HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 10
Συσχετίσεις, Φασματικές Πυκνότητες και Δειγματοληψία

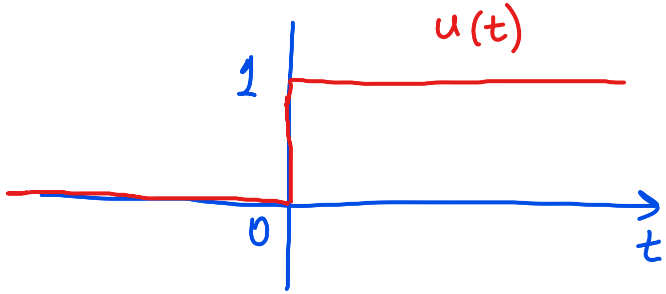
22 Μαΐου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Άσκηση 1 - Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος

$$x(t) = 2e^{-t}u(t)$$



(α) στο πεδίο του χρόνου

(β') στο πεδίο της συχνότητας. Σας δίνεται ότι

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(γ') από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του

a) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-t}u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-2t}\underbrace{u^2(t)}\,dt = \int_{0}^{+\infty} 4e^{-2t} dt =$

$$= 4\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = 4\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-2t}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-2\cdot 0}}_{1}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\right) = \boxed{2}$$

β) $x(t) = 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = 2\cdot\frac{1}{1+j2\pi f}$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{2}{1+j2\pi f}\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|2|^2}{|1+j2\pi f|^2} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{1^2+(2\pi f)^2}^{\,2}} df =$$

Θεώρημα Parseval

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+4\pi^2 f^2} df = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1^2+(2\pi f)^2} df =$$

Αλλαγή μεταβλητής : $x = 2\pi f \Rightarrow dx = 2\pi df \Rightarrow df = \frac{dx}{2\pi}$, με όρια $-\infty, +\infty$ (1)

① $$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1^2+x^2}\cdot\frac{dx}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1^2+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}(x) - \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}(x)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\cancel{\pi} = \boxed{2}$$

γ) $$\Phi_x(f) = X(f)\cdot X^*(f) = \frac{2}{1+j2\pi f}\cdot\frac{2}{1-j2\pi f} = \frac{4}{(1+j2\pi f)(1-j2\pi f)} =$$

$$= \frac{4}{1^2-(j2\pi f)^2} = \frac{4}{1-\underbrace{j^2}_{-1}4\pi^2 f^2} = \frac{4}{1+4\pi^2 f^2}$$

$$\Phi_x(f) = \frac{4}{1+4\pi^2f^2} \xleftrightarrow{F^{-1}} \phi_x(\tau) = 2\cdot e^{-|t|}$$

$$\frac{2a}{4\pi^2f^2+a^2} \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{-a|t|}$$

$$E_x = \phi_x(0) = 2\cdot \underbrace{e^{0}}_{1} = \boxed{2}$$

Άσκηση 3 - Δειγματοληψία Ι

Τα ημιτονοειδή σήματα

$$x_1(t) = \cos(4\pi t) \tag{6}$$
$$x_2(t) = \cos(12\pi t) \tag{7}$$
$$x_3(t) = \cos(20\pi t) \tag{8}$$

δειγματοληπτούνται ιδανικά με ρυθμό $f_s = 8$ Hz. Δείξτε ότι τα τρια σήματα διακριτού χρόνου $x_i[n], i = 1, 2, 3$ που λαμβάνουμε είναι τα ίδια.

Για να πάμε από συνεχή χρόνο σε διακριτό, βάζουμε όπου

$$t = n \cdot T_s = n \cdot \frac{1}{f_s}$$

$$x_1(t) = \cos(4\pi t) \rightsquigarrow x_1[n] = \cos\left(\frac{4\pi n}{8}\right) = \boxed{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

$$x_2(t) = \cos(12\pi t) \rightsquigarrow x_2[n] = \cos\left(\frac{12\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) = \cos\left(\frac{4\pi n}{2} - \frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right) = \boxed{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}.$$

$$x_3(t) = \cos(20\pi t) \rightsquigarrow x_3[n] = \cos\left(\frac{20\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi n}{2}\right) = \cos\left(\frac{4\pi n}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi n + \frac{\pi n}{2}\right) = \boxed{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

Άσκηση 4 - Δειγματοληψία ΙΙ

Δυο ημίτονα, ένα στα 40 κι ένα στα 150 Hz συνδυάζονται για να παράξουν ένα μόνο σήμα $x(t)$.

(α′) Αν προστεθούν αυτά τα ημίτονα μεταξύ τους, ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x(t)$;

(β′) Αν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους, ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x(t)$;

$$X_1(t) = A\cos(2\pi \cdot 40t) \quad , \quad X_2(t) = B\cos(2\pi \cdot 150t)$$

a) $X(t) = X_1(t) + X_2(t) = A\cos(2\pi 40t) + B\cos(2\pi 150t)$

Συχνότητα Nyquist: f_{max}

Ρυθμός Nyquist: $2f_{max}$

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = \frac{A}{2}\delta(f-40) + \frac{A}{2}\delta(f+40) + \frac{B}{2}\delta(f-150) + \frac{B}{2}\delta(f+150)$$

Άρα $f_{max} = 150$ και ρυθμός Nyquist $= 2 \cdot 150 = \boxed{300}$.

β) $X(t) = X_1(t) \cdot X_2(t) = AB\cos(2\pi 40t)\cos(2\pi 150t)$

$$X(f) = X_1(f) * X_2(f) = \left(\frac{A}{2}\delta(f-40) + \frac{A}{2}\delta(f+40)\right) * \left(\frac{B}{2}\delta(f-150) + \frac{B}{2}\delta(f+150)\right) =$$

$$= \frac{A}{2}\delta(f-40) * \frac{B}{2}\delta(f-150) + \frac{A}{2}\delta(f-40) * \frac{B}{2}\delta(f+150) + \frac{A}{2}\delta(f+40) * \frac{B}{2}\delta(f-150) +$$

$$+\frac{A}{2}\delta(f+40) * \frac{B}{2}\delta(f+150) =$$

$$= \frac{AB}{4}\delta(f-40-150) + \frac{AB}{4}\delta(f-40+150) + \frac{AB}{4}\delta(f+40-150) + \frac{AB}{4}\delta(f+40+150) =$$

$$= \frac{AB}{4}\delta(f-190) + \frac{AB}{4}\delta(f+110) + \frac{AB}{4}\delta(f-110) + \frac{AB}{4}\delta(f+\underline{190})$$

Άρα $f_{max} = 190$ και ρυθμός Nyquist: $2 \cdot 190 = \boxed{380.}$!

Άσκηση 5 - Δειγματοληψία ΙΙΙ

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου περιγράφεται ως

$$x(t) = 4\cos(2\pi t)\sin(20\pi t) \quad (9)$$

Αν το σήμα αυτό περάσει μέσα από ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο μοναδιαίου πλάτους για $f \in [-10, 10]$ Hz, η έξοδος είναι ένα ημιτονοειδές. Ποιά είναι η συχνότητα και το πλάτος του ημιτονοειδούς αυτού;

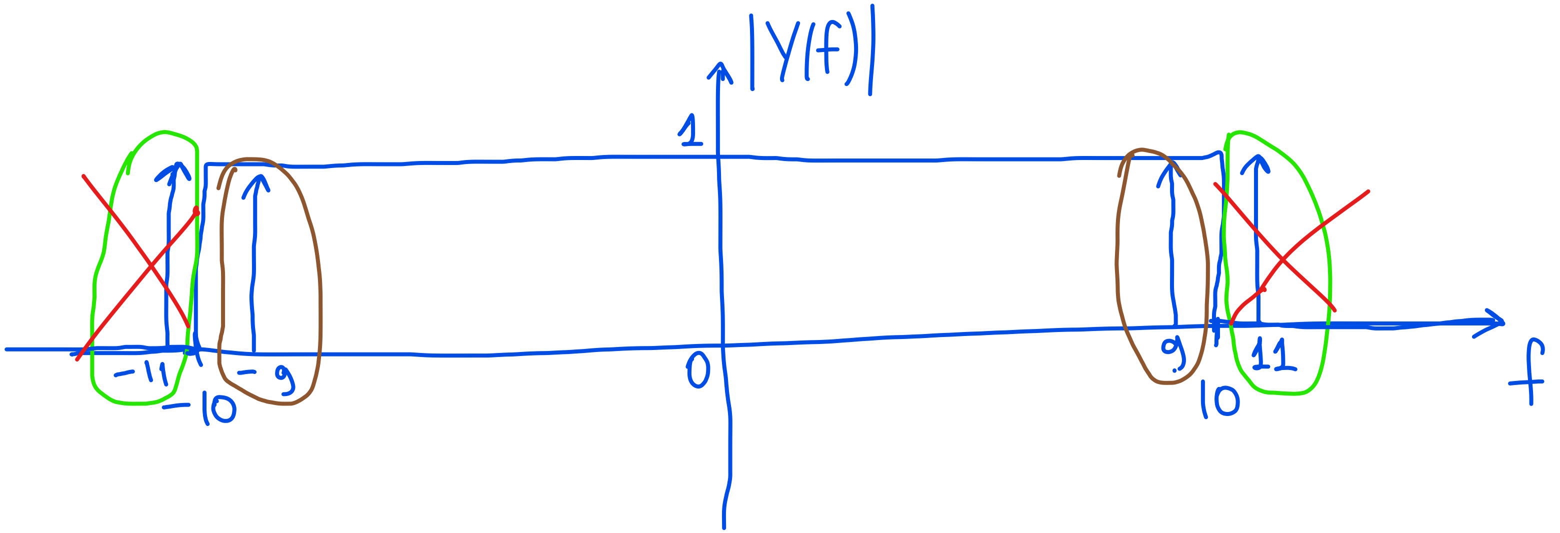
$$x(t) = 4\cos(2\pi t)\cdot\sin(20\pi t) = 2\sin(22\pi t) + 2\sin(18\pi t) =$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

$$= 2\sin(2\pi 11 t) + 2\sin(2\pi 9 t)$$

Τότε $y(t) = x(t) * h(t)$, όπου $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{20}\right)$. Άρα $Y(f) = X(f)\cdot H(f)$

Άρα τελικά, $\boxed{y(t) = 2\sin(2\pi 9 t) \text{ με } f = 9\,\text{Hz},\ A = 2.}$



Θέμα 5ο - 20 μονάδες: δειγματοληψία και φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Έστω το σήμα εισόδου

$$w(t) = 2\cos(2(a\cdot 10)\pi t) - \cos\left(2[(b+6)\cdot 10]\pi t + \frac{\pi}{c+3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(110\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{77}$$

(α') **(5 μ.)** Βρείτε την ισχύ, P_w, και τη συχνότητα Nyquist για το παραπάνω σήμα.

(β') **(5 μ.)** Βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $w[n]$ αν η συχνότητα δειγματοληψίας του είναι η $f_s = 240$ Hz.

(γ') **(10 μ.)** Αν το παραπάνω σήμα $w(t)$ περάσει από ένα σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 120\text{sinc}(60t)\cos(2\pi 65t) \tag{78}$$

πόση είναι η ισχύς στην έξοδο του συστήματος και ποιός ο ρυθμός Nyquist για το σήμα εξόδου;

$a=1,\ b=3,\ c=6$

$$w(t) = 2\cos(\overset{\to 10\text{Hz}}{20\pi t}) - \cos(\overset{\to 90\text{Hz}}{180\pi t} + \tfrac{\pi}{9}) - \tfrac{1}{2}\sin(\overset{\to 55\text{Hz}}{110\pi t} + \tfrac{\pi}{2})$$

α) $P_w = \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k^2}{2} = \frac{2^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{21}{8}}$

Συχνότητα Nyquist: $\max\{10, 90, 55\} = \boxed{90\text{ Hz}}$

β) Θέτουμε $t = n\cdot T_s = n\cdot\frac{1}{f_s} = \frac{n}{240}$

$$w[n] = 2\cos\left(\frac{2\cancel{0}\pi n}{24\cancel{0}}\right) - \cos\left(\frac{18\cancel{0}\pi n}{24\cancel{0}} + \frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{11\cancel{0}\pi n}{24\cancel{0}} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \boxed{2\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{4} + \frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{11\pi n}{24} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

γ) $H(f) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{60}\right) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-65) + \frac{1}{2}\delta(f+65)\right) =$

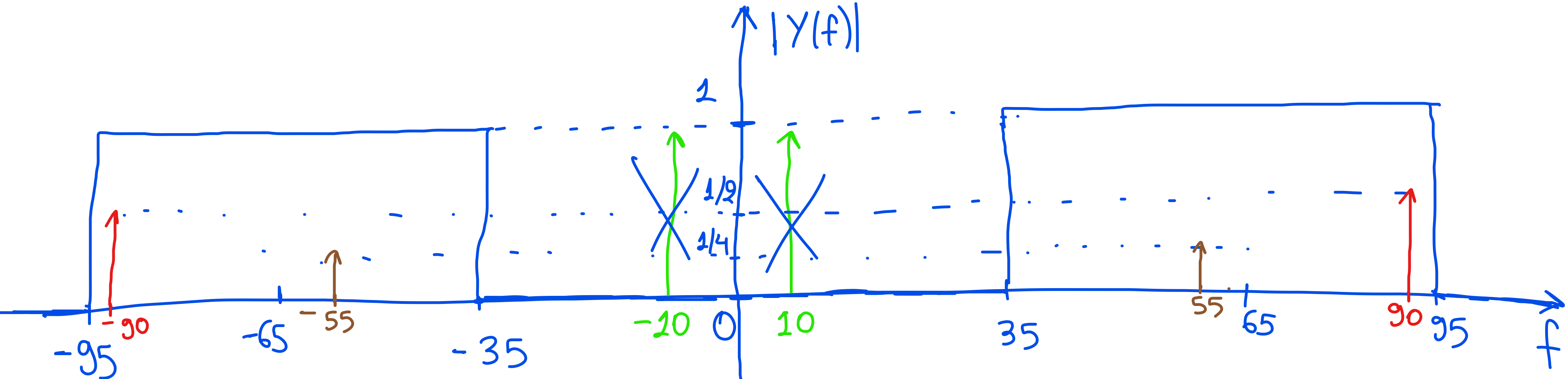
$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

Ιδιότητα δυικότητας: $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

$= \cancel{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{60}\right) * \frac{1}{\cancel{2}}\delta(f-65) + \cancel{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{60}\right) * \frac{1}{\cancel{2}}\delta(f+65) =$

$= \mathrm{rect}\left(\frac{-f-65}{60}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{-f+65}{60}\right)$

Έστω $y(t) = w(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = W(f)\cdot H(f)$.



$w(t) = \boxed{\cancel{2\cos(20\pi t)}} - \boxed{\cos\left(180\pi t + \frac{\pi}{9}\right)} - \boxed{\frac{1}{2}\sin\left(110\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$

Άρα $y(t) = -\cos\left(180\pi t + \frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$P_y = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k^2}{2} = \frac{(-1)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

και ρυθμός Nyquist: $2 \cdot f_{max} = 2 \cdot 90 = \boxed{180 Hz}$