ΗΥ215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 2

Σειρές Fourier και Ιδιότητες

13 Μαρτίου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης → angelakis@csd.uoc.gr

Ασκηση 2 - Σειρά Fourier II

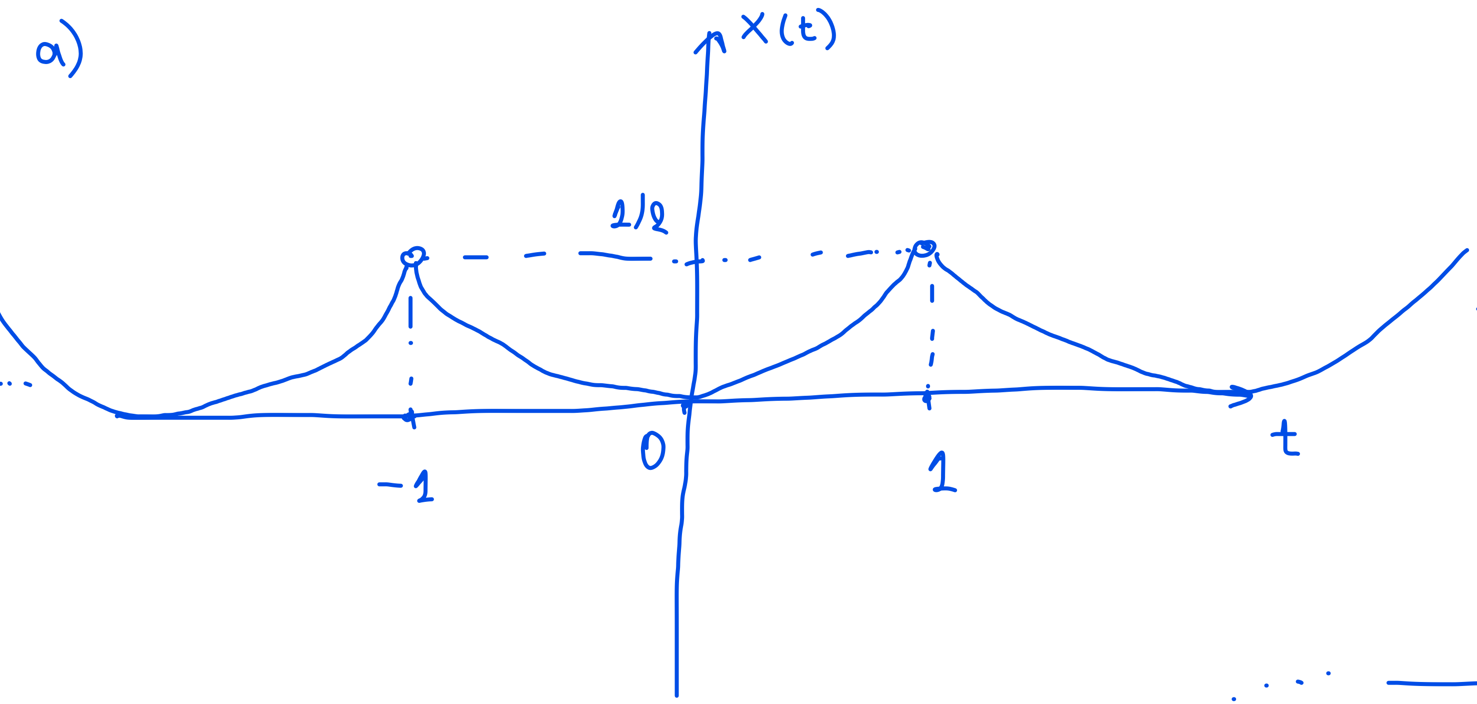
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = 2$, που σε μια περίοδό του εκφράζεται ως

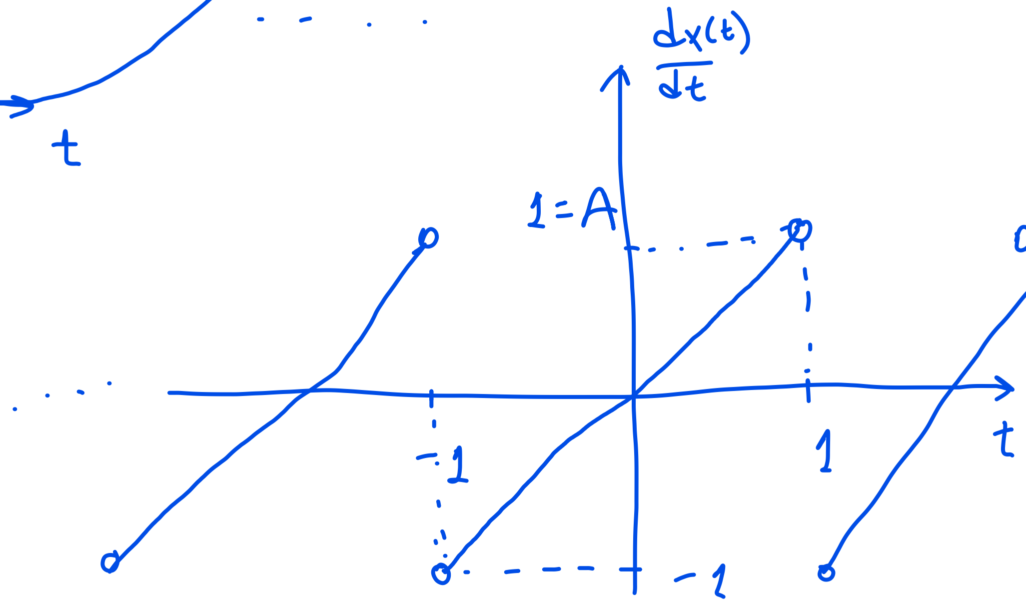
$$\boxed{x_{T_0}(t) = \frac{t^2}{2},} \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \rightsquigarrow -1 < t < 1 \tag{20}$$

(α΄) Δεδομένου ότι ένας αναλυτικός υπολογισμός είναι χρονοβόρος, υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier του μέσω της ιδιότητας της παραγώγισης - ολοκλήρωσης και γνωστές Σειρές Fourier που έχετε διδαχθεί στο μάθημα. Μια σχεδίαση τόσο του $x(t)$ όσο και της παραγώγου του, $dx(t)/dt$, θα σας βοηθήσει πολύ.

(β΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

α)





$x_{T_0}(t) = \frac{t^2}{2}, \; -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$, $x'_{T_0}(t) = t, \; -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$

$$X'_k = \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{\text{ιδιότητα ολοκλήρωσης}} X_k = \frac{X'_k}{j2\pi k f_0} =$$

$$= \frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot\frac{1}{\pi k}\cdot(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\cancel{2}\pi k \frac{1}{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\pi^2 k^2}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} =$$

$T_0 = 2 \rightsquigarrow f_0 = \frac{1}{2}$

$$= \cancel{e^{-j\frac{\pi}{2}}}\cdot\frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k \cancel{e^{j\frac{\pi}{2}}} = \boxed{\frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k = X_k}$$

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j = \mp\frac{1}{j}$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

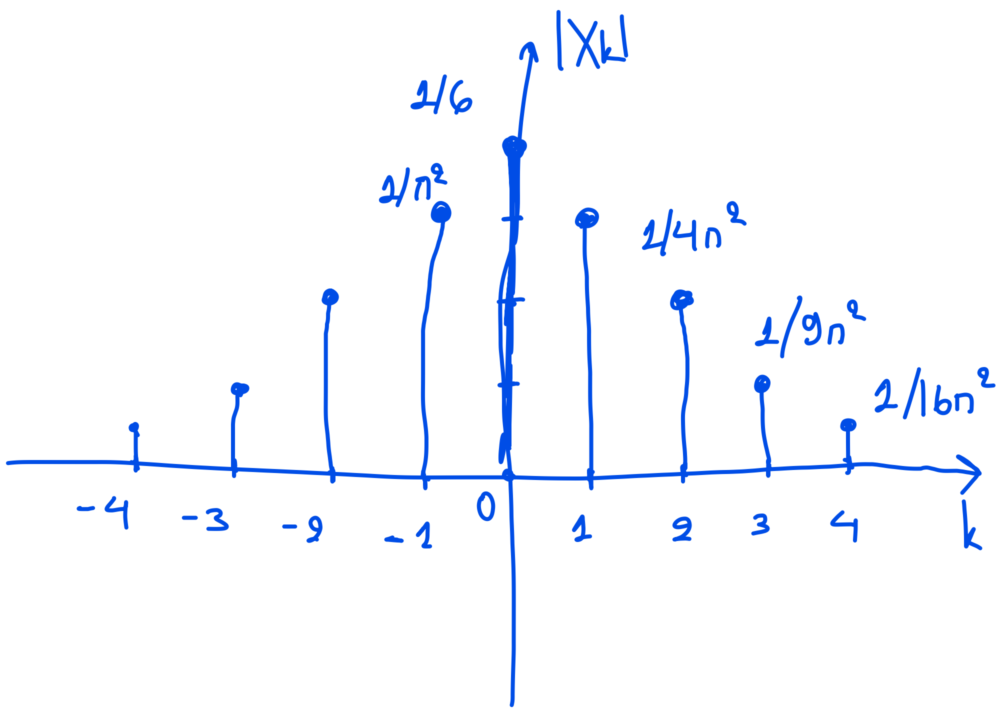
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

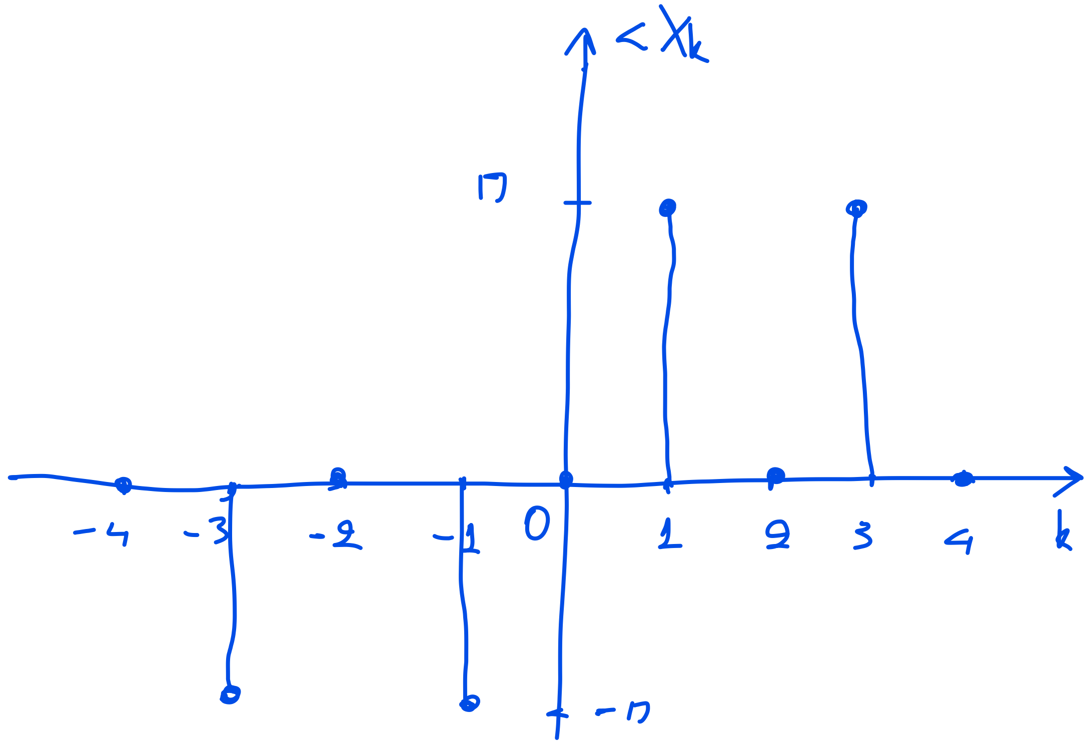
β) Υπολογίζουμε πρώτα τα X_k για $k>0$ και βρίσκουμε το μέτρο και τη φάση τους. Έπειτα σχεδιάζουμε το $|X_k|$ και $\angle X_k$ για $k>0$ και στη συνέχεια λόγω συμμετρίας ($x(t)$ πραγματικό), θα έχει άρτιο και περιττό φάσμα πλάτους και φάσης, αντίστοιχα. και άρα μπορούμε να σχεδιάσουμε για $k<0$.

Άρα για $k>0$: $X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{1}{\pi^2 k^2} e^{j\pi}, & k \text{ περιττά} \end{cases}$

$e^{\pm j\pi} = -1$

$$|X_k| = \frac{1}{\pi^2 k^2} \quad \text{και} \quad \angle X_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \pi, & k \text{ περιττά} \end{cases} \quad \text{για } k>0.$$





Ασκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες I

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και περιττό (1) ✓
- έχει περιόδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k (2) ✓
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$ (3) ✓
- ισχύει $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$ (4) ✓

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Το σήμα είναι πραγματικό $\rightarrow$ $\boxed{X_k = X_{-k}^*}$ και θα έχει συντελεστές Fourier X_k για $|k| \leq 1$, από (3)

Άρα $x(t) = \sum_{k=-1}^{1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} =$

$$= X_{-1} e^{j2\pi(-1)\frac{1}{2}t} + X_0 \cancel{e^{j2\pi 0 \cdot \frac{1}{2}t}}^{1} + X_1 e^{j2\pi 1 \cdot \frac{1}{2}t} =$$

$$= X_1^* e^{-j\cancel{2}\pi\frac{1}{\cancel{2}}t} + X_0 + X_1 e^{j\cancel{2}\pi\frac{1}{\cancel{2}}t} = \boxed{X_1^* e^{-j\pi t} + X_0 + X_1 e^{j\pi t}}$$

Το σήμα είναι περιττό $\rightarrow$ $X_k \in Im$ άρα $X_k = jb(k)$, $b(k) \in R$.

Λόγω της σχέσης $X_{-k} = X_k^* \Leftrightarrow jb(-k) = -jb(k) \Leftrightarrow \boxed{X_{-k} = -X_k}$

άρα και $\boxed{X_k = -X_{-k}}$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 \Leftrightarrow \left|X_{-1} e^{-j\pi t}\right|^2 + |X_0|^2 + \left|X_1 e^{j\pi t}\right|^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2}$$

$$\Leftrightarrow |X_{-1}|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-X_1|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |X_1|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|X_1|^2 + |X_0|^2 = 1 \overset{5}{\Leftrightarrow} 2|X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow |X_1|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{X_{-k} = -X_k\big|_{k=0} \Leftrightarrow X_0 = -X_0 \Leftrightarrow 2X_0 = 0 \Leftrightarrow X_0 = 0 \quad 5}$$

$$\Leftrightarrow |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X_1 = \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$ τότε $X_{-1} = -X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$ (με αυτό θα υπολογίσουμε το $x_1(t)$)

και αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$ τότε $X_{-1} = j\frac{1}{\sqrt{2}}$ (με αυτό θα υπολογίσουμε το $x_2(t)$)

- $x_1(t) = X_{-1} e^{-jnt} + X_1 e^{jnt} = -j\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-jnt} + j\frac{1}{\sqrt{2}} e^{jnt} = \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{-jnt} - \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{jnt} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{-jnt} - e^{jnt}}{j} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{j} \right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(nt) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \sin(nt) = \boxed{-\sqrt{2} \sin(nt)}$$

- $x_2(t) = X_{-1} e^{-jnt} + X_1 e^{jnt} = j\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-jnt} - j\frac{1}{\sqrt{2}} e^{jnt} = -\frac{1}{j\sqrt{2}} e^{-jnt} + \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{jnt} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{j} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(nt) = \boxed{\sqrt{2} \sin(nt)}$$

$$\pm j = \mp \frac{1}{j}$$

Ασκηση 5 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες ΙΙ

Έστω ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier

$$X_k = \begin{cases} 2, & k=0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιήστε ιδιοτητες για να αποφανθειτε για τα παρακάτω:

(α′) Είναι το περιοδικό σήμα $x(t)$ πραγματικό;

(β′) Είναι το περιοδικό σήμα $x(t)$ συζυγώς συμμετρικό; (δηλ. ισχύει $x(t) = x^*(-t)$;)

(γ′) Είναι το περιοδικό σήμα $dx(t)/dt$ συζυγώς συμμετρικό; (δηλ. ισχύει $x'(t) = x'^*(-t)$;)

(a) Αν $x(t)$ πραγματικό τότε $\boxed{X_k = X_{-k}^*}$

$$X_{-k}^* = \begin{cases} 2, & k=0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & k=0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \neq X_k$$

Άρα <u>$x(t)$ όχι πραγματικό</u>

(β) $x(t) = x^*(-t) \longleftrightarrow \boxed{X_k = X_k^*}$, αυτό σημαίνει ότι X_k πραγματικοί αριθμοί

<u>Δεν είναι</u> συζυγώς συμμετρικό γιατί $X_k = \underline{\underline{j}}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$ για $k \neq 0$.

(γ) $x'(t) = x'^*(-t) \longleftrightarrow \boxed{X'_k = X'^*_k}$, άρα όπως πριν πρέπει X'_k να είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$X_k = \begin{cases} 2, & k=0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k\neq 0 \end{cases} \xrightarrow{1} X'_k = \begin{cases} j2\pi k f_0 \cdot 2, & k=0 \\ j2\pi k f_0 \cdot j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k=0 \\ j^2 2\pi k f_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & -0 \end{cases} =$$

$\boxed{\text{Ιδιότητα παραγώγισης: } j2\pi k f_0 \cdot X_k \quad (1)}$

$$= \begin{cases} 0, & k=0 \\ -2\pi k f_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k\neq 0 \end{cases} \qquad j^2=-1$$

που είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα η παράγωγος <u>είναι</u> συζυγώς συμμετρικό σήμα.

Ασκηση 6 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες III

Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(k\pi/8)}{k^2} \tag{51}$$

αν γνωρίζετε ότι

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le t_c \\ 0, & t_c < |t| \le T_0/2 \end{cases} \longleftrightarrow X_k = \frac{\sin(2\pi k f_0 t_c)}{\pi k}, \quad X_0 = \frac{2t_c}{T_0} \tag{52}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2\pi k f_0 t_c)}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1^2 dt$$

2

Παρατηρούμε ότι για $\boxed{t_c = \frac{T_0}{16}}$ 1, το X_k μοιάζει πολύ με το ζητούμενο. Άρα:

$$\frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1^2 dt = \frac{1}{T_0}\Big[t\Big]_{-T_0/16}^{T_0/16} = \frac{1}{8}$$

$$2 \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2\pi k f_0 t_c)}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{8} \overset{1}{\Leftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi k/8)}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi k/8)}{k^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi k/8)}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Βρείτε τα σημεία μηδενισμού των:

α) $\mathrm{sinc}(f) + \mathrm{sinc}(2f)$

β) $\mathrm{sinc}(f) \cdot \mathrm{sinc}(2f)$

$f \neq 0!$ $\quad$ $f \neq 0!$

α) $$\mathrm{sinc}(f) + \mathrm{sinc}(2f) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} + \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\pi f) + \sin(2\pi f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\pi f) + 2\sin(\pi f)\cdot\cos(\pi f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\sin(\pi f)}\underbrace{(1 + \cos(\pi f))} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\pi f) = 0 \quad \text{ή} \quad 1 + \cos(\pi f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi f) = 0 \quad \text{ή} \quad \cos(\pi f) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi f) = \sin(\pi k) \quad \text{ή} \quad \cos(\pi f) = \cos(2k\pi + \pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi f = \pi k \quad \text{ή} \quad \pi f = 2\pi k + \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = k \quad \text{ή} \quad f = 2k + 1 \quad , k \in \mathbb{Z} - \{0\}!$$

B) $\mathrm{sinc}(f)\cdot\mathrm{sinc}(2f)=0 \iff$

$\iff \mathrm{sinc}(f)=0$ ή $\mathrm{sinc}(2f)=0 \iff$

$\iff \dfrac{\sin(\pi f)}{\pi f}=0$ $f\neq 0!$ ή $\dfrac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}=0$ $f\neq 0!$ $\iff$

$\iff \sin(\pi f)=0$ ή $\sin(2\pi f)=0 \iff$

$\iff f=k$ ή $\sin(2\pi f)=\sin(\pi k) \iff$

$\iff f=k$ ή $2\pi f=\pi k \iff$

$\iff f=k$ ή $f=\dfrac{k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}-\{0\}!$