ΗΥ215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 4

Προετοιμασία για την Πρόοδο

24 Μαρτίου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Άσκηση 1 - Βαθμός: 15

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα είναι γραμμικό (**5 μ.**), χρονικά αμετάβλητο (**2.5 μ.**), ευσταθές (**2.5 μ.**), αιτιατό (**2.5 μ.**), και δυναμικό (**2.5 μ.**)

$$y(t) = (2 + \sin(t))x(t) \tag{1}$$

Γραμμικό

Ομογενές: $ax(t) \rightsquigarrow ay(t)$

$$\underset{x:=ax(t)}{y(t)} = (2+\sin(t))ax(t) = a(2+\sin(t))x(t) = ay(t) \checkmark$$

Αθροιστικό: $x_1(t) \rightsquigarrow y_1(t)$ και $x_2(t) \rightsquigarrow y_2(t)$, $x_1(t)+x_2(t) \rightsquigarrow y_1(t)+y_2(t)$

$$\underset{x:=x_1(t)+x_2(t)}{y(t)} = (2+\sin(t))(x_1(t)+x_2(t)) = \underbrace{(2+\sin(t))x_1(t)} + \underbrace{(2+\sin(t))x_2(t)} =$$

$$= y_1(t) + y_2(t) \checkmark$$

Άρα είναι γραμμικό

Χρονικά Αμετάβλητο

$$x(t-t_0) \rightsquigarrow y(t) = (2+\sin(t))x(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) \rightsquigarrow y(t-t_0) = (2+\sin(t-t_0))x(t-t_0)$$

Επειδή $y(t-t_0) \neq \underset{x:=x(t-t_0)}{y(t)}$, δεν είναι Χ.Α.

Ευσταθές

Για φραγμένη είσοδο, πρέπει να είναι φραγμένη και η έξοδος

$|x(t)| < B$ τότε $|y(t)| = |2+\sin(t)||x(t)| < \underline{|2+\sin(t)|}B \leq 3B \checkmark$

Άρα <u>είναι ευσταθές</u> ↳ γιατί $|2+\sin(t)| \leq 3$

$|\sin(t)| \leq 1$

<u>Αιτιότητα</u>

Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου, και όχι από μελλοντικές.

<u>Δυναμικό</u>

<u>Δεν είναι δυναμικό</u> (είναι στατικό) γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση άλλων χρονικών στιγμών της εισόδου ή εξόδου.

Άσκηση 2 - Βαθμός: 30

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -1$.

i. **(5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

ii. **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

iii. **(15 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

i) Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο : $\lambda^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -16 \Leftrightarrow \lambda_1 = j4$, $\lambda_2 = -j4$

$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = \boxed{C_1 e^{j4t} + c_2 e^{-j4t}}, \ t>0$

Από τις αρχικές συνθήκες : $y(0^-) = 1$ και $y'(0^-) = -1$

$y_{zi}(0^-) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$

$y'_{zi}(t) = C_1 j4 e^{j4t} - C_2 \cdot j \cdot 4 e^{-j4t}$, $y'_{zi}(0^-) = j4C_1 - j4C_2 = -1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ j4C_1 - j4C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ j4(1-C_2) - j4C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ j4 - j4C_2 - j4C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ j4 - j8c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ c_2 = \frac{1}{j8} + \frac{j4}{j8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{j8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{j8} \\ c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{j8} \end{cases}$$

$$y_{zi}(t) = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j8}\right)e^{j4t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j8}\right)e^{-j4t}\right]u(t) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{j4t} - \frac{1}{j8}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{j8}e^{-j4t}\right)u(t) =$$

$$= \boxed{\left(\cos(4t) - \frac{1}{4}\sin(4t)\right)u(t)}$$

ii)

Θεωρούμε το σύστημα: $\longrightarrow$ αν $\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 16h(t) = \delta(t)$, θα έχει κρουστική απόκριση $h_0(t)$.

Το Χ.Π. είναι το ίδιο με το i), άρα $\lambda^2 + 16 = 0$, $\lambda = \pm j4$

$h_0(t) = c_1 e^{j4t} + c_2 e^{-j4t}$, $t > 0$. Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι:

$h_0(0^+) = 0 \quad , \quad h_0^{(N-1)}(0^+) = h_0^{(2-1)}(0^+) = h_0'(0^+) = \frac{1}{a_N} = 1$

$$\begin{matrix} h_0(0^+) = 0 \\ h_0'(0^+) = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ j4c_1 - j4c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -j4c_2 - j4c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -j8c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2 = -\frac{1}{j8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{j8} \\ c_2 = -\frac{1}{j8} \end{cases}, \quad \text{Άρα } h_0(t) = \left(\frac{1}{j8} e^{j4t} - \frac{1}{j8} e^{-j4t}\right) u(t)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \sin(4t)\right) u(t)$$

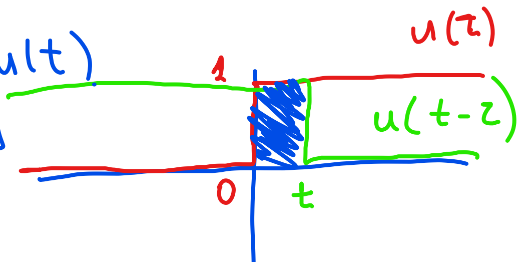
$$h(t) = h_0(t) + h_0'(t) = \left[\frac{1}{4}\sin(4t)\right] u(t) + \cos(4t) \cdot u(t) =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin(4t) + \cos(4t)\right] u(t)$$

iii) y_{zs}, για $x(t) = u(t)$. $y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4}\sin(4\tau) + \cos(4\tau)\right] u(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{4}\sin(4\tau) + \cos(4\tau)\, d\tau = \dots = \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\sin(4t) - \frac{1}{16}\cos(4t)\right] u(t)$$



Άσκηση 3 - Βαθμός: 15

Ενα *πραγματικό* περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$X_k = [2e^{-j\pi/3}, 3e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi}, 2e^{-j\pi/4}] \tag{33}$$

για $k = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα, και $X_0 = 3$. Πόση είναι η ισχύς του σήματος (**10 μ.**) και τι ποσοστό της ισχύος αυτής βρίσκεται στα 2 πρώτα ***ημίτονα*** ($k = 1,\ k = 2$) της σειράς Fourier (**5 μ.**);

Από Θεώρημα του Parseval : $P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$

• Το σήμα είναι πραγματικό, άρα θα έχει και αρνητικά k για τα οποία θα ισχύει $X_k^* = X_{-k}$. Το μέτρο κάθε μιγαδικού αριθμού $Ae^{j\theta}$, θα είναι

$|Ae^{j\theta}| = |A|$

$$P_x = |X_0|^2 + \sum_{k=-5, k\neq 0}^{5} |X_k|^2 = |X_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{5} |X_k|^2 = 3^2 + 2[2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2] =$$
$$= 9 + 2(4+9+1+1+4) = \boxed{47}$$

• $P_{1,2} = \sum_{k=-2, k\neq 0}^{k=2} |X_k|^2 = 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 = 4+9+4+9 = \boxed{26}$

$X_{-1} = X_1^*$ και $X_{-2} = X_2^*$, όμως $|X_{-1}| = |X_1^*|$ και $|X_{-2}| = |X_2^*|$

Άρα το ποσοστό θα είναι: $p = \frac{P_{1,2}}{P_x} = \frac{26}{47} = 0.553$ ή 55.3%

Άσκηση 4 - Βαθμός: 30

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 2$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k}, \ \forall\ k \in Z$$

$$f_0 T_0 = 1 \Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{1} e^{-t} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{1} e^{-t(1+j2\pi k f_0)}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\frac{1}{-(1+j2\pi k f_0)} \cdot e^{-t(1+j2\pi k f_0)}\right]_0^1 = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-(1+j2\pi k f_0)} \cdot e^{-(1+j2\pi k f_0)} - \frac{1}{-(1+j2\pi k f_0)}\right)$$

$$= \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{1+j2\pi k f_0} - \frac{1}{1+j2\pi k f_0} \cdot e^{-(1+j2\pi k f_0)}\right) =$$

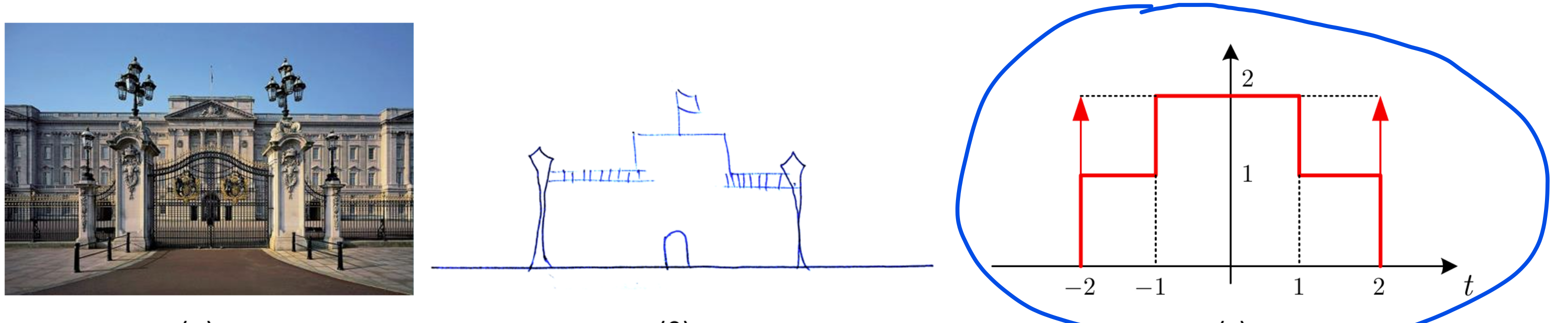
$$= \frac{1}{T_0 + j2\pi k \cancelto{1}{f_0 T_0}} - \frac{e^{-1} \cdot e^{-j2\pi k \cancel{\frac{1}{2}}}}{T_0 + j2\pi k \cancelto{1}{f_0 T_0}} = \frac{1 - e^{-1} \cdot e^{-j\pi k}}{2 + j2\pi k} = \boxed{\frac{1 - e^{-1} \cdot (-1)^k}{2 + j2\pi k},\ \forall k \in \mathbb{Z}}$$

$$e^{-j\pi k} = (-1)^k$$

Μπορούμε να βρούμε το X_0 από τα X_k γιατί δεν υπάρχει απροσδιοριστία! $X_0 = (1 - e^{-1})/2$.

Άσκηση 5 - Βαθμός: 25

Ο φίλος σας πήγε διακοπές στο Ηνωμένο Βασίλειο, και μεταξύ άλλων φωτογράφισε το παλάτι του Buckingham, όπως στο Σχήμα 1(α). Ο μικρός του αδελφός προσπάθησε να το ζωγραφίσει, αλλά το άφησε στη μέση - Σχήμα 1(β). Εσείς είδατε το ημιτελές σχέδιο και επειδή έχετε διαβάσει πολύ για το HY215, κάθε ζωγραφιά τη βλέπετε ως σήμα! Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του παλατιού-σήματος του Σχήματος 1(γ).



(α) (β) (γ)

Σχήμα 1: *Παλάτι του Buckingham σε διάφορες "εκδόσεις"*.

Hint: "Σπάστε" το σήμα σας σε γνωστά υποσήματα, βρείτε ξεχωριστά το μετασχ. Fourier τους, και αθροίστε τα αποτελέσματα που παίρνετε.

- Μια συνάρτηση Δέλτα στο $t_0=-2$ με συντελεστή 2
- Έναν τετραγωνικό παλμό στο $(-2,-1)$ με πλάτος 1.
- Έναν τετραγωνικό παλμό στο $(1,2)$ με πλάτος 1
- Μια συνάρτηση Δέλτα στο $t_0=2$ με συντελεστή 2.
- Έναν τετραγωνικό παλμό στο $(-1,1)$ με πλάτος 2.

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t+2)e^{-j2\pi ft}dt+\int_{-2}^{-1}1e^{-j2\pi ft}dt+\int_{-1}^{1}2e^{-j2\pi ft}dt+\int_{1}^{2}1e^{-j2\pi ft}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta(t-2)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+2)\,\underline{e}^{j4\pi f}\,dt + \int_{-2}^{-1} 1 e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{1}^{2} 1\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2)e^{-j4\pi f}\,dt$$

$$= 2e^{j4\pi f}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+2)\,dt}_{1} + \int_{-2}^{-1} 1e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{1}^{2} 1\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt + 2e^{-j4\pi f}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2)\,dt}_{1}$$

$$= \underline{2e^{j4\pi f}} + \left[\frac{1}{-j2\pi f}\cdot e^{-j2\pi ft}\right]_{-2}^{-1} + 2\left[\frac{1}{-j2\pi f}\cdot e^{-j2\pi ft}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\right]_{1}^{2} + \underline{2e^{-j4\pi f}}$$

$$= 4\cos(4\pi f) - \frac{1}{j2\pi f}\left(-\underline{e^{j2\pi f}} - \underline{e^{j4\pi f}} + \underline{e^{-j2\pi f}} + \underline{e^{-j4\pi f}}\right) =$$

$$= 4\cos(4\pi f) - \frac{1}{j\cancel{2}\pi f}\left(-\cancel{2j}\sin(2\pi f) - \cancel{2j}\sin(4\pi f)\right) =$$

$$= 4\cos(4\pi f) + \underbrace{\frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}} + \underbrace{\frac{\sin(4\pi f)}{\pi f}} =$$

$$= \boxed{4\cos(4\pi f) + 2\operatorname{sinc}(2f) + 4\operatorname{sinc}(4f)}$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t \pm t_0)\,dt = x(\mp t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt = 1$$

Εναλλακτική λύση με γνωστά σήματα και ιδιότητες

$\{ x(t \pm t_0) \xleftrightarrow{F} X(f) e^{\pm j 2\pi f t_0}$

- $2\delta(t+2) \xleftrightarrow{F} 2 \cdot 1 \cdot e^{j 2\pi f \cdot 2} = \boxed{2 e^{j 4\pi f}}$, από ιδιότητα χρονικής μετατόπισης
- $1 \cdot \text{rect}\left(t + \frac{3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 1 \cdot 1 \cdot \text{sinc}(f \cdot 1) e^{j \cancel{2}\pi f \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} = \boxed{\text{sinc}(f) e^{j 3\pi f}}$, από ιδιότητα χρονικής μετατόπισης.
- $2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2 \cdot 2 \cdot \text{sinc}(2f) = \boxed{4 \text{sinc}(2f)}$
- $1 \cdot \text{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 1 \cdot 1 \cdot \text{sinc}(f) e^{-j \cancel{2}\pi f \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} = \boxed{\text{sinc}(f) e^{-j 3\pi f}}$, από ιδιότητα χρονικής μετατόπισης.
- $2\delta(t-2) \xleftrightarrow{F} 2 \cdot 1 \cdot e^{-j 2\pi f 2} = \boxed{2 e^{-j 4\pi f}}$, από ιδιότητα χρονικής μετατόπισης.

Άρα $X(f) = \underline{2 e^{j 4\pi f}} + \text{sinc}(f) e^{j 3\pi f} + 4 \text{sinc}(2f) + \text{sinc}(f) e^{-j 3\pi f} + \underline{2 e^{-j 4\pi f}} =$

$$= 4\cos(4\pi f) + \text{sinc}(f)\left(e^{j 3\pi f} + e^{-j 3\pi f}\right) + 4\text{sinc}(2f) =$$

$$= 4\cos(4\pi f) + \text{sinc}(f) \cdot 2 \cdot \cos(3\pi f) + 4\text{sinc}(2f) =$$

$\{ 2\sin(A) \cdot \cos(B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$$= 4\cos(4\pi f) + \frac{2\sin(\pi f)}{\pi f} \cdot \cos(3\pi f) + 4\text{sinc}(2f) =$$

$$= 4\cos(4\pi f) + \frac{\sin(\pi f + 3\pi f) + \sin(\pi f - 3\pi f)}{\pi f} + 4\text{sinc}(2f)$$

$$= 4\cos(4\pi f) + \frac{\sin(4\pi f) - \sin(2\pi f)}{\pi f} + \frac{2\sin(2\pi f)}{\pi f} =$$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$$= 4\cos(4\pi f) + \frac{\sin(4\pi f)}{\pi f} + \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} =$$

$$= \boxed{4\cos(4\pi f) + 4\,\mathrm{sinc}(4f) + 2\,\mathrm{sinc}(2f)}$$