HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

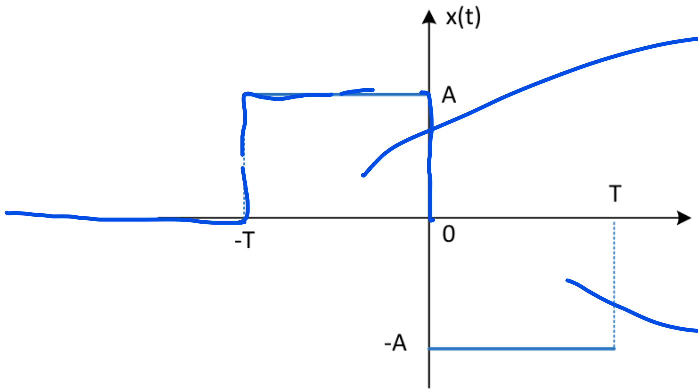
Φροντιστήριο 3 Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες

20 Μαρτίου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες I

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 1 με τους ακόλουθους τρόπους:



$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)$

$-A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$

Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(α΄) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

<u>Υπόδειξη</u>: Χρησιμοποιήστε ότι $\boxed{1-\cos(2\theta) = 2\sin^2(\theta).}$

(β΄) Χρησιμοποιώντας τα γνωστά σας ζεύγη μετασχ. Fourier που γνωρίζετε και την ιδιότητα της μετατόπισης.

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της παραγώγισης/ολοκλήρωσης και μετατόπισης.

(α) $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-T}^{0} A e^{-j2\pi f t}\,dt + \int_{0}^{T} (-A)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt =$

$= A\left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\right]_{-T}^{0} - A\left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\right]_{0}^{T} =$

$= A\left(\frac{1}{-j2\pi f} - \left(\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f(-T)}\right)\right) - A\left(\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f T} - \left(\frac{1}{-j2\pi f}\right)\right) =$

$= A\cdot\frac{1}{-j2\pi f}\left(1 - e^{j2\pi f T}\right) + A\cdot\left(\frac{1}{j2\pi f}\right)\left(e^{-j2\pi f T} - 1\right) =$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(\underline{e^{j2\pi fT}} - 1 + \underline{e^{-j2\pi fT}} - 1\right) = \frac{A}{j2\pi f}\left(2\cos(2\pi fT) - 2\right)$$

$$= \frac{2A}{j2\pi f}\left(\cos(2\pi fT) - 1\right) = \frac{\cancel{2}A}{j\cancel{2}\pi f}\left(-2\sin^2(\pi fT)\right) =$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$= -\frac{2A}{j\pi f}\sin^2(\pi fT) = \boxed{\frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT)}$$

B) $A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t \pm t_0}{T}\right) \longleftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{j2\pi f(\pm t_0)}$

$$\frac{1}{j} = \mp\frac{1}{j}$$

$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow}$$

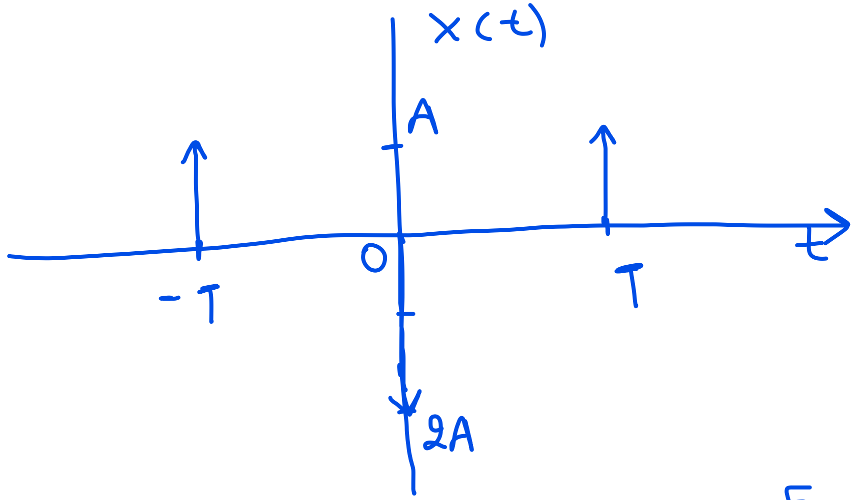
$$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} =$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} - e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}\right) = \frac{A\cancel{T}\sin(\pi fT)}{\pi f\cancel{T}} \cdot 2j\sin(\pi fT) =$$

$$= \boxed{\frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT)}$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

γ) Αν παραγωγίσουμε το $x(t)$, θα έχουμε:



Στις ασυνέχειες, βλέπουμε πόσο πολύ "ανεβαίνει" ή "πέφτει" το σήμα, και βάζουμε dirac.

$$x'(t) = A\delta(t+T) - 2A\delta(t) + A\delta(t-T) \xleftrightarrow{F} X'(f) = \underbrace{Ae^{j2\pi fT} - 2A + Ae^{-j2\pi fT}} =$$

$$= 2A\cos(2\pi fT) - 2A = 2A(\cos(2\pi fT) - 1) = 2A(-2\sin^2(\pi fT)) =$$

$$= -4A\sin^2(\pi fT)$$

Από ιδιότητα παραγώγισης/ολοκλήρωσης:

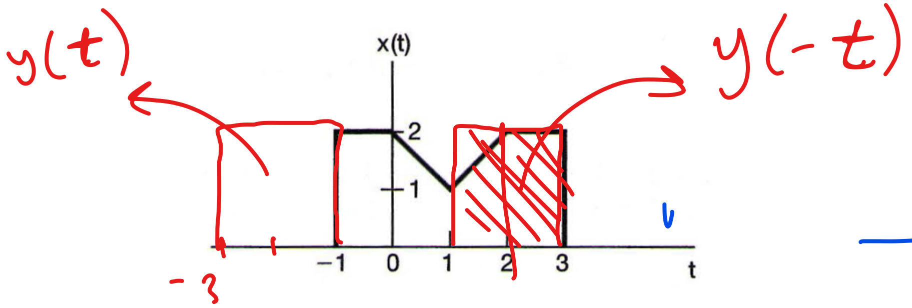
$$F\{x'(t)\} = j2\pi f X(f) \Leftrightarrow -4A\sin^2(\pi fT) = j2\pi f X(f) \Leftrightarrow X(f) = \frac{-4A\sin^2(\pi fT)}{j2\pi f} + \frac{X'(0)}{2}\delta(f)$$

από ιδιότητα ολοκλήρωσης

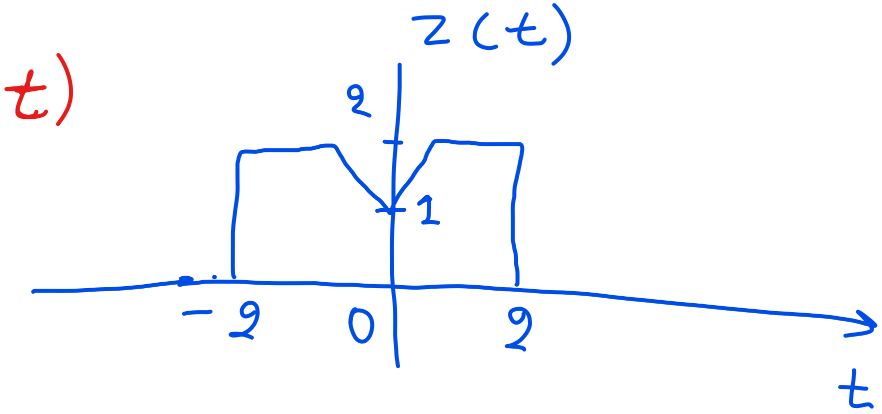
Όμως $X'(f)\big|_{f=0} = 0$. Άρα $\boxed{X(f) = \frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT)}$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - III

Έστω $X(f)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σήμα $x(t)$ Άσκησης 3.*



(α') Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $A(f)e^{j\Theta(f)}$, με $A(f)$ και $\Theta(f)$ πραγματικές συναρτήσεις. Βρείτε τη $\Theta(f)$.

(β') Υπολογίστε το $X(0)$.

(γ') Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$.

(δ') Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} 2X(f)\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}e^{j4\pi f}df$.

(ε') Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.

* Δεν θα έχει σταθερή φάση γιατί η εκφώνηση μας λέει ότι A(f) πραγματική συνάρτηση άρα ό,τι πρόσημο και να έχει δεν θα επηρεάσει τη φάση με ±π.

α) Το z(t) είναι άρτιο και πραγματικό, άρα θα έχει μηδενική ή * σταθερή φάση.

$$z(t) \longleftrightarrow Z(f) = A(f)e^{j0}$$

$$x(t) = z(t-1) \longleftrightarrow X(f) = Z(f)e^{-j2\pi f 1} =$$

$$= A(f)e^{-j2\pi f} =$$

$$= A(f)e^{j\Theta(f)}$$

$\Theta(f) = -2\pi f$

β) $$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi \cdot 0 t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \text{εμβαδόν } x(t) = 7$$

γ) $$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\underbrace{e^{j2\pi f\cdot 0}}_{1}\,df = x(0) = 2$$

δ) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{2X(f)}\,\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}\cdot e^{j4\pi f}\,df =$$

Έστω $$Y(f) = 2\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}\cdot e^{j4\pi f} = 2\,\mathrm{sinc}(2f)\,\underline{e^{j2\pi f 2}} =$$

$$\xleftrightarrow{F^{-1}} \mathrm{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right) = y(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot Y(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X(f)\cdot Y(f)}\,e^{j2\pi f\cdot 0}\,df =$$

$$A T\,\mathrm{sinc}(fT) \updownarrow A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$= F^{-1}\{X(f)Y(f)\}\Big|_{t=0} = x(t) * y(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(0-\tau)\,d\tau = \int_{1}^{3} x(\tau)\,d\tau = \boxed{\frac{7}{2}}$$

(ε) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ από Θεώρημα Parseval $\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1<t<0 \\ -t+2, & 0\leq t<1 \\ t, & 1\leq t<2 \\ 2, & 2\leq t<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \rightsquigarrow x^2(t) = \begin{cases} 4, & -1<t<0 \\ (-t+2)^2, & 0\leq t<1 \\ t^2, & 1\leq t<2 \\ 4, & 2\leq t<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-1}^{0} 4\,dt + \int_{0}^{1} (-t+2)\,dt + \int_{1}^{2} t^2\,dt + \int_{2}^{3} 4\,dt =$$

$$= \left[4t\right]_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} t^2 - 4t + 4\,dt + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{2} + \left[4t\right]_{2}^{3} =$$

$$= (0-(-4)) + \int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 4t\,dt + \int_0^1 4\,dt + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + (12-8) =$$

$$= 4 + \frac{1}{3} - 2 + 4 + \frac{7}{3} + 4 = 10 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{38}{3}}$$

Άσκηση 1 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες - I

Βρείτε μια έκφραση για τα παρακάτω σήματα χωρίς να περιλαμβάνεται η πράξη της συνέλιξης:

$$x_1(t) = \mathrm{sinc}(at - b_1) * \mathrm{sinc}(at - b_2),\ a, b_1, b_2 \in \mathrm{R}, a \neq 0$$
$$x_2(t) = \mathrm{sinc}(at) * \mathrm{sinc}(bt),\ a, b > 0$$
$$x_3(t) = e^{-t}u(t) * e^{-t-1}u(t-1)$$

$$x_1(t) = \underbrace{\mathrm{sinc}(at-b_1)}_{z_1(t)} * \underbrace{\mathrm{sinc}(at-b_2)}_{z_2(t)}$$

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

από ιδιότητα δυικότητας:

$$\underline{AT\,\mathrm{sinc}(tT)} \xleftrightarrow{F} \underline{A\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)}$$

Έστω $w(t) = \mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} W(f) = \mathrm{rect}(f)$

$y(t) = w(t-b_1)$ και $z_1(t) = y(at) \longleftrightarrow$ από ιδιότητα σταθμισης

$$\longleftrightarrow Y(f) = W(f)e^{-j2\pi f b_1} \qquad Z_1(f) = \frac{1}{|a|}Y\left(\frac{f}{a}\right) \iff$$

$$\iff Z_1(f) = \frac{1}{|a|} \cdot W\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_1} = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_1}$$

$$Z_2(f) = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_2}$$

$$X_1(f) = Z_1(f)\cdot Z_2(f) = \frac{1}{|a|^2}\cdot \cancel{\text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)}\cdot \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi\frac{f}{a}(b_1+b_2)} =$$

$$= \frac{1}{|a|^2}\,\underline{\text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)}\,\underline{e^{-j2\pi\frac{f}{a}(b_1+b_2)}} \xleftrightarrow{F^{-1}}$$

$$\xleftrightarrow{F^{-1}} x_1(t) = \frac{1}{|a|^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{a}\cdot \text{sinc}\left(at \underline{-(b_1+b_2)}\right) = \boxed{\frac{1}{a}\,\text{sinc}(at-(b_1+b_2))}$$

$$x_2(t) = \text{sinc}(at) * \text{sinc}(bt), \quad a,b>0$$

$$\updownarrow F$$

$$X_2(f) = \frac{1}{a}\text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\cdot\frac{1}{b}\text{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \frac{1}{ab}\,\text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\cdot\text{rect}\left(\frac{f}{b}\right)$$

Αν $\underline{a>b}$: $\text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\cdot\text{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{b}\right)$ Άρα $X_2(f) = \frac{1}{ab}\cdot\text{rect}\left(\frac{f}{b}\right)$

$$x_2(t) = \frac{1}{a}\cdot\text{sinc}(bt)$$

Αν $\underline{a<b}$: $\text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\cdot\text{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$

Άρα $x_2(t) = \frac{1}{b}\cdot\text{sinc}(at)$

$$x_3(t) = e^{-t}u(t) * e^{-(t+1)}u(t-1)$$

Γνωρίζουμε ότι :

$$e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}$$ και από ιδιότητα μετατόπισης : $$e^{-(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f}$$

Όμως $$e^{-(t+1)}u(t-1) = e^{-2}e^{-(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow e^{-2}\cdot\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f}$$

Άρα $$X_3(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}\cdot e^{-2}\cdot\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} = e^{-2}\cdot\frac{1}{(1+j2\pi f)^2}e^{-j2\pi f}$$

Γνωρίζουμε ότι $$te^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(1+j2\pi f)^2}$$

Άρα $$\boxed{x_3(t) = e^{-2}\cdot(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)}$$

Άσκηση 2 - Φάσματα Πλάτους και Φάσης

Για κάθε ζεύγος φάσματος πλάτους και φάσης παρακάτω, βρείτε το σήμα στο χρόνο που έχει μετασχ. Fourier με τα δοθέντα φάσματα.

(α') $|X(f)| = 1, \ \angle X(f) = 2\pi f$

(β') $|X(f)| = \text{rect}\left(\frac{f}{3}\right), \ \angle X(f) = 10\pi f$

a) $X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)} = 1 \cdot e^{j2\pi f \cdot 1} \xleftrightarrow{F^{-1}} \delta(t+1)$

β) $X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)} = \text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) \cdot e^{j\underline{10\pi f}} = \text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) e^{j2\pi \frac{f}{3} \cdot 15} =$

$\xleftrightarrow{F^{-1}} \quad 3\text{sinc}(3t + 15)$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες ΙΙ

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος

$$g(t) = 200\mathrm{sinc}(200t) \xleftrightarrow{F} G(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right)\right|^2 df =$$

$$= \int_{-100}^{100} 1\,df = \Big[f\Big]_{-100}^{100} = 100-(-100) = \boxed{200}$$