{t>0}$

$y_{zi}(0^-) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$

$y'_{zi}(0^-) = 0 \Leftrightarrow C_1 \cdot \frac{1}{2}\cancel{e^{\frac{1}{2}\cdot 0}} - C_2 \cdot \frac{1}{2}\cancel{e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_2 = 1 \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{2} \\ C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα $\boxed{y_{zi}(t) = \left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right]u(t)}$

β) $h(t)=?$ (1.) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\frac{1}{4}y(t)=x(t)+2\frac{d}{dt}x(t)$

a_N

Θεωρούμε το σύστημα $\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\frac{1}{4}y(t)=x(t)$ με κρουστική απόκριση την $h_0(t)$. Το Χ.Π. είναι $\lambda^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$

$$h_0(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{\frac{1}{2}t}+c_2e^{-\frac{1}{2}t},\quad t>0$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι:

$$h_0(0^+)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0$$

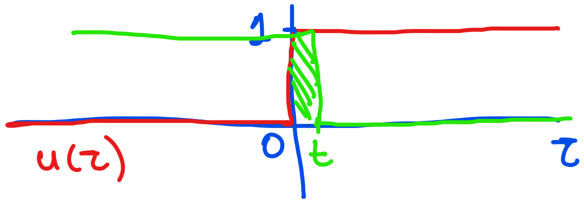
$$h_0'(0^+)=\frac{1}{a_N}=1 \Leftrightarrow c_1\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}-c_2\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2=1 \Leftrightarrow c_1-c_2=2$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1-c_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1=2+c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2c_2=0 \\ c_1=2+c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=-1 \\ c_1=1 \end{cases}$$

Άρα $h_0(t)=\left[e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}t}\right]u(t)$.

$$h(t)=h_0(t)+2\cdot\frac{d}{dt}h_0(t)=\left(e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)+\cancel{2}\cdot\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}t}+\cancel{\tfrac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)=$$

$$= \left[e^{\frac{1}{2}t} - \cancel{e^{-\frac{1}{2}t}} + e^{\frac{1}{2}t} + \cancel{e^{-\frac{1}{2}t}}\right]u(t) = \boxed{2e^{\frac{1}{2}t}u(t)}$$



γ) $y_{zs}(t) = ?$ για $x(t) = u(t)$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{\frac{1}{2}\tau}\underbrace{u(\tau)\cdot u(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t} 2e^{\frac{1}{2}\tau}\,d\tau = 2\left[2\cdot e^{\frac{1}{2}\tau}\right]_0^t = 2\left(2\cdot e^{\frac{1}{2}t} - 2\right) = 4\left(e^{\frac{1}{2}t} - 1\right)u(t).$$

δ) Το σύστημα θα είναι ευσταθές αν όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι αρνητικές. Εμείς έχουμε $\underline{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Άρα το σύστημα μας είναι ασταθές.

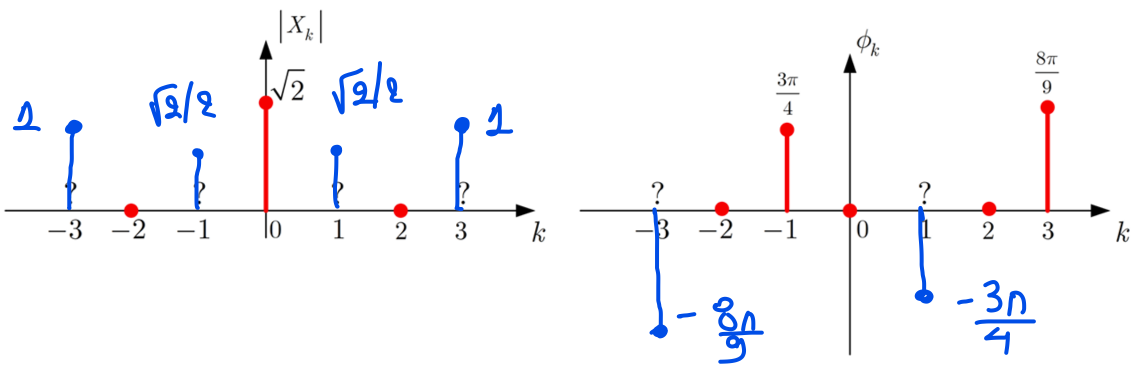
Θέμα 4 - Βαθμός: 35

Σας δίνεται το Σχήμα 1 που αναπαριστά **ελλειπώς** το φάσμα πλάτους και φάσης ενός πραγματικού περιοδικού σήματος $x(t)$.

Πραγματικό σήμα

$|X_k|$ άρτια συμμετρία

Φ_k περιττή συμμετρία



Σχήμα 1: *Φάσματα πλάτους και φάσης Θέματος 4.*

$$X_{-3} = 1 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{9}}$$

$$X_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

Επίσης σας δίνονται οι εξής πληροφορίες:

(α) $\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)dt = 5,$ (β) $X_k = 0, \ |k| > 3,$ (γ) $\left|\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t}dt\right| = 1$

Βρείτε το περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μορφή εκθετικής (**20 μ.**) και τριγωνομετρικής (**10 μ.**) σειράς Fourier. Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του περιοδικού σήματος περιλαμβάνεται στους δυο πρώτους όρους ($k = 1, 2$) της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (**5 μ.**) ;

Φ_k περιττή συμμετρία $\rightsquigarrow$ $\angle X_k = -\angle X_{-k}$, $\angle X_{-3} = -\angle X_3 = -\frac{8\pi}{9}$

$\angle X_1 = -\angle X_{-1} = -\frac{3\pi}{4}$

α) $\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)\,dt = 5$

Γνωρίζουμε από Θεώρημα Parseval: $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x^2(t)|\,dt$. Άρα $\underline{\underline{T_0 = 2}} \rightsquigarrow f_0 = \frac{1}{2}$

β) $X_k = 0$, $|k| > 3$

γ) $\left|\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t}dt\right| = 1$, $X_k = \frac{1}{\overset{2}{\cancel{T_0}}}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k \overset{1/2}{\cancel{f_0}} t}\,dt$

Άρα $|X_3| = 1$ και $|X_{-3}| = 1$ γιατί $\underline{|X_k|} = \underline{|X_{-k}|}$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)\,dt = 5 \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 5 \Leftrightarrow \sum_{k=-3}^{3} |X_k|^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_0| + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 0 + |X_{-1}|^2 + (\sqrt{2})^{\cancel{2}} + |X_1|^2 + 0 + 1^2 = 5 \Leftrightarrow |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } |X_{-1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\,dt = \sqrt{2} + \sum_{\substack{k=-3 \\ k\neq 0}}^{3} X_k e^{j2\pi k \frac{1}{2} t}\,dt =$$

$$= \sqrt{2} + \underbrace{1\cdot e^{-j\frac{8\pi}{9}}\cdot e^{-j3\pi t}} + 0 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{-j\pi t}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{j\pi t}} + 0 + \underbrace{1\cdot e^{j\frac{8\pi}{9}}\cdot e^{j3\pi t}} =$$

$$= \sqrt{2} + \underbrace{1\cdot e^{-j\left(3\pi t + \frac{8\pi}{9}\right)} + 1 e^{j\left(3\pi t + \frac{8\pi}{9}\right)}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\left(\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\left(\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)}}$$

$$\sqrt{2} + 2\cos\left(3\pi t + \frac{8\pi}{9}\right) + \sqrt{2}\cos\left(\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$P_{1,2} = \sum_{\substack{k=-2 \\ k\neq 0}}^{2} |X_k|^2 = 0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$P_x = 5 \qquad \text{Άρα} \quad p = \frac{P_{1,2}}{P_x} = \frac{1}{5} = 0.20 = \boxed{20\%}$$

Το X_0 λειτουργεί και σαν μία σταθερή μετατόπιση στον άξονα $y'y$.